Höhere Analysis

Prof. Dr. Bernd Carl

Semester: WS 2008/09

Vorwort

Dieses Dokument wurde als Skript für die auf der Titelseite genannte Vorlesung erstellt und wird jetzt im Rahmen des Projekts „Vorlesungsskripte der Fakultät für Mathematik und Informatik“ weiter betreut. Das Dokument wurde nach bestem Wissen und Gewissen angefertigt. Dennoch garantiert weder der auf der Titelseite genannte Dozent, die Personen, die an dem Dokument mitgewirkt haben, noch die Mitglieder des Projekts für dessen Fehlerfreiheit. Für etwaige Fehler und dessen Folgen wird von keiner der genannten Personen eine Haftung übernommen. Es steht jeder Person frei, dieses Dokument zu lesen, zu verändern oder auf anderen Medien verfügbar zu machen, solange ein Verweis auf die Internetadresse des Projekts `http://uni-skripte.lug-jena.de/` *enthalten ist.*

Diese Ausgabe trägt die Versionsnummer 3688 und ist vom 25. Mai 2012. Eine neue Ausgabe könnte auf der Webseite des Projekts verfügbar sein.

Jeder ist dazu aufgerufen, Verbesserungen, Erweiterungen und Fehlerkorrekturen für das Skript einzureichen bzw. zu melden oder diese selbst einzupflegen – einfach eine E-Mail an die Mailingliste `<uni-skripte@lug-jena.de>` *senden. Weitere Informationen sind unter der oben genannten Internetadresse verfügbar.*

Hiermit möchten wir allen Personen, die an diesem Skript mitgewirkt haben, vielmals danken:

- *Jens Kubieziel* `<jens@kubieziel.de>` *(2008/09)*
- *Katharina Hoppe (2008)*

Inhaltsverzeichnis

Auflistung der Theoreme

Sätze

Definitionen und Festlegungen

I Einführung

Die lineare Funktionalanalysis kann als Weiterführung der Begriffe aus der linearen Algebra unter Einbeziehung von metrischen und topologischen Begriffen angesehen werden.

I.1 Geschichtlicher Überblick

Das Gebiet der Funktionalanalysis geht auf den schwedischen Mathematiker Erik Ivar Fredholm zurück. In seinem Artikel „Sur une classe d'equations fonctionnelles", erschienen 1903 in Acta Mathematica, legte er den Grundstein für die Operatorentheorie.

Später wandte sich auch David Hilbert der Thematik zu. Er schloss einige Lücken im Beweis der Fredholmschen Alternative und führte die unendlich-dimensionalen Euklidischen Räume ein. Diese wurden später als Hilberträume bezeichnet. Seine Arbeiten legten das Fundament für weitere wichtige Erkenntnisse in der mathematischen Physik.

Ein weiterer wichtiger Schritt in der Fortentwicklung der Theorie gelang den Mathematikern Erhard Schmidt und Issai Schur. Ersterer ist den meisten Studenten wahrscheinlich durch das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren bekannt. Schmidt promovierte in Göttingen zu der Zeit unter Hilbert, als er sich mit den oben beschriebenen Themen befasste. Die Hauptinteressen von Erhard Schmidt lagen bei Integralgleichungen und Hilberträumen. Viele Ideen von Hilberträumen stammen von ihm.

Als ein weiterer Gründer der Funktionalanalysis wird der Ungar Frigyes Riesz angesehen. Er startete 1910 mit der Forschung auf dem Gebiet der Operatorentheorie und kam acht Jahre später nahe an eine axiomatische Theorie für Banachräume. Diese wurde dann 1920 in der Dissertation „Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales" von Stefan Banach festgeschrieben. Er führte die Terminologie in der Funktionalanalysis ein, die wir auch heute noch benutzen und bewies viele fundamentale Sätze.

John von Neumann entwickelte auf der Basis der Arbeiten von David Hilbert die Theorie linearer Operatoren in Hilberträumen und fügte der Theorie weitere wichtige Bausteine hinzu.

Eine Verallgemeinerung des Begriffes der Funktion ist die Distribution. Der französische Mathematiker und Träger der Fields-Medaille Laurent Schwartz entwickelte die Theorie dazu. Mit der Quantenmechanik wurde diese Theorie benötigt, um singuläre Objekte der Physik mathematisch behandeln zu können. Heute werden Distributionen auf weiten Teilen der Mathematik eingesetzt, u. a. bei partiellen Differentialgleichungen oder der Fourieranalyse.

Nicht zuletzt ist als wesentlicher Vertreter auch Alexander Grothendieck zu nennen. Zwischen 1950 und 1955 arbeitete er auf dem Gebiet der Funktionalanalysis und promovierte 1953 unter Schwartz. Grothendieck versuchte während seiner mathematischen Tätigkeit Zusammenhänge möglichst abstrakt und allgemeingültig zu erklären. So ging er auch an dieses Thema heran und löste viele offene Probleme mit abstrakten algebraischen Methoden. Schwartz hatte eine Liste von vierzehn wegweisenden Problemen in der Distributionentheorie aufgestellt. Diese löste Grothendieck angeblich innerhalb eines Jahres.

I.2 Mathematische Einführung

Seien X, Y normierte Räume und $T\colon X \to Y$ ein linearer Operator. Ein Hauptproblem der Funktionalanalysis besteht darin, Gleichungen der Form $Tx = y$ mit gesuchtem x zu lösen. Man bezeichnet mit $N(T) := \ker(T) := \{\, x \in X \mid Tx = 0 \,\}$ den **Nullraum** oder **Kern** von T. Weiter ist $R(T) := \{\, Tx \mid x \in X \,\}$ der **Bildraum** oder **Bild** von T.

Wie ist die obige Situation in endlicher Dimension? Die Dimension von X und Y sind $< \infty$. Das Thema wurde bereits in der Vorlesung zur linearen Algebra behandelt. Man denke an lineare Abbildungen bzw. Matrizen. Die Gleichung $Tx = y$ ist lösbar, falls $y \in R(T)$. Praktisch überprüft man, ob der Rang der Matrix T mit dem Rang von T erweitert um y identisch ist.

Wenn wir nun die Situation im unendlich-dimensionalen betrachten, ändert sich die Lage grundlegend. Die obige Bedingung ist für die Entscheidung, ob y im Bildraum ist, nicht geeignet. Im unendlich-dimensionalen bedient man sich einer dimensionslosen Charakterisierung der obigen Bedingung.

Das soll zunächst für endliche Matrizen $T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ erläutert werden. Ist T' die transponierte Matrix zu T, so gilt die folgende Charakterisierung:

$$R(T) = N(T')_\perp \tag{I.1}$$

Dabei ist $N(T')_\perp := \{\, y \in \mathbb{K}^m \mid \forall b \in N(T')\colon \langle y, b \rangle = 0 \,\}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist das Skalarprodukt in $\mathbb{K}^m$. Die Aussage aus **??** besagt, dass die Gleichung $Tx = y$ lösbar ist, falls die rechte Seite y orthogonal zu allen Lösungen b der homogenen Gleichung $T'b = 0$ steht.

Für eine große Klasse von linearen Operatoren gilt im unendlich-dimensionalen Fall eine analoge Bedingung. Während im endlich-dimensionalen Fall die Lösbarkeit von $Tx = y$ mit Mitteln der linearen Algebra entschieden werden kann, kommt im unendlich-dimensionalen Fall noch die Analysis ins Spiel.

Denn für stetige lineare Operatoren $T\colon X \to Y$ von einem Banachraum X in einen Banachraum Y gilt die Beziehung:

$$\operatorname{cl} R(T) = N(T')_\perp \tag{I.2}$$

Dabei bezeichnet $\operatorname{cl} R(T)$ den Abschluss des Bildes $R(T)$ in Y und $T'\colon Y' \to X'$ ist der so genannte duale Operator von T, der den dualen Banachraum Y' in den dualen Banachraum X' abbildet. Hier ist $N(T')_\perp := \{\, y \in Y \mid \forall b \in N(T')\colon \langle y, b\rangle := b(y) = 0 \,\}$. Die $b\colon Y \to \mathbb{K}$ sind lineare Funktionale und $T'b = 0$.

Die Beziehung aus **??** impliziert, dass für einen stetigen linearen Operator $T\colon X \to Y$ mit abgeschlossenem Bild die Gleichung $Tx = y$ genau dann lösbar ist, wenn für alle $b \in Y'$ mit $T'b = 0$ die Beziehung $\langle y, b\rangle := b(y) = 0$ gilt. Insbesondere werden wir zeigen, dass für einen kompakten Operator $S\colon X \to X$ der Bildraum $R(T)$ von $T := I - S$ abgeschlossen und die Nullräume von T bzw. T' gilt $\dim N(T) = \dim N(T') < \infty$. Damit kann die allgemeine Lösung von $Tx = y$ in der Form $x = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ mit $n = \dim N(T), \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, wobei $x_1, \dots, x_n$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung $Tx = 0$ und x_0 eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $Tx = y$ sind.

Typische Operatoren, die in dieses Schema passen, sind Integraloperatoren. Sie haben die Form:

$$x(s) - \int_0^1 K(s,t)x(t)\,dt = y(s) \qquad s \in [0,1] \tag{I.3}$$

wobei $y\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ und $K\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ gegebene stetige Funktionen sind. Gesucht ist eine Lösung x, die **??** erfüllt.

Die Integralgleichung in **??** kann als System unendlich vieler Gleichungen (für jedes $s \in [0,1]$ eine) mit unendlich vielen Unbekannten $x(s)$ mit $s \in [0,1]$ aufgefasst werden, die stetig „zusammenpassen“. Man definiert $S\colon C[0,1] \to C[0,1]$ durch $(Sx)(s) := \int_0^1 K(s,t)x(t)\,dt$ und $T := I - S$.

Beispiel
Sei $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3$. Man untersuche die Lösbarkeit der Gleichung $Tx = y$ bei vorgegebenem $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$. Gilt für y die Bedingung $2\alpha\eta_1 + \alpha\eta_2 + \alpha\eta_3 = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$, so ist die obige Gleichung lösbar.

Beweis:
Man benutze die **??**. Ist $y \in N(T')_\perp$, d. h. $\langle y, b\rangle = 0$ für alle $b \in N(T')_\perp$, so ist die obige Gleichung lösbar. Jetzt bestimmen wir den Nullraum. Dazu betrachten wir die transponierte Matrix:

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Dann ist $T'b = \begin{pmatrix} b_1 + 2b_2 \\ b_1 + b_2 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Umstellen ergibt, $b_2 = b_3, b_1 = -2b_2 = -2b_3$. Dabei ist b_3 beliebig. Wir setzen $b_3 = \alpha$. Nun gilt, $N(T') = \left\{ b = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{K} \right\}$.
Also $\langle y, b\rangle = -2\overline{\alpha}\eta_1 + \overline{\alpha}\eta_2 + \overline{\alpha}\eta_3$. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ kann man den Überstrich weglassen. ∎

Spezialfall: Sei $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann hat man $\langle y, b\rangle = -4\alpha + 3\alpha + \alpha = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teil I

Höhere Analysis I

II Normierte Räume

II.1 Begriffe in Vektorräumen über $\mathbb{K}$

Definition II.1.1 (Verschiedene)
Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

lineare Hülle Sei M eine nichtleere Teilmenge von X. Dann ist

$$\operatorname{span}(M) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{K}, x_i \in M, n \in \mathbb{N} \right\}$$

die lineare Hülle von M.

linear abhängig Die Vektoren $x_1, \ldots, x_n \in X$ heißen genau dann **linear abhängig**, wenn $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}\colon \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| > 0 \wedge \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$.

Eine Menge $\emptyset \neq M \subseteq X$ heißt **linear unabhängig** genau dann, wenn kein $A \subseteq M$ mit $|A| < \infty$ existiert und die Elemente von A linear abhängig sind.

Basis Sei $M \subseteq X$ eine linear unabhängige Teilmenge von X mit $\operatorname{span}(M) = X$. Dann heißt M eine **Basis** von X.

endlich dimensional X heißt genau dann **endlich dimensional**, wenn entweder $X = \{0\}$ oder X eine endliche Basis hat.

unendlich dimensional X heißt genau dann **unendlich dimensional**, wenn X nicht endlich dimensional ist.

Dimension Man kann zeigen: Ist $\{0\} \subsetneq X$ endlich dimensional, dann haben alle Basen die gleiche Anzahl von Elementen. Ist $B \subset X$ eine Basis für X, dann heißt die Anzahl der Elemente von B **Dimension** von X. Kurz $\dim X := \operatorname{card}(B) = |B|$. Konvention: $\dim\{0\} = 0$.

II.2 Begriffe in normierten Räumen

Sei X ein Vektorraum und $\|\cdot\|\colon X \to [0, \infty)$ eine Norm auf X. Das Paar $[X, \|\cdot\|]$ heißt **normierter Raum**. Man bezeichnet $B_X := \{ x \in X \mid \|x\| \leqslant 1 \}$ als **abgeschlossene Einheitskugel** und $\mathring{B}_X := \{ x \in X \mid \|x\| < 1 \}$ als **offene Einheitskugel**. Für $A, B \subset X$ ist $A + B := \{ a + b \mid a \in A, b \in B \}$ die **Summe zweier Mengen** und $B_\varepsilon(x_0) := \{ x \in X \mid \|x - x_0\| \leqslant \varepsilon \} =$

$\{x_0\} + \varepsilon B_X$ **abgeschlossene ε-Kugel** mit Mittelpunkt x_0. Es ist $\mathring{B}_\varepsilon(x_0) := \{ x \in X \mid \|x - x_0\| < \varepsilon \} = \{x_0\} + \varepsilon B_X$ **offene ε-Kugel** mit Mittelpunkt x_0. Die Menge $M \subseteq X$ heißt genau dann **offen**, wenn es zu jedem $x \in M$ ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft $B_\varepsilon(x) \subset M$ gibt. Die Menge $M \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus M$ offen ist.

Eine Folge $(x_n) \subset X$ heißt genau dann **konvergent**, wenn für ein $x \in X$ gilt, $\lim x_n = x$, d. h. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geqslant n_\varepsilon : \|x_n - x\| \leqslant \varepsilon$.

Lemma II.2.1
Sei X ein normierter Raum. Eine Teilmenge $M \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn alle $(x_n) \subset M$ konvergent in X sind und $\lim x_n \in M$ gilt.

Beweis:
„$\Rightarrow$“ Der Beweis erfolgt durch Kontraposition. Sei M abgeschlossen und es existiert eine Folge $(x_n) \subset M$ mit $a = \lim x_n$. Dabei liegt das a in der Menge X, aber nicht in der Menge M. Deshalb muss a in der offenen Menge $X \setminus M$ liegen. In der Menge existiert eine natürliche Zahl n_0 und für alle n, die größer als das n_0 sind, folgt, $x_n \in B_\varepsilon(a) \subset X \setminus M \Rightarrow a \in M$ ↯ Denn für $n \geqslant n_0 : x_n \in X \setminus M$.

„$\Leftarrow$“ Angenommen für alle Folgen $(x_n) \subset M$ mit $\lim x_n \in X$ folgt, dass $\lim x_n \in M$ und M ist nicht abgeschlossen. Dann ist die Menge $X \setminus M$ nicht offen, d. h. $\exists a \in X \setminus M \, \forall \varepsilon > 0 \colon B_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$. Insbesondere gibt es für $\varepsilon_n = 1/n$ ein $(x_n) \subset M$ mit $\|x_n - a\| \leqslant 1/n$, d. h. $\lim x_n = a$. Aber $a \in M$. ↯

Definition II.2.2 (abgeschlossene Hülle)
Die **abgeschlossene Hülle** von $M \subseteq X$ ist definiert als:

$$\begin{aligned} \operatorname{cl}(M) := \bigcap_{N \supseteq M} N &= \{ x \in X \mid \forall N (N \supseteq M \Rightarrow x \in N) \} \\ &= \left\{ x \in X \;\middle|\; \exists (x_n) \subset M \colon x_n \xrightarrow{n \to \infty} x \right\} \end{aligned}$$

Das **Innere** oder **Kern** von $M \subseteq X$ ist definiert als:

$$\operatorname{int}(M) := \bigcup_{\substack{N \subseteq M \\ \text{offen}}} N = \{ x \mid \exists N (N \subseteq M \wedge x \in N) \}$$

Der Abschluss $\operatorname{cl}(M)$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält. Es ist $\operatorname{cl} \mathring{B}_x = B_x$. Weiter ist $\operatorname{int}(M)$ die größte offene Menge in M.

Definition II.2.3 (beschränkt)
Es heißt $M \subseteq X$ genau dann **beschränkt**, wenn $\sup_{x \in M} \|x\| < \infty$. Das ist äquivalent dazu, dass ein $r \geqslant 0$ mit $M \subset B_r(0))$ existiert.

Eine Folge $(x_n) \subset X$ heißt genau dann **Cauchyfolge**, wenn $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \, \forall n, m \geqslant n_\varepsilon : \|x_n - x_m\| \leqslant \varepsilon$.

Lemma II.2.4
Sei $(x_n) \subset X$ eine Cauchyfolge und $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ eine konvergente Teilfolge. Dann ist die Cauchyfolge (x_n) selbst konvergent.

Beweis:
Sei $x := \lim x_{n_k}$ und $\varepsilon > 0$. Wegen der Konvergenz der Teilfolge existiert eine natürliche Zahl k_ε mit $\|x - x_{n_k}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geqslant k_\varepsilon$. Da $(x_n) \subset X$ eine Cauchyfolge ist, existiert ein $n_l \geqslant n_{k_\varepsilon}$ mit $\|x_n - x_{n_k}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant n_l$. Somit ergibt sich für $n \geqslant n_l$ die Abschätzung: $\|x - x_n\| = \|x - x_{n_l} + x_{n_l} - x_n\| \leqslant \|x - x_{n_l}\| + \|x_{n_l} - x_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ■

Definition II.2.5 (Vollständiger Raum, Banachraum)
Ein normierter Raum heißt **vollständig**, falls jede Cauchyfolge in X konvergiert. Ein vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**.

Satz II.2.6 (Kriterium für die Vollständigkeit)
Ein normierter Raum ist genau dann vollständig, wenn für alle Folgen $(x_n) \subset X$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ in X konvergent ist.

Beweis:
„⇒“ Sei $(x_n) \subset X$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Dann sind die Partialsummen $s_m := \sum_{n=1}^{m} x_n$ Cauchyfolgen. Denn für $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ und für $m > k \geqslant n_\varepsilon$ gilt $\|s_m - s_k\| = \|\sum_{n=k+1}^{m} x_n\| \leqslant \sum_{n=k+1}^{m} \|x_n\| \leqslant \varepsilon$. Damit ist $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergent in X, da X vollständig ist.

„⇐“ Sei $(x_n) \subset X$ eine Cauchyfolge in X. Dann ist zu zeigen, dass ein $x \in X$ mit $\lim x_n = x$ existiert. Also existiere ein n_1 mit $\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{1}{2}$ für $n, m \geqslant n_1$. Weiter existiert ein $n_2 > n_1$ mit $\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{1}{2^2}$ für $n, m \geqslant n_2$. Das wird fortgeführt. Also existiert ein $n_k > n_{k-1} > \cdots > n_1$ mit $\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{1}{2^k}$ für $n, m \geqslant n_k$. Insbesondere hat man $\|x_{n_2} - x_{n_1}\| \leqslant \frac{1}{2}$ und $\|x_{n_3} - x_{n_2}\| \leqslant \frac{1}{2^2}$. Letztlich ist $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leqslant \frac{1}{2^k}$. Durch diese Konstruktion folgt, $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \infty$. Nach der Voraussetzung ist die Reihe $\sum (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ in X konvergent.

Damit folgt, $x_{n_{m+1}} - x_{n_1} = \sum_{k=1}^{m} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \xrightarrow{x \to \infty} s \in X$ oder $x_{n_{m+1}} \to x_{n_1} + s =: x \in X$. Nach dem **??** ist die Cauchyfolge konvergent, denn (x_{n_k}) ist eine konvergente Teilfolge von (x_n).

Das folgende Lemma ist oft nützlich bei der Untersuchung der Vollständigkeit normierter Räume.

Lemma II.2.7
Sei X ein normierter Raum und $U \subseteq X$ ein linearer Teilraum. Dann gilt,

(a) Ist U vollständig, so ist U abgeschlossen.

(b) Ist X vollständig und U abgeschlossen, so ist auch U vollständig.

Beweis:

(a) Sei $(u_n) \subset U$ eine konvergente Teilfolge in X, d. h. $u_n \to x \in X$. Dann ist (u_n) eine Cauchyfolge in U und da U vollständig, existiert ein Grenzwert $u \in U$. Also muss gelten $x = u \in U$ wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes. Somit ist U abgeschlossen.

(b) Sei $(u_n) \subset U$ eine Cauchyfolge. Dann ist (u_n) auch eine Cauchyfolge in X. Da X vollständig, existiert $x := \lim u_n \in X$. Die Abgeschlossenheit von U impliziert, dass $x \in U$, d. h. U ist vollständig.

Bemerkung

- Das obige Lemma (**??**) gilt ebenso für metrische Räume, wobei $U \subset X$ die Rolle einer Teilmenge spielt.
- Im Punkt (b) ist die Vollständigkeit von X notwendig.

II.2.1 Präkompakte und kompakte Mengen

Definition II.2.8 (Präkompakte, kompakte und folgenkompakte Menge)
Eine Teilmenge $M \subset X$ eines normierten Raumes X heißt genau dann **präkompakt**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ Elemente $s_1, \dots, s_n$ aus X mit $M \subset \bigcup_{i=1}^{n}(\{s_i\} + \varepsilon B_X)$ existieren.

Die Teilmenge M heißt genau dann **kompakt**, wenn für alle $(x_n) \subset M$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ mit $\lim x_{n_k} \in M$ existiert. Das ist äquivalent dazu, dass jede offene Überdeckung $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ von M mit $M \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ eine endliche offene Teilüberdeckung enthält, d. h. es existieren Indizes $\alpha_1, \dots, \alpha_n \colon M \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$.

Sei X ein Banachraum. Dann ist $M \subset X$ genau dann präkompakt, wenn der Abschluss von M kompakt ist.

Definition II.2.9 (Entropiezahl)
Sei $M \subset X$ beschränkt. Dann heißt die Größe:

$$\mathcal{E}_n(M) := \inf \left\{ \varepsilon \geqslant 0 \;\middle|\; \exists s_1, \dots, s_n \in X \colon M \subset \bigcup_{i=1}^{n} (\{s_i\} + \varepsilon B_X) \right\}$$

die n-te **Entropiezahl** von M.

Bemerkung
Es ist $\mathcal{E}_1(M) \geqslant \mathcal{E}_2(M) \geqslant \cdots \geqslant 0$. Somit ist M genau dann präkompakt, wenn gilt: $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_n(M) = 0$.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Sei $\delta > 0$. Dann existiert $n_\delta \in \mathbb{N}$ mit $s_1, \dots, s_{n_\delta} \in X \colon M \subset \bigcup_{i=1}^{n_\delta}(\{s_i\} + \varepsilon B_X) \Rightarrow \mathcal{E}_{n_\delta}(M) \leqslant \delta$. Somit $\mathcal{E}_n(M) \leqslant \mathcal{E}_{n_\delta}(M) \leqslant \delta$ für $n \geqslant n_\delta$, d. h. $\lim \mathcal{E}_n(M) = 0$.

„$\Leftarrow$" Sei $\lim \mathcal{E}_n(M) = 0$. Für $\delta > 0$ existiert eine Zahl n_δ mit $\mathcal{E}_{n_\delta} < \delta$. Damit folgt nach der Definition der Entropiezahlen, dass $s_1, \dots, s_{n_\delta} \in X$ mit $M \subset \bigcup_{i=1}^{n_\delta}(\{s_i\} + \delta B_x)$ existieren. Also ist M präkompakt.

Somit ergibt sich das folgende Problem: Sei X ein Banachraum mit $\dim X = \infty$. Ist es möglich, dass die Einheitskugel B_x von X durch endlich viele ε-Kugeln $\{s_i\} + \varepsilon B_X$ mit $\varepsilon < 1$ überdeckt werden kann?

Hinweis: $\mathcal{E}_{nm}(B_X) \leqslant \mathcal{E}_n(B_X)\mathcal{E}_m(B_X)$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{kompakt}} \arrow[r, shift left] \arrow[d] & \boxed{\text{präkompakt}} \arrow[l, shift left, "\text{vollständig}"] \arrow[d] \\
\boxed{\text{abgeschlossen}} & \boxed{\text{beschränkt}}
\end{tikzcd}$$

II.2.2 Präkompakte und kompakte Mengen in metrischen Räumen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist $B(s, \varepsilon) := \{ A \in X \mid d(A, s) \leqslant \varepsilon \}$ die abgeschlossene ε-Kugel mit Mittelpunkt s und $\mathring{B}(s, \varepsilon) := \{ A \in X \mid d(A, s) < \varepsilon \}$ die offene ε-Kugel. Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt genau dann **beschränkt**, wenn es ein $\varepsilon > 0$ und $s \in X$ mit $M \subseteq B(s, \varepsilon)$ gibt.

Definition II.2.10 (Präkompakte Menge)
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt genau dann **präkompakt**, wenn $\forall \varepsilon > 0\, \exists s_1, \dots, s_n \in X\colon M \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(s_i, \varepsilon)$.

Die $\{s_1, \dots, s_n\}$ werden **ε-Netz** genannt.

Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt genau dann **kompakt** oder **folgenkompakt**, wenn für alle $(x_n) \subseteq M$ eine konvergente Teilfolge existiert: $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)\colon \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in M$.

Bemerkung
Ein metrischer Raum heißt präkompakt oder kompakt, falls X präkompakt oder kompakt ist.

Satz II.2.11 (Charakterisierung von Präkompaktheit)
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $M \subseteq X$ ist präkompakt.

(ii) Jede Folge $(x_n) \subseteq M$ enthält eine Cauchy-Teilfolge.

Beweis:
Für die Richtung von (ii) nach (i) nehmen wir an, dass die Menge M nicht präkompakt ist, d. h. $\exists \varepsilon_0 > 0 \forall n \in \mathbb{N} \forall z_1, \dots, z_n \in X$ gilt $M \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n B(z_i, \varepsilon_0)$. Sei dazu $x_1 \in M$ fixiert. Wähle $x_2 \in M \setminus B(x_1, \varepsilon_0)$, d. h. $d(x_1, x_2) > \varepsilon_0$. Diese Wahl wird fortgesetzt, also $x_3 \in M \setminus (B(x_1, \varepsilon_0) \cup B(x_2, \varepsilon_0))$ und $d(x_3, x_1) > \varepsilon_0, d(x_3, x_2) > \varepsilon_0$. Man erhält dann eine Folge (x_n), die keine Cauchy-Teilfolge enthält. Denn die Abstände müssen immer größer sein. Damit ist der erste Teil der Behauptung gezeigt.

Nun betrachten wir die Richtung (i)$\Rightarrow$(ii). Sei dazu $M \subseteq X$ präkompakt und $(x_n) \subseteq M$ eine Folge. Durch Induktion werden Teilmengen $A_m \subseteq M$ mit $d(x,y) \leqslant 2/m$ für $x, y \in A_m$ konstruiert. Ist $\{y_1, \dots, y_k\} \subseteq M$ ein 1-Netz in M, d. h. $M \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(y_i, 1)$, so existiert unter den k Mengen $B(y_i, 1)$ wenigstens eine Menge $A_1 := B(y_{i_0}, 1)$ die unendlich viele Glieder der Folge (x_m) enthält, d. h. es existiert eine Teilfolge $(x_n^{(1)}) \subseteq (x_n)$ mit $(x_n^{(1)}) \subseteq A_1$ und für $x, y \in A_1$ gilt $d(x,y) \leqslant 2$.
Der Induktionsschluss ergibt: Seien für festes m die Mengen A_m und die Folgen $(x_n^{(m)}) \subseteq (x_n^{(m-1)})$ bereits konstruiert. Ist $z = \{z_1, \dots, z_l\}$ ein $\frac{1}{m+1}$-Netz für M, d. h. $M \subseteq \bigcup_{i=1}^l B(z_i, \frac{1}{m+1})$, so existiert eine Menge $A_{m+1} := B(z_{i_0}, \frac{1}{m+1})$ die unendlich viele Glieder der Folge $(x_n^{(m)})$ enthält, d. h. es existiert eine Teilfolge $(x_n^{(m+1)}) \subseteq (x_n^{(m)})$ und für $x, y \in A_{m+1}$ gilt $d(x,y) \leqslant \frac{2}{m+1}$. Im folgenden liefert das Cantorsche Diagonalverfahren, dass die Folge $(x_n^{(n)})$ eine Teilfolge von (x_n) mit folgenden Eigenschaften ist: $d(x_n^{(n)}, x_n^{(m)}) \leqslant 2/m$ für $n \geqslant m$, d. h. $(x_n^{(m)})$ ist Cauchy-Teilfolge von (x_n). ∎

Satz II.2.12
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(i) $M \subseteq X$ kompakt

(ii) $M \subseteq X$ präkompakt und vollständig.

Beweis:
Für die Richtung von (i) nach (ii) sei (x_n) eine Cauchyfolge in M. Da M kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{n_k}) \subset (x_n)$, deren Grenzwert x in M liegt. Nach **??** ist eine Cauchyfolge mit konvergenter Teilfolge ebenfalls konvergent. Somit strebt x_n für $n \to \infty$ gegen $x \in M$ und es folgt, dass M vollständig ist.

Sei $(x_n) \subseteq M$ eine Folge. Dann existiert wegen der Kompaktheit von M eine konvergente Teilfolge. Diese ist auch Cauchy-Teilfolge. Der **??** impliziert, dass M präkompakt ist.

Für die Richtung (ii) nach (i) sei $(x_n) \subseteq M$ eine Folge. Da M präkompakt ist, enthält sie nach **??** eine Cauchy-Teilfolge. Die Vollständigkeit von M impliziert, dass die Cauchy-Teilfolge in M konvergiert. Also ist M kompakt. ∎

Folgerung II.2.13
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Ist $M \subseteq X$ präkompakt, so ist M beschränkt.

(ii) Ist $M \subseteq X$ kompakt, so ist M beschränkt und abgeschlossen.

Beweis:

(i) Für $\varepsilon = 1$ existieren $s_1, \dots, s_n \in M$ mit $M \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(s_i, 1)$. Wir setzen für den maximalen Abstand der Mittelpunkte $r \coloneqq \max\left\{ d(s_i, s_j) \,\middle|\, \leqslant i, j \leqslant n \right\}$. Dann gilt $M \subseteq B(s_1, r+1)$, d. h. M ist beschränkt. Denn für $A \in M$ existieren s_k mit $d(A, s_k) \leqslant 1$. Damit folgt, $d(A, s_1) \leqslant d(A, s_k) + d(s_k, s_1) \leqslant 1 + r \Rightarrow A \in B(s_1, r+1)$.

(ii) Wenn M kompakt ist, dann folgt nach **??** auch, dass es präkompakt und vollständig ist. Nach Punkt (i) ist M somit beschränkt. Die Vollständigkeit impliziert, dass M auch abgeschlossen ist. Denn ist $(x_n) \subseteq M$ eine konvergente Folge in X, dann ist (x_n) eine Cauchyfolge in M und da M vollständig ist, ist $\lim x_n \in M$, d. h. M abgeschlossen.

Bemerkung
Die Umkehrung der obigen Folgerung gilt im Allgemeinen *nicht*. Denn sei $M = \{ e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \mid i \in \mathbb{N} \} \subseteq \ell_p$. Es gilt, $\|e_i\|_p = 1$. Aber (e_i) enthält keine Cauchy-Teilfolge, denn $\|e_i - e_j\|_p = 2^{1/p}$ für $i \neq j$.

Satz II.2.14
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

(i) $M \subseteq X$ präkompakt

(ii) $\mathrm{cl}(M) \subseteq X$ kompakt

Beweis:

(i)⇒(ii) Für $\varepsilon > 0$ existieren $s_1, \dots, s_n \in X$ mit $M \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(s_i, \varepsilon)$. Damit folgt, $\mathrm{cl}(M) \subseteq \mathrm{cl}(\bigcup_{i=1}^n B(s_i, \varepsilon)) = \bigcup_{i=1}^n B(s_i, \varepsilon)$. Der letzte Schritt resultiert aus der endlichen Vereinigung. Somit ist $\mathrm{cl}(M)$ präkompakt und abgeschlossen. Da X vollständig ist, ist $\mathrm{cl}(M)$ auch vollständig. Nach **??** ist $\mathrm{cl}(M)$ somit kompakt.

(ii)⇒(i) Da $\mathrm{cl}(M)$ kompakt ist, folgt nach **??**, dass $\mathrm{cl}(M)$ auch präkompakt ist. Wegen $M \subseteq \mathrm{cl}(M)$ ist M auch präkompakt.

Definition II.2.15 (Offene Überdeckung)
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein System $\{G_i\}_{i \in I}$ von offenen Mengen aus X heißt genau dann **offene Überdeckung**, wenn M eine Teilmenge der Vereinigung aller G_i ist.

Definition II.2.16 (Überdeckungskompakt)
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $M \subseteq X$ heißt genau dann **überdeckungskompakt**, wenn jede offene Überdeckung von M eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Diese Eigenschaft nennt man oft auch **Heine-Borel-Eigenschaft**.

Satz II.2.17
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent.

(i) X ist überdeckungskompakt.

(ii) X ist folgenkompakt.

Beweis:
(i)⇒(ii) Sei X überdeckungskompakt. Wir nehmen an, dass X nicht folgenkompakt ist. Also sei (x_n) eine Folge ohne konvergente Teilfolge. Dann kann kein $x \in X$ ein Häufungspunkt von (x_n) sein, d. h. für alle $x \in X$ gibt es ein $\varepsilon_x > 0$ mit $\mathring{B}(x, \varepsilon_x)$ enthält nur endlich viele Glieder der Folge (x_n). Wegen $X = \bigcup_{x \in X} \mathring{B}(x, \varepsilon_x)$ und der Überdeckungskompaktheit existieren endlich viele $B(x, \varepsilon_x)$, die X überdecken. Also enthält X nur endlich viele der x_n. ↯

(ii)⇒(i) Wir zeigen zunächst

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \exists x_1, \ldots, x_N \in X \colon X = \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon) \tag{II.1}$$

Dazu nehmen wir an, dass **??** falsch ist, also gilt:

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall N \in \mathbb{N}\, \forall x_1, \ldots, x_N \colon \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon) \subsetneq X$$

Wir konstruieren nun eine Folge ohne konvergente Teilfolge. Sei hierzu $x_1 \in X$ fixiert. Wegen $B(x_1, \varepsilon) \neq X$ existiert $x_2 \in X$ mit $d(x_2, x_1) \geqslant \varepsilon$. Nun ist auch $\mathring{B}(x_1, \varepsilon) \cup \mathring{B}(x_2, \varepsilon) \neq X$. Also existiert ein $x_3 \in X$ mit $d(x_3, x_1) \geqslant \varepsilon$ und $d(x_3, x_2) \geqslant \varepsilon$. Wenn man mit dem Schema weiterverfährt, erhält man eine Folge $(x_n) \subseteq X \colon d(x_n, x_k) \geqslant \varepsilon$ für $k = 1, \ldots, n-1$. Damit enthält (x_n) keine Cauchy-Teilfolge und damit auch keine konvergente Teilfolge. Dies ist ein Widerspruch zur Kompaktheit und damit gilt **??**.

Sei X kompakt und $\{G_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, die *keine* endliche Teilüberdeckung enthält und $\varepsilon_1 = 1$. Wir wählen nach **??** Elemente aus X: $x_1^{(1)}, \ldots, x_{N_1}^{(1)}$ mit $X = \bigcup_{i=1}^{N_1} \mathring{B}\left(x_i^{(1)}, \varepsilon_1\right)$. Mindestens eine Kugel ist nicht endlich überdeckbar. Dies sei o. B. d. A. $\mathring{B}\left(x_1^{(1)}, \varepsilon_1\right)$. Nun sei weiter $\varepsilon_2 = 1/2$ und $X = \bigcup_{i=1}^{N_2} \mathring{B}\left(x_i^{(2)}, \varepsilon_2\right)$ nach **??** gewählt. Es folgt, $\mathring{B}\left(x_1^{(1)}, \varepsilon_1\right) = \bigcup_{i=1}^{N_2} \mathring{B}\left(x_1^{(1)}, \varepsilon_1\right) \cap \mathring{B}\left(x_i^{(2)}, \varepsilon_2\right)$. Eine dieser Mengen kann nicht endlich überdeckbar sein. Im folgenden wenden wir **??** mit $\varepsilon_3 = \frac{1}{2^2}$ an. Dann erhalten wir einen Punkt $x_1^{(3)}$, so dass $\mathring{B}\left(x_1^{(1)}, \varepsilon_1\right) \cap \mathring{B}\left(x_1^{(2)}, \varepsilon_2\right) \cap \mathring{B}\left(x_1^{(3)}, \varepsilon_3\right)$ nicht endlich überdeckbar ist.

Führen wir diese Prozedur fort, so erhalten wir mit $\varepsilon_n = 2^{1-n}$ Punkte $z_1, \ldots, z_n$, sodass $\bigcap_{k=1}^{n} \mathring{B}(z_k, \varepsilon_k)$ für kein $n \in \mathbb{N}$ endlich überdeckbar ist. Insbesondere ist $\mathring{B}(z_n, \varepsilon_n) \cap \mathring{B}(z_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \neq \emptyset$ für $n \in \mathbb{N}$. Betrachten wir die entstandene Folge

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und fixieren ein $\nu \in \mathring{B}(z_n, \varepsilon_n) \cap \mathring{B}(z_{n+q}, \varepsilon_{n+1})$. Dann gilt die Abschätzung: $d(z_{n+1}, z_n) \leqslant d(z_{n+1}, \nu) + d(\nu, z_n) \leqslant \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n \leqslant 2\varepsilon_n = 2^{2-n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit ist (z_n) eine Cauchyfolge. Denn für $m > n$ gilt:

$$\begin{aligned} d(z_m, z_n) &\leqslant d(z_n, z_{n+1}) + d(z_{n+1}, z_{n+2}) + \dots + d(z_{m-1}, z_m) \\ &\leqslant 2^{2-n} + 2^{1-n} + \dots + 2^{3-m} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2-n-k} = 2^{2-n} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2^{3-n} \end{aligned}$$

Damit folgt, (z_n) ist eine Cauchyfolge. Weil X kompakt ist, enthält (z_n) eine konvergente Teilfolge und nach **??** ist (z_n) selbst kompakt, $z_n \to z_0 \in X$. Damit existiert $i_0 \colon z_0 \in G_{i_0}$. Da G_{i_0} offen, ist $\alpha := \inf\{\, d(z, z_0) \mid z \notin G_{i_0} \,\} > 0$. Dann wäre $\alpha = 0$, dann gäbe es eine Folge, die gegen z_0 konvergiert. Die Glieder liegen in der abgeschlossenen Menge $X \setminus G_{i_0}$ und somit läge auch z_0 in der Menge. Dies ist ein Widerspruch.

Nach Definition des α gilt die Inklusion: $\mathring{B}(z_0, \alpha) \subset G_{i_0}$. Wir wählen n so gross, dass $d(z_n, z_0) < \alpha/2$ und $\varepsilon_n = 2^{1-n} < \alpha/2$. Dann folgt die Inklusion $\mathring{B}(z_n, \varepsilon_n) \subset \mathring{B}(z_0, \alpha)$. Dies folgt mittels der Dreiecksungleichung: Für $z \in \mathring{B}(z_n, \varepsilon_n)$ gilt die Abschätzung $d(z, z_0) \leqslant d(z, z_n) + d(z_n, z_0) < \varepsilon_n + \alpha/2 < \alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$. Also ist z in der Kugel um z_0 mit dem Radius α.

Insgesamt haben wir die Inklusionen $\mathring{B}(z_1, \varepsilon_1) \cap \dots \cap \mathring{B}(z_n, \varepsilon_n) \subset \mathring{B}(z_n, \varepsilon_n) \subset \mathring{B}(z_0, \alpha) \subset G_{i_0}$ ↯ zur Konstruktion von (z_n). Die zeigt die Implikation.

II.2.3 Kompakte Mengen in Teilräumen

Satz II.2.18
Seien $(X, d), (Y, d)$ metrische Räume mit $X \subset Y$ und $M \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

(i) M ist kompakt in X

(ii) M ist kompakt in Y

Beweis:
(i)⇒(ii) Sei M kompakt in X und M eine offene Überdeckung $M \subset \bigcup_{i\in I} G_i$ in Y. Dann gilt, $M \subseteq (\bigcup_{i\in I} G_i) \cap X = \bigcup_{i\in I}(G_i \cap X)$. Diese Mengen sind offen in X. Da M kompakt in X ist, folgt, dass es eine endliche Teilüberdeckung von M gibt: $M \subseteq \bigcup_{k=1}^{n}(G_{i_k} \cap X) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k} \Rightarrow M$ kompakt in Y.

(ii)⇒(i) Sei M kompakt in Y und $M \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i \cap X$. Dabei sind G_i offene Teilmengen von Y. Dann gilt, $M \subset \bigcup_{i\in I} G_i$. Da Y kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung: $M \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$. Da $M \subseteq X$, ist M enthalten in $\bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k} \cap X$. Also ist es eine endliche Teilüberdeckung in X, d. h. M kompakt in X.

Bemerkung
Der obige Satz sagt, dass der Begriff der Kompaktheit unabhängig vom Oberraum ist. Damit sind nach **??** die Begriffe überdeckungskompakt und kompakt (i. S. v. folgenkompakt) auch für Teilmengen eines metrischen Raumes äquivalent.

II.2.4 Kartesisches Produkt und Kompaktheit

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann ist $(X \times Y, d)$ ein metrischer Raum und $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \coloneqq \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$.

Wir zeigen die Dreiecksungleichung: Seien $(x_1, x_2), (u, v), (y_1, y_2) \in X \times Y$. Dann können wir den Abstand wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} d_X(x_1, x_2) &\leqslant d_X(x_1, u) + d_X(u, x_2) \\ &\leqslant \max\{d_X(x_1, u), d_Y(v, y_1)\} + \max\{d_X(x_2, u), d_Y(v, y_1)\} \\ &= d((x_1, y_1), (u, v)) + d((u, v), (x_2, y_2)) \end{aligned}$$

Analog gilt $d_Y(y_1, y_2) \leqslant d((x_1, y_1), (u, v)) + d((u, v), (x_2, y_2))$. Damit folgt die Behauptung.

Satz II.2.19
Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Dann sind äquivalent:

(i) $(X \times Y, d)$ ist kompakt.

(ii) $(X, d_X), (Y, d_Y)$ sind kompakt.

Beweis:
(i)⇒(ii) Sei $(x_n) \subset X$ eine Folge. Für ein festes $y_0 \in Y$ hat die Folge $(x_n, y_0) \subset X \times Y$ eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}, y_0). Die konvergiert gegen $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Damit folgt, $x_{n_k} \to x_0 \in X$, d. h. X ist kompakt. Analog folgt die Kompaktheit für Y.

(ii)⇒(i) Sei (x_n, y_n) eine Folge aus $X \times Y$. Wegen der Kompaktheit von X hat die Folge $(x_n) \subset X$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k}) \to x_0 \in X$. Dann hat auch die Folge $(y_{n_k}) \subset Y$ eine konvergente Teilfolge $(y_{n_{k_j}})$: $y_{n_{k_j}} \to y_0 \in Y$. Damit folgt, $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) \to (x_0, y_0) \in X \times Y$, d. h. $X \times Y$ ist kompakt.

Satz II.2.20
Sei $\ell_\infty^n \coloneqq [\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty]$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

(i) $M \subset \ell_\infty^n$ ist kompakt.

(ii) M ist beschränkt und abgeschlossen.

Beweis:
(i)⇒(ii) klar, wegen **??**

(ii)⇒(i) Wegen $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^n$ kann man $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ annehmen. Sei M beschränkt, d. h. es existiert ein $L > 0$ mit $\|x\|_\infty \leqslant L$ für $x \in M$. Also $M \subseteq [-L, L]^n$. Es ist $[-L, L]$ kompakt wegen der Bolzano-Weierstrass-Eigenschaft (bekannt aus Analysis I): Jede Folge $(x_n) \subset [-L, L]$ besitzt eine konvergente Teilfolge in $[-L, L]$. Wegen $\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|$ für $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in [-L, L]^n$ ergibt sich die Kompaktheit des metrischen Raumes $([-L, L], \|\cdot\|_\infty)$ induktiv aus **??**.

Damit bleibt noch zu zeigen, dass eine abgeschlossene Menge M eines kompakten metrischen Raumes X ebenfalls kompakt ist: Denn ist $(x_n) \subset M \subseteq X$ eine Folge, so enthält sie wegen der Kompaktheit von X eine in X konvergente Teilfolge. Da M abgeschlossen ist, ist die Teilfolge auch in M konvergent.

Bemerkung
Im **??** werden wir zeigen, dass in endlich-dimensionalen normierten Räumen eine Teilmenge genau dann kompakt ist, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

II.2.5 Stetigkeit und Kompaktheit

Satz II.2.21
Sei $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine stetige Funktion von einem kompakten metrischen Raum X in einen metrischen Raum Y. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) $f(X)$ ist kompakt in Y.

(ii) Ist $Y = (\mathbb{R}, \|\cdot\|)$, so besitzt f ein Maximum und Minimum, d. h. es existieren zwei Punkte $x_1, x_2 \in X$ und für alle $x \in X$ gilt: $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$.

(iii) f ist gleichmäßig stetig.

(iv) Ist $f\colon X \to Y$ bijektiv, dann ist f^{-1} stetig.

Beweis:

(i) Beweis mit Überdeckungskompaktheit: Sei $\{G_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Wegen der Stetigkeit von f sind die Urbilder $f^{-1}(G_i)$ offener Mengen wieder offen. Damit ist $X \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i \in I} G_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(G_i)$. Die Kompaktheit von X impliziert, dass eine endliche Teilüberdeckung $(f^{-1}(G_{i_k}))_{k=1,\ldots,n}$ von X existiert. Es ist $X \subseteq f^{-1}(\bigcup_{k=1}^n (G_{i_k})) \Rightarrow f(X) \subseteq \bigcup_{k=1}^n G_{i_k}$, d. h. f(X) ist kompakt.

Beweis mit Folgenkompaktheit: Sei $(y_n) \in f(X)$ eine Folge. Wir wählen $x_n \in X\colon f(x_n) = y_n$. Da X kompakt ist, hat x_n eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ mit $x_{n_k} \to x \in X$. Die Stetigkeit von f liefert, $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(X)$, d. h. (y_n) besitzt in $f(X)$ eine konvergente Teilfolge. Damit ist $f(X)$ kompakt.

(ii) Sei $Y = \mathbb{R}$ und X kompakt. Nach dem ersten Punkt ist $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakt und nach **??** beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Damit folgt, dass $\sup f(X)$ und $\inf f(X)$ aus $f(X)$ sind.

(iii) Beweis mit Überdeckungskompaktheit: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren für alle $x \in X$ jeweils $\delta_\varepsilon(x) > 0$ mit $f(\mathring{B}(x, \delta_\varepsilon(x))) \subset \mathring{B}(f(x), \varepsilon/2)$. Das System $\{\mathring{B}(x, \frac{\delta_\varepsilon(x)}{2})\}$ der offenen Mengen bildet eine Überdeckung von X. Da X kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung. Die nennen wir $\{\mathring{B}(x_i, \frac{\delta_\varepsilon(x_i)}{2})\}$. Wir setzen $\delta_\varepsilon := 1/2 \min\{\delta_\varepsilon(x_1), \ldots, \delta_\varepsilon(x_n)\} > 0$. Seien $x, y \in X$ mit $d_X(x, y) < \delta_\varepsilon$. Dann existiert für x ein k_0 mit $1 \leqslant k_0 \leqslant n$ und $x \in \mathring{B}(x_{k_0}, \frac{\delta_\varepsilon(x_{k_0})}{2})$, d. h. $d_X(x_{k_0}, x) < \frac{\delta_\varepsilon(x_{k_0})}{2}$. Damit folgt, $d_X(y, x_{k_0}) \leqslant d_X(y, x) + d_X(x, x_{k_0}) < \delta_\varepsilon + 1/2\delta_\varepsilon(x_{k_0}) < \delta_\varepsilon(x_{k_0})$. Dies impliziert, dass der Abstand der Bilder $d_Y(f(x), f(y)) \leqslant d_Y(f(x), f(x_{k_0})) + d_Y(f(x_{k_0}), f(y)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Somit ist f gleichmäßig stetig.

Beweis mit Folgenkompaktheit: Dazu nehmen wir an, dass f stetig, aber *nicht* gleichmäßig stetig ist. Dies bedeutet, es existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ für alle $\delta > 0$ gibt es $x_\delta, y_\delta \in X$ mit $d_X(x_\delta, y_\delta) \leqslant \delta \wedge d_Y(f(x_\delta), f(y_\delta)) \geqslant \varepsilon_0$. Für $\delta_n := 1/n$ existieren $x_n, y_n \in X$: $d_X(x_n, y_n) \leqslant 1/n \wedge d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon_0$. Da X kompakt, existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k}) \subset (x_n)$: $x_{n_k} \to x_0 \in X$. Wegen $d_X(y_{n_k}, x_0) \leqslant d_X(y_{n_k}, x_{n_k}) + d_X(x_{n_k}, x_0) \leqslant 1/n_k + d_X(x_{n_k}, x_0) \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Die Stetigkeit von f in x_0 liefert, $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k})$. Dies ist ein Widerspruch zu $d_Y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geqslant \varepsilon_0 > 0$.)

(iv) Nach dem ersten Punkt ist $f(X) = Y$ kompakt. Jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ eines kompakten metrischen Raumes X ist ebenfalls kompakt (siehe Beweis zu **??**). Dann ist $f(A)$ kompakt und nach **??** abgeschlossen. Damit ist f^{-1} stetig, da das Urbild abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.

II.3 Lineare Teilräume

Definition II.3.1 (Linearer Teilraum)
Sei X ein Vektorraum. Eine beliebige Teilmenge $M \subseteq X$ heißt genau dann **linearer Teilraum** von X, wenn für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und für alle $x, y \in M$ gilt: $\alpha x + \beta y \in M$.

Definition II.3.2 (Lineare Hülle)
Sei $M \subseteq X$ eine nichtleere Menge. Dann heißt

$$\bigcap_{\substack{N \supseteq M \\ N \text{ Teilraum } X}} N$$

die **lineare Hülle** von M.

Lemma II.3.3
Sei X ein Vektorraum und $M \subseteq X$ nichtleer. Dann gilt:

$$\operatorname{span}(M) = \bigcap_{\substack{N \supseteq M \\ N \text{ Teilraum von } X}} N =: A$$

Beweis:
Trivialerweise gilt $A \subseteq \operatorname{span}(M)$. Umgekehrt ist $M \subseteq A \Rightarrow \operatorname{span}(M) \subseteq \operatorname{span}(A) = A$, denn A ist ein linearer Raum. ■

Satz II.3.4
Sei $M \subseteq X$ ein Teilraum eines normierten Raumes X. Dann ist auch $\operatorname{cl}(M)$ ein Teilraum von X.

Beweis:
Seien x und y aus dem Abschluss von M sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann ist zu zeigen: $\alpha x + \beta y \in \operatorname{cl}(M)$. Nach dem **??** existieren Folgen $(x_n), (y_n) \subseteq M$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x, y_n \xrightarrow{n\to\infty} y$. Nun folgt, $\alpha x_n + \beta y_n \in M$ und für $n \to \infty$ haben wir dann $\alpha x_n + \beta y_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha x + \beta y \in \operatorname{cl}(M)$. ■

Definition II.3.5 (Abgeschlossene Hülle)
Sei M eine nichtleere Teilmenge eines normierten Raumes X. Die Menge A, definiert als der Durchschnitt aller $N \supseteq M$, wobei N ein abgeschlossener Teilraum von X ist, heißt **abgeschlossene lineare Hülle** von M.

Bemerkung
Die abgeschlossene lineare Hülle von M ist der kleinste abgeschlossene Teilraum, der M enthält, d. h. für einen abgeschlossenen linearen Teilraum $B \supseteq M \Rightarrow A \subseteq B$.

Lemma II.3.6
Sei M eine nichtleere Teilmenge eines normierten Raumes X. Dann gilt:

$$\operatorname{cl}(\operatorname{span}(M)) = \bigcap_{\substack{N \supseteq M \\ N \text{ abgeschlossener Teilraum von } X}} N$$

Beweis:
Nach **??** ist die Teilmengenbeziehung $\supseteq$ klar. Für die Gegenrichtung sei N ein beliebiger abgeschlossener Teilraum mit $N \supseteq M \Rightarrow \operatorname{span}(M) \subseteq N \Rightarrow \operatorname{cl}(\operatorname{span}(M)) \subseteq \operatorname{cl}(N) = N$, denn N ist abgeschlossen. ■

Definition II.3.7 (Separabler Raum)
Ein normierter Raum heißt genau dann **separabel**, wenn eine abzählbare Teilmenge $M \subseteq X$ mit $\operatorname{cl}(M) = X$ existiert.

Satz II.3.8
Ein normierter Raum X ist genau dann separabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge $M \subseteq X$ mit $\operatorname{cl}(\operatorname{span}(M)) = X$ gibt.

Beweis:
Die Richtung „$\Rightarrow$" ist klar. Denn nach Definition existiert eine abzählbare Menge $M \subseteq X\colon\ \operatorname{cl}(M) = X \Rightarrow X = \operatorname{cl}(M) \subseteq \operatorname{cl}(\operatorname{span}(M)) \subseteq X$.

Die Rückrichtung zeigen wir für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Es ist klar, dass die Menge $B \coloneqq \{\, \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n \mid \beta_i \in \mathbb{Q}, x_i \in M, n \in$
abzählbar ist. Wir zeigen nun, $\operatorname{cl}(B) = X$. Seien dazu $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wegen $\operatorname{cl}(\operatorname{span}(M)) =$

X existieren $x_1, \dots, x_m \in M, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$: $\|x - (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m)\| \leqslant \varepsilon/2$. Da $\mathrm{cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ folgt für $k = 1, \dots, m$: Es existieren $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{Q}$ mit $|\alpha_k - \beta_k| < \frac{\varepsilon}{2n(1+\|x_k\|)}$ für alle $m \in \{1, 2, \dots, n\}$. Somit ist $\beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m \in B$ und $\|x - (\beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m)\| \leqslant \|x - (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m)\| + \|(\alpha_1 - \beta_1) x_1 + \dots + (\alpha_m - \beta_m) x_m\| < \varepsilon/2 + |\alpha_1 - \beta_1| \|x_1\| + \dots + |\alpha_m - \beta_m| \|x_m\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, d. h. $\mathrm{cl}(B) = X$. Der Beweis geht für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ analog. ∎

Definition II.3.9 (Direkte Summe)
Seien $M, N \subseteq X$ Teilräume. Dann heißt X genau dann die **direkte Summe** von M und N, wenn $X = M + N$ und $M \cap N = \{0\}$.

Wir schreiben für die direkte Summe: $M \oplus N$.

Jedes Element $x \in X$ lässt sich eindeutig in der Form $x = y + z$ mit $y \in M$ und $z \in N$. darstellen.

Satz II.3.10
Sei $M \subseteq X$ ein abgeschlossener linearer Teilraum eines normierten Raumes X. Dann wird durch

$$\|[x]\| := \inf\{\, \|x - y\| \mid y \in M \,\}$$

eine Norm auf X/M definiert. Ist X ein Banachraum, so ist X/M ebenfalls ein Banachraum. Es ist:

$$[x] + [y] := [x + y] \qquad [x] := \{\, x + y \mid y \in M \,\}$$
$$\alpha[x] := [\alpha \cdot x] \qquad X/M := \{\, [x] \mid x \in X \,\}$$

Beweis:

1. Schritt $\|[\cdot]\|$ ist wohldefiniert, d. h. unabhängig von Repräsentanten. Denn für $[x_1] = [x_2] \Rightarrow \exists y \in M\colon x_1 = x_2 + y \Rightarrow \|[x_1]\| = \|[x_2 + y]\| = \inf\{\, \|x_2 + y - z\| \mid z \in M \,\} = \inf\{\, \|x_2 - (z - y)\| \mid z \in M \,\} = \inf\{\, \|x_2 - w\| \mid w \in M \,\} = \|[x_2]\|$.

2. Schritt Wir müssen nun die Normeigenschaften prüfen: Es ist klar, dass $\|[x]\| \geqslant 0$ gilt. Es ist $\|[x]\| = 0 \Leftrightarrow \inf\{\, \|x - y\| \mid y \in M \,\} = 0 \Rightarrow x \in M$. Denn M ist abgeschlossen und somit gibt es eine Folge, die gegen x konvergiert. Insgesamt ergibt sich $[x] = 0$.

   Die Homogenität lässt sich wie folgt zeigen: Sei $x \in X, \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Dann gilt, $\|\alpha[x]\| = \inf\{\, \|\alpha x - y\| \mid y \in M \,\} = \inf\{\, |\alpha| \|x - 1/\alpha\, y\| \mid y \in M \,\} = |\alpha| \inf\{\, \|x - 1/\alpha\, y\| \mid y \in M \,\} = |\alpha| \cdot \|[x]\|$.

Zuletzt ist noch die Dreiecksungleichung zu zeigen:

$$\begin{aligned}
\|[x]+[y]\| &= \|[x+y]\| = \inf\{\, \|x+y-z\| \mid z \in M \,\} \\
&= \inf\{\, \|x+y-z_1-z_2\| \mid z_1, z_2 \in M \,\} \\
&= \inf\{\, \|(x-z_1)+(y-z_2)\| \mid z_1, z_2 \in M \,\} \\
&\leqslant \inf\{\, \|(x-z_1)\| + \|y-z_2)\| \mid z_1, z_2 \in M \,\} \\
&= \inf\{\, \|x-z_1\| \mid z_1 \in M \,\} + \inf\{\, \|y-z_2\| \mid z_2 \in M \,\} \\
&= \|[x]\| + \|[y]\|
\end{aligned}$$

3\. Schritt Mit der Anwendung des Vollständigkeitskriteriums (**??**) gilt, dass X/M vollständig ist, wenn auch X vollständig ist. Sei $([x_n]) \subseteq X/M$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|[x_n]\| < \infty$. Es ist zu zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} [x_n] \in X/M$. Es ist $y_n \in [x_n]\colon \|y_n\| \leqslant \|[x_1]\| + 2^{-n}$. Somit ist $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|[x_n]\| + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$. Der Ausdruck ist kleiner als unendlich und es folgt, $y := \sum_{n=1}^{\infty} y_n \in X$, da X ein Banachraum ist. Weiter ist $\|[y] - \sum_{k=1}^{n} [x_k]\| = \|[y] - \sum_{k=1}^{n} [y_k]\| = \|[y - \sum_{k=1}^{n} y_k]\| \leqslant \|y - \sum_{k=1}^{n} y_k\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Nach der Definition von $\|\cdot\|$ gilt immer $\|[x]\| \leqslant \|x\|$. Insgesamt folgt somit $\sum_{k=1}^{\infty} [x_k] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [x_k] = [y] \in X/M$. Nach dem Vollständigkeitskriterium ist damit X/M vollständig.

Definition II.3.11 (Quotientenabbildung)
Sei X ein Vektorraum und $M \subseteq X$ ein linearer Teilraum. Die Abbildung $Q_M\colon X \to X/M$ definiert durch $Q_M x := [x]$ heißt **Quotientenabbildung**.

Satz II.3.12
Sei X ein normierter Raum und $M \subseteq X$ ein abgeschlossener linearer Teilraum. Dann gilt für die Quotientenabbildung $Q_M\colon X \to X/M$ mit $Q_M(\mathring{B}_X) = \mathring{B}_{X/M}$ (offene Einheitskugeln).

Beweis:
„$\subseteq$“ Sei $x \in \mathring{B}_X$. Dann gilt $\|Q_M x\| = \|[x]\| \leqslant \|x\| < 1 \Rightarrow Q_M x \in \mathring{B}_{X/M}$.

„$\supseteq$“ Sei $[x] \in \mathring{B}_{X/M}$, d. h. $\|[x]\| = \inf\{\, \|x-z\| \mid z \in M \,\} < 1$. Dann existiert $z_0 \in M\colon \|x - z_0\| < 1$. Wir setzen $y := x - z_0$. Dann ist $y \in \mathring{B}_X$ und es gilt, $Q_M y = [y] = [x - z_0] = [x] - \underbrace{[z_0]}_{=0} = [x]$, d. h. $Q_M \mathring{B}_X \supseteq \mathring{B}_{X/M}$.

Satz II.3.13
Sei X ein Vektorraum, $M, N \subseteq X$ lineare Teilräume und $X = M \oplus N$. Dann existiert eine lineare Bijektion von N auf X nach M, also N auf X/M.

Beweis:
Sei $\varphi\colon N \to X/M$ definiert durch $\varphi(x) := [x]$ mit $x \in N$. Dann ist $\varphi := Q_M|_M$ ein Isomorphismus von N auf X/M.

Wir zeigen zuerst die Linearität: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $x, y \in N$ gilt $\varphi(\alpha x + \beta y) = [\alpha x + \beta y] = [\alpha x] + [\beta y] = \alpha[x] + \beta[y] = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$.

Die Abbildung ist injektiv: Seien $x, y \in N$ und für $\varphi(x) = \varphi(y)$ folgt, $0 = \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y) = [x - y] = ([x] - [y])$. Damit ist $x - y \in M$. Da N ein Teilraum ist, sind für $x, y \in N$ auch $x - y \in N$. Dies ergibt nun, $x - y \in M \cap N = \{0\} \Rightarrow x = y$. Also ist φ injektiv.

Nun verbleibt noch die Surjektivität zu zeigen: Sei $[x] \in X/M$. Nach der Definition von $[x]$ ist $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in M_1$ und $x_2 \in M$. Es folgt, dass $[x] = Q_M(x) = Q_M(x_1 + x_2) = [x_1 + x_2] = [x_1] + [x_2] = \underbrace{Q_M(x_1)}_{=0} + Q_M(x_2) = Q_M(x_2) = \varphi(x_2)$. ■

Definition II.3.14 (Codimension)
Sei $M \subseteq X$ ein linearer Teilraum eines Vektorraums. Dann wird die **Codimension** von M durch $\operatorname{codim} M := \dim X/M$.

II.4 Das Lemma von Riesz

Satz II.4.1 (Rieszsches Lemma)

(a) Sei X ein normierter Raum und $M \subsetneq X$ ein abgeschlossener linearer Teilraum. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_\varepsilon \in X$ mit $\|x_\varepsilon\| = 1$ und $\|Q_M x_\varepsilon\| = \inf\{\, \|x_\varepsilon - z\| \mid z \in M \,\} \geqslant 1 - \varepsilon$.

(b) Ist $\dim X < \infty$, dann existiert ein $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ und $\|Q_M x\| = 1$.

Beweis:

(a) Sei o. B. d. A. $0 < \varepsilon < 1$ und $x \in X$. Es ist $\|Q_M x\| = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{cl}(M) = M$. Für $x \in X \setminus M$ gilt $\|Q_M x\| > 0$. Wir wählen jetzt $\rho > \|Q_M x\|$ mit $\frac{\|Q_M x\|}{\rho} = 1 - \varepsilon$. Dann existiert $z_\varepsilon \in M$: $\|x - z_\varepsilon\| \leqslant \rho$. Setzen $x_\varepsilon := \frac{x - z_\varepsilon}{\|x - z_\varepsilon\|}$. Diese Definition ist sinnvoll, da $x - z_\varepsilon \neq 0$. Es ist $\|x_\varepsilon\| = 1$ und für beliebige $z \in M$ folgt, $\|x_\varepsilon - z\| = \|\frac{x - z_\varepsilon}{\|x - z_\varepsilon\|} - z\| = \frac{1}{\|x - z_\varepsilon\|}\|(x - z_\varepsilon) - \|x - z_\varepsilon\| z\| = \frac{1}{\|x - z_\varepsilon\|}\|x - (\underbrace{z_\varepsilon + \|x - z_\varepsilon\| z}_{\in M})\| \geqslant \frac{1}{\rho}\|Q_M x\| = 1 - \varepsilon$. Also folgt, $\|x_\varepsilon - z\| \geqslant 1 - \varepsilon$ für alle $z \in M$ und weiter ist $\|Q_M x_\varepsilon\| \geqslant 1 - \varepsilon$.

(b) Sei $\dim X < \infty$. Für $\varepsilon_n = 1/n$ existiert nach dem obigen Punkt ein $x_n \in X$: $\|x_n\| = 1$ und $\|Q_M x_n\| \geqslant 1 - \varepsilon_n = 1 - 1/n$. Die Einheitssphäre $\partial B_X := \{\, x \in X \mid \|x\| = 1 \,\}$ ist abgeschlossen und da $\dim X < \infty$ ist sie kompakt. Damit existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k}) \subset (x_n)$: $x_{n_k} \to x \in \partial B$. Für alle $z \in M$ gilt, $\|x_{n_k} - z\| \geqslant 1 - 1/n_k \xrightarrow{k\to\infty} \|x - z\| \geqslant 1$. Also ist $\|Q_M x\| \geqslant 1 \Rightarrow \|Q_M x\| = 1$.

Wie lässt sich der Satz geometrisch interpretieren? Dazu betrachten wir $X = [\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2]$.

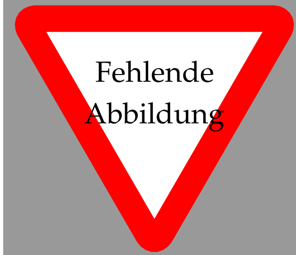

Bild mit Einheitskreis und eingebettetem Dreieck

Bemerkung
Die Aussage (a) im **??** gilt im Allgemeinen *nicht* für $\varepsilon = 0$. Es existiert ein normierter Raum X und abgeschlossener linearer Teilraum $M \subsetneq X$, sodass für beliebige $x \in \partial B$: $\|Q_M x\| < 1$.

Ein Beispiel hierfür ist $X := \{\, x \in C[0,1] \mid x(1) = 0 \,\}$ und $M := \left\{\, x \in X \;\middle|\; \int_0^1 x(t)\, dt = 0 \,\right\}$.

II.5 Endlich-dimensionale normierte Räume

Satz II.5.1
Sei X ein normierter Raum mit präkompakter Einheitskugel B_X. Dann ist notwendigerweise X endlich-dimensional.

Beweis:
Wir nehmen an, dass X unendlich-dimensional ist, also $\dim X = \infty$. Weiter wählen wir ein $x_1 \in X$ mit $\|x_1\| = 1$ und setzen $M_1 := \operatorname{span}\{x_1\}$. Es gilt, M_1 ist abgeschlossen mit $\dim M_1 = 1$ und $M_1 \subsetneq X$. Nach **??** (Lemma von Riesz) existiert ein x_2 auf der Einheitssphäre mit $\|x_1 - x_2\| \geqslant 1/2 = \varepsilon$. Es sei $M_2 := \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$ und es ist $M_2 \subsetneq X$. Somit existiert ein $x_3 \in X$: $\|x_3\| = 1$ und $\|x_3 - x_1\| \geqslant \varepsilon$ und $\|x_2 - x_1\| \geqslant \varepsilon$. Wir erhalten nun induktiv eine Folge $(x_i) \subset X$ mit $\|x_i\| = 1$ und $\|x_i - x_j\| \geqslant \varepsilon$ für $i \neq j$. Damit folgt, dass B_X *nicht* präkompakt ist, da (x_i) keine Cauchy-Teilfolge enthält. Dies steht aber im Widerspruch zur Annahme. Denn wäre B_X präkompakt, so existieren $s_1, \dots, s_m$ mit $B_X \subset \bigcup_{i=1}^m (\{s_i\} + 1/8 B_X)$. Es würde eine Kugel $\{s_i\} + 1/8 B_X$ existieren, die mindestens zwei Elemente a, b der Folge (x_i) enthält. Dies impliziert, $1/2 \leqslant \|a - b\| \leqslant \|a - s_i\| + \|s_i - b\| \leqslant 1/8 + 1/8 = 1/4$ ↯ ∎

Lemma II.5.2
Sei X ein normierter Raum. Dann ist die Sphäre $\partial B_X := \{\, x \in X \mid \|x\| = 1 \,\}$ abgeschlossen.

Beweis:
Sei $(x_n) \subset \partial B_X$: $x_n \to x \in X \Rightarrow x \in \partial B_X$ wegen $|\|x\| - 1| = |\|x\| - \|x_n\|| \leqslant \|x - x_n\| \to 0$. ∎

Definition II.5.3 (Äquivalente Normierungen)
Zwei Normierungen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ heißen genau dann **äquivalent** auf X, wenn für alle $x \in X$ ein m und M größer als Null existieren für die gilt: $m\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant M\|x\|_1$.

Satz II.5.4
Sämtliche Normierungen eines endlich-dimensionalen Vektorraumes sind äquivalent.

Beweis:
Sei $\dim X = n$. Wir wählen eine Basis $\{x_1, \dots, x_n\}$ in X. Für $x \in X$ gilt dann die eindeutige Darstellung $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Nun setzen wir $\|x\|_0 := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|$. Dann ist $\|\cdot\|_0$ auf X.

Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf X. Wir zeigen, dass $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_0$ äquivalent sind. Es ist $\|x\| = \|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\| \leqslant \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|x_i\| \leqslant n \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\| \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i| = M \|x\|_0$.

Nun zeigen wir, dass ein $m > 0$ für alle $x \in X$ mit $m\|x\|_0 \leqslant \|x\|$ existiert. Sei $\partial B_{\ell_\infty^n} = \{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \mid \|\lambda\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i| = 1 \}$ die Einheitssphäre von $\ell_\infty^n = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Sie ist kompakt, da sie beschränkt und abgeschlossen ist (nach **??**). Wir definieren die Funktion $f \colon \partial B_{\ell_\infty^n} \to \mathbb{R}$ durch $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\|$. Es gilt, dass f auf der kompakten Menge ∂B stetig ist. Dies sieht man durch Abschätzung: Für $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ ist:

$$\begin{aligned}
\|f(\lambda) - f(\mu)\| &= |\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\| - \|\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\|| \leqslant \|\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) x_i\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n |\lambda_i - \mu_i| \|x_i\| \leqslant n \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\| \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i - \mu_i| \\
&= n \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \|\lambda - \mu\|_\infty
\end{aligned}$$

Die Abschätzung zeigt, dass f sogar gleichmäßig stetig auf ℓ_∞^n ist. Ferner ist $f(\lambda)$ positiv auf der Einheitssphäre $\partial B_{\ell_\infty^n}$. Denn $\{x_1, \dots, x_n\}$ ist eine Basis. Nach **??** nimmt eine stetige, reellwertige Funktion auf einer kompakten Menge ihr Minimum (und auch das Maximum) an. Damit existiert ein $\lambda_0 \in \partial B_{\ell_\infty^n}$ mit $0 < m := f(\lambda_0) \leqslant f(\lambda) = \|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\| = \|x\|$ für beliebige λ. Für ein beliebiges $0 \neq x \in X$ gilt, $m \leqslant \|\frac{x}{\|x\|_0}\| \Rightarrow m\|x\|_0 \leqslant \|x\|$ für alle $x \in X$.

Damit ist die Norm $\|\cdot\|$ äquivalent zu $\|\cdot\|_0$. Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei beliebige Normen auf X, so sind sie beide äquivalent zu $\|\cdot\|_0$. Also sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent. ∎

Satz II.5.5
Für einen endlich-dimensionalen normierten Raum X gelten:

(i) $K \subset X$ ist genau dann kompakt, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.

(ii) X ist ein Banachraum.

Beweis:
Sei $\dim X = N$ und wählen eine Basis $\{x_1, \dots, x_N\}$ in X. Dann ist $X = \{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{K}$
Nach **??** ist die Norm $\|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |\lambda_i|$ äquivalent zur ursprünglichen Norm. Damit gelten folgende Abschätzungen: $m\|\lambda\|_\infty = m\|x\|_o \leqslant \|x\| \leqslant M\|x\|_o = M\|\lambda\|_\infty$. Sei nun $T \colon \ell_\infty^n \to X$ eine Abbildung, definiert durch $T\lambda := \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i$ für $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \ell_\infty^n$.

Sie ist bijektiv,da $\{x_1, \dots, x_N\}$ eine Basis von X ist. Weiter ist sie linear, d. h. für $\lambda, \mu \in \ell_\infty^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt, $T(\alpha\lambda + \beta\mu) = \alpha T\lambda + \beta T\mu$. Für T und T^{-1} gelten folgende Ungleichungen:

$$m\|\lambda\|_\infty \leqslant \|T\lambda\| \leqslant M\|\lambda\|_\infty \qquad \lambda \in \ell_\infty^n \tag{II.2}$$

$$m\|T^{-1}x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant M\|T^{-1}x\|_\infty \qquad x \in X \tag{II.3}$$

Wegen der Linearität von T und T^{-1} hat man die Abschätzungen

$$m\|\lambda - \mu\|_\infty \leqslant \|T(\lambda - \mu)\| = \|T\lambda - T\mu\| \leqslant M\|\lambda - \mu\|_\infty \tag{II.4}$$

$$m\|T^{-1}x - T^{-1}y\| = m\|T^{-1}(x-y)\|\psi\|x - y\| \leqslant M\|T^{-1}x - T^{-1}y\| \tag{II.5}$$

Insbesondere sind die Abbildungen T und T^{-1} stetig (sogar gleichmäßig stetig).

Die Aussagen des Satzes folgen sofort aus den Eigenschaften von ℓ_∞^n[1] sowie den Eigenschaften von T und T^{-1}. Nach **??** gilt, $K \subset X$ ist genau dann kompakt, wenn $T^{-1}(K)$ kompakt ist. Ferner hat man: $K \subset X$ ist genau dann abgeschlossen und beschränkt, wenn $T^{-1}(K)$ abgeschlossen und beschränkt ist. Die Aussage K beschränkt $\Leftrightarrow$ $T^{-1}(K)$ beschränkt, folgt mit **??**. Die Aussage K abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $T^{-1}(K)$ abgeschlossen, folgt aus der Tatsache, dass Urbilder abgeschlossener Mengen von stetigen Funktionen wieder abgeschlossen sind.

(i) K kompakt $\Leftrightarrow$ $T^{-1}(K)$ kompakt. Nach **??** ist das genau dann der Fall, wenn $T^{-1}(K)$ abgeschlossen und beschränkt ist. Also genau dann, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist.

(ii) Sei $(x_n) \subset X$ eine Cauchyfolge. Dann folgt mit **??**, $(T^{-1}x_n)$ ist Cauchyfolge in ℓ_∞^n. Da ℓ_∞^n existiert ein $y \in \ell_\infty^n$ mit $T^{-1}x_n \to y \Rightarrow T(T^{-1}x_n) = x_n \to Ty \in X$, d. h. X ist vollständig.

Satz II.5.6
Für einen normierten Raum sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\dim X < \infty$

(ii) Die abgeschlossene Einheitskugel B_X ist kompakt.

(iii) Die Bolzano-Weierstrass-Eigenschaft, d. h. jede beschränkte Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis:
(i)$\Rightarrow$(ii) **??**

[1] Wir wissen, dass ℓ_∞^n ein Banachraum ist und eine Menge $K \subset \ell_\infty^n$ ist genau dann kompakt, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist.

(ii)⇒(iii) Folgenkompaktheit in metrischen Räumen: Es ist B_X kompakt. Dann folgt, rB_X ist kompakt für $r > 0$ wegen **??**. Sei (x_n) beschränkt, d. h. es existiert ein $r > 0$ mit $\|x_n\| \leqslant r$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $(x_n) \subset rB_X$. Da rB_X kompakt, existiert eine konvergente Teilfolge von (x_n).

(iii)⇒(i) Wir führen den Beweis durch Kontradiktion: Sei $\dim X = \infty$. Nach **??** ist dann die Einheitskugel B_X nicht präkompakt und dait auch nicht kompakt, d. h. es gibt eine beschränkte Folge, die keine konvergente Teilfolge enthält.

III Funktionale und Operatoren

III.1 Grundbegriffe

Definition III.1.1 (Lineare Abbildung, Funktional)

(i) Eine Abbildung $T\colon X \to Y$ von einem Vektorraum X in einen Vektorraum Y heißt genau dann **lineare Abbildung** oder **linearer Operator**, wenn für alle $x, y \in X$ und für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y$$

(ii) Ist $Y = (\mathbb{K}, |\cdot|)$, so heißen die linearen Operatoren $T\colon X \to Y$ **lineare Funktionale**. Man schreibt häufig Tx statt $T(x)$.

(iii) Mit $N(T) := \ker(T) := \{\, x \in X \mid Tx = 0 \,\}$ wird der **Nullraum** oder **Kern** und mit $R(T) := \{\, Tx \mid x \in X \,\}$ wird der **Bildraum** von T bezeichnet.

Definition III.1.2 (Beschränkter Operator)
Ein linearer Operator $T\colon X \to Y$ von einem normierten Raum X in einen normierten Raum Y heißt genau dann **beschränkt**, wenn $\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\| < \infty$ ist.

Bemerkung
Warnung: T ist nicht auf X beschränkt, wenn $T \neq 0$.

Satz III.1.3
Seien X, Y normierte Räume und $T\colon X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:

(i) Es existiert eine Konstante $c \geqslant 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt: $\|Tx\| \leqslant c\|x\|$.

(ii) T ist gleichmäßig stetig.

(iii) T ist in $x = 0$ stetig.

(iv) $\|T\| := \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\| < \infty$

Beweis:
(i)⇒(ii) $\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leqslant c\|x-y\|$. Somit ist T gleichmäßig stetig.

(ii)⇒(iii) klar

(iii)⇒(iv) Sei $\varepsilon = 1$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $\|x - 0\| \leqslant \delta \Rightarrow \|Tx - T0\| \leqslant 1$. Für x mit $\|x\| \leqslant 1$ gilt dann, dass $\|\delta x\| \leqslant \delta$ und somit $\|T(\delta x)\| \leqslant 1 \Rightarrow \|\delta T x\| \leqslant 1 \Rightarrow \|Tx\| \leqslant {}^{1}/_{\delta} \Rightarrow \|T\| := \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\| < \infty$.

(iv)⇒(i) Für $x \in X$ ist $\|\frac{x}{\|x\|}\| = 1$. Also gilt, dass $\|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leqslant \|T\|\|\frac{x}{\|x\|}\| = \|T\| \Rightarrow \|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\| = 1$ für alle $x \in X$.

Bemerkung
Die Äquivalenz von Stetigkeit und Beschränktheit eines linearen Operators ist fundamental in der Theorie der linearen Operatoren.

Definition III.1.4 (Operatorennorm)
Sei $T\colon X \to Y$ ein beschränkter linearer Operator von einem normierten Raum X in einen normierten Raum Y. Die Zahl $\|T\|$ definiert durch $\|T\| \coloneqq \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\|$ heißt **Norm** des Operators T oder kurz **Operatorennorm**.

III.2 Der Raum $\mathcal{L}(X, Y)$ der beschränkten linearen Operatoren

Definition III.2.1
Seien $S, T\colon X \to Y$ lineare Operatoren von einem Vektorraum X in einen Vektorraum Y und $\alpha \in \mathbb{K}$ eine Zahl. Dann sind $S + T, \alpha T\colon X \to Y$ durch $(S + T)x \coloneqq Sx + Tx$ bzw. $(\alpha T)x \coloneqq \alpha(Tx)$ für $x \in X$ definiert. Es sind $S + T$ und αT lineare Operatoren.

Der Raum $\mathcal{L}_0(X, Y) \coloneqq \{\, T\colon X \to Y \mid T \text{ linear} \,\}$ ist wieder ein Vektorraum.

Seien $\mathcal{L}(X, Y) \coloneqq \{\, T\colon X \to Y \mid T \text{ beschränkter linearer Operator} \,\}$ sowie X und Y normierte Räume.

Satz III.2.2
(i) Die Menge $\mathcal{L}(X, Y)$ wird mit $\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\|$ zu einem normierten Raum.

(ii) Ist der Bildraum ein Banachraum, so ist $\mathcal{L}(X, Y)$ mit der Operatorennorm ebenfalls ein Banachraum.

Beweis:

(i) 1.Schritt Wir zeigen, dass $\mathcal{L}(X, Y)$ ein Vektorraum ist: Wenn $S, T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ sind, dann muss $\alpha S + \beta T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Es ist $\|(\alpha S + \beta T)x\| = \|\alpha Sx + \beta Tx\| \leqslant \|\alpha Sx\| + \|\beta Tx\| \leqslant |\alpha|\|S\|\|x\| + |\beta|\|T\|\|x\| \leqslant (|\alpha|\|S\| + |\beta|\|T\|)\|x\|$ Damit folgt die Behauptung.

2.Schritt Es ist $\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\|$ eine Norm auf $\mathcal{L}(X, Y)$. Immer gilt $\|T\| \geqslant 0$ und wenn $\|T\| = 0 \Rightarrow \|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|$. Also folgt für alle $x \in X$, dass $\|Tx\| = 0$ und dann ist auch $Tx = 0$. Somit ist T der Nulloperator.

Es ist $\|\alpha Tx\| = |\alpha|\|Tx\| \Rightarrow \|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$.

Die dritte Eigenschaft kommt von obigen Schritt für $\alpha = \beta = 1$.

(ii) Sei Y ein Banachraum. Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{L}(X, Y)$ ein Banachraum ist. Dazu sei $(T_n) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ eine Cauchyfolge, d. h. für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ und für alle $m, n \geqslant n_\varepsilon$ gilt $\|T_m - T_n\| \leqslant \varepsilon$. Also gilt für alle $x \in X$ und für alle $m, n \geqslant n_\varepsilon$ ist:

$$\|T_m x - T_n x\| = \|(T_m - T_n)x\| \leqslant \|T_m - T_n\|\|x\| \leqslant \varepsilon\|x\| \tag{III.1}$$

d. h. $T_n) \subset Y$ ist eine Cauchyfolge in Y. Da Y ein Banachraum, konvergiert $(T_n x)$ für jedes x. Nun definieren wir einen Operator $T\colon X \to Y$ durch folgenden Ansatz: $Tx := \lim T_n x$ für $x \in X$.

Wir müssen zeigen, dass $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $\lim T_n = T$. Für $x, y \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt: $T(\alpha x + \beta y) = \lim T_n(\alpha x + \beta y) = \lim(\alpha T_n x + \beta T_n y) = \alpha \lim T_n x + \beta \lim T_n y = \alpha T x + \beta T y$. Damit ist T linear.

Für $x \in X$ gilt die Aussage, dass $Tx - T_n x = \lim T_m x - T_n x = \lim(T_m x - T_n x) \Rightarrow \|Tx - T_n x\| = \lim\|T_m x - T_n x\|$. Wegen **??** folgt, dass $\|Tx - T_n x\| \leqslant \varepsilon\|x\|$ für $x \in X$. Diese Aussage impliziert, dass $\|T - T_n\| \leqslant \varepsilon$ für $n \geqslant n_\varepsilon$ und $\|Tx\| = \|T_{n_\varepsilon} x + (T - T_{n_\varepsilon})x\| \leqslant \|T_{n_\varepsilon} x\| + \|(T - T_{n_\varepsilon})x\| \leqslant \|T_{n_\varepsilon}\|\|x\| + \|T - T_{n_\varepsilon}\|\|x\| = (\|T_{n_\varepsilon}\| + \varepsilon)\|x\|$. Also ist $\|T\| \leqslant \|T_{n_\varepsilon}\| + \varepsilon < \infty$, d. h. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $\lim T_n = T$. Damit ist (T_n) eine konvergente Folge in $\mathcal{L}(X, Y)$. Also ist $\mathcal{L}(X, Y)$ ein Banachraum.

Definition III.2.3 (Produktoperator, Komposition)
Seien $S\colon X \to Y$ und $T\colon Y \to Z$ lineare Operatoren zwischen den Vektorräumen X und Y bzw. Y und Z. Der **Produktoperator** (oder **Komposition**) $TS\colon X \to Z$ ist definiert durch $(TS)x = T(Sx)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "TS"] \arrow[dr, "S"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

Lemma III.2.4
Für normierte Räume X, Y, Z und Operatoren $S \in \mathcal{L}(X, Y), T \in \mathcal{L}(Y, Z)$ gilt, $TS \in \mathcal{L}(X, Z)$ und $\|TS\| \leqslant \|T\|\|S\|$.

Beweis:
Die Linearität von TS ist klar. Für die Beschränktheit sei $x \in X$ und es gilt $\|(TS)x\| = \|T(Sx)\| \leqslant \|T\|\|Sx\| \leqslant \|T\|\|S\|\|x\|$ und $\|TS\| \leqslant \|T\|\|S\|$. ■

Bemerkung
Für $Y := [\mathbb{K}, |\cdot|]$ heißen die linearen Operatoren beschränkte lineare **Funktionale**. Wir schreiben $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ **dualer Banachraum** von X. Der duale Raum X' ist stets ein Banachraum.

Definition III.2.5 (Invertierbarer Operator)
Seien X, Y Vektorräume und $T\colon X \to Y$ ein linearer Operator. Dann heißt T **invertierbar**, wenn eine Abbildung $S\colon Y \to X$ mit $ST = I_X, TS = I_Y$ existiert. Dabei sind I_X und I_Y die identischen Operatoren auf X bzw. Y.

Satz III.2.6
Seien X, Y Vektorräume. Dann gelten:

(i) Sei T linear und invertierbar. Dann ist $S\colon Y \to X$ mit $TS = I_Y, ST = I_X$ linear und eindeutig, also $T^{-1} = S$.

(ii) Der lineare Operator $T\colon X \to Y$ ist genau dann invertierbar, wenn $N(T) = \{0\}$ und $R(T) = Y$ ist.

Beweis:

(i) Seien $R, S\colon Y \to X$ mit $RT = ST = I_X$ und $TR = TS = I_Y$. Dann folgt, $R = RI_Y = RTS = I_X S = S$, d. h. S ist eindeutig bestimmt.

Seien $y_1, y_2 \in Y$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Wir wollen zeigen, dass S linear ist: Wir haben $S(\alpha y_1 + \beta y_2) = S(\alpha TS y_1 + \beta TS y_2) = ST(\alpha S y_1 + \beta S y_2) = \alpha S y_1 + \beta S y_2$.

(ii) Für die Richtung „$\Rightarrow$“ sei T linear und invertierbar und T^{-1} das lineare Inverse von T, d. h. $I_X = T^{-1}T$ und $I_Y = TT^{-1}$. Es folgt: $Tx = 0 \Rightarrow x = T^{-1}Tx = T^{-1}(0) = 0 \Rightarrow N(T) = \{0\}$. Weiter ist zu zeigen, dass $R(T) = Y$. Sei dazu $y \in Y$ und es ist $y = T(T^{-1}y) = Tx \Rightarrow y \in R(T)$.

Für die Rückrichtung sei T linear, $N(T) = \{0\}, R(T) = Y$. T ist injektiv, denn $Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow T(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$. Die Surjektivität folgt, da T^{-1} existiert und linear ist.

Satz III.2.7
Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$ mit $\|T\| < 1$. Dann ist $I - T$ invertierbar und es gilt

$$(I - T)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} T^k \in \mathcal{L}(X)$$

Beweis:
Nach **??** gilt $\|T^k\| \leqslant \|T\|^k$ und wegen $\|T\| < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k$ mit $T^0 := I$. Da $\mathcal{L}(X)$ ein Banachraum ist, ist auch $S := \sum_{k=0}^{\infty} T^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} T^k$ konvergent in $\mathcal{L}(X)$. Wir setzen $S := \sum_{k=0}^{\infty} T^k \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt für $S_n = \sum_{k=0}^{n} T^k$ im Grenzprozess $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathcal{L}(X)$. Ferner ist $(I - T)S_n = (I - T)(I + \sum_{k=1}^{n} T^k) = I - T^{n+1} = S_n(I - T) \xrightarrow{n\to\infty} I$. Denn wir haben $\|T^{n+1}\| \leqslant \|T\|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{\|T\|<1} 0$. Also strebt auch T^{n+1} gegen 0. Insgesamt folgt $(I - T)S = (I - T)\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(I - T)S_n = I$. Analog ist auch $S(I - T) = I$. Also haben wir $S = (I - T)^{-1} \Rightarrow (I - T)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} T^k \in \mathcal{L}(X)$. ■

Bemerkung
Die Reihe $I + \sum_{k=1}^{\infty} T^k$ heißt **Neumannsche Reihe**.

III.3 Kanonische Faktorisierung von Operatoren

Seien X, Y normierte Vektorräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist der Nullraum $N(T)$ von T abgeschlossen. Denn sei $(x_n) \subset N(T) \subset X$ eine in X konvergente Folge mit $x_n \to x \in X$. Die Stetigkeit von T impliziert: $0 = Tx_n \to 0 = \lim Tx_n = T \lim x_n = Tx$. Also $x \in N(T)$.

Satz III.3.1 (Faktorisierungssatz)
Seien X, Y normierte Räume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann lässt sich T wie folgt faktorisieren:

$$T = J_{R(T)} T_0 Q_{N(T)} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q_{N(T)}"'] & Y \\ X/_{N(T)} \arrow[r, "T_0"] & R(T) \arrow[u, "J_{R(T)}"'] \end{tikzcd}$$

Dabei ist $Q_{N(T)} \colon X \to X/_{N(T)}$ die Quotientenabbildung, $J_{R(T)} \colon R(T) \to Y$ die identische Einbettung mit $J_{R(T)}(y) := y$ für $y \in R(T)$ und $T_0 \colon X/_{N(T)} \to R(T)$ definiert durch $T_0[x] = Tx$. Für die Normen der Operatoren gilt: $\|J_{R(T)}\| \leqslant 1, \|T_0\| = \|T\|, \|Q_{N(T)}\| \leqslant 1$. Der Operator T_0 ist bijektiv von $X/_{N(T)}$ auf $R(T)$, falls $T \neq 0$.

Beweis:
Es gilt: $J_{R(T)} T_0 Q_{N(T)} x = J_{R(T)} T_0 [x] = J_{R(T)} Tx = Tx \Rightarrow J_{R(T)} T_0 Q_{N(T)} = T$ für alle $x \in X$. Damit folgt, dass $T = J_{R(T)} T_0 Q_{N(T)}$. Es ist $\|Q_{N(T)}\| \leqslant 1$. Denn: $\|Q_{N(T)} x\| = \|[x]\| = \inf\{\, \|x - z\| \mid z \in N(T) \,\} \leqslant \|x\| \Rightarrow \|Q_{N(T)}\| \leqslant 1$. Im Fall $T \neq 0$ ist $N(T) \subsetneq X$. Daher existiert ein $x \in X$ mit $[x] \neq 0$ und somit folgt: $\|[x]\| = \|Q_{N(T)} x\| = \|Q_{N(T)}(x - z)\| \leqslant \|Q_{N(T)}\| \|x - z\|$ für $z \in N(T)$. Es folgt weiter, $0 < \|[x]\| \leqslant \|Q_{N(T)}\| \|[x]\| \Rightarrow 1 \leqslant Q_{N(T)}$. Also ist $\|Q_{N(T)}\| = 1$.

Nun ist zu zeigen, dass T_0 wohldefiniert ist: Aus $[x_1] = [x_2]$ folgt, $T_0[x_1] = T_0[x_2]$. Denn $[x_1] = [x_2] \Rightarrow [x_1 - x_2] = [x_1] - [x_2] = 0 \Rightarrow [x_1 - x_2] \in N(T)$. Also existiert ein $z \in N(T)$ mit $x_1 = x_2 + z$ und es folgt, $T_0[x_1] = Tx_1 = T(x_2 + z) = Tx_2 = T_0[x_2]$.

Es ist klar, dass T_0 linear ist. Im folgenden zeigen wir, dass $\|T_0\| = \|T\|$ ist. Für $x \in X$ und $z \in N(T)$ gilt: $\|T_0[x]\| = \|Tx\| = \|T(x - z)\| \leqslant \|T\| \|x - z\| \Rightarrow \|T_0[x]\| \leqslant \|T\| \|[x]\| \Rightarrow \|T_0\| \leqslant \|T\|$. Andererseits ist $\|T\| = \|J_{R(T)} T_0 Q_{N(T)}\| \leqslant \underbrace{\|J_{R(T)}\|}_{\leqslant 1} \|T_0\| \underbrace{\|Q_{N(T)}\|}_{\leqslant 1} \leqslant \|T_0\|$. Also folgt insgesamt, dass $\|T_0\| = \|T\|$.

Zuletzt ist noch nachzuweisen, dass T_0 bijektiv ist. Nach der Definition von T_0 ist $T_0(X/_{N(T)}) = R(T)$. Sei $T_0[x] = 0$ und es folgt, $Tx = 0$. Also ist $x \in N(T)$ und damit ist $[x] = 0$. Nach **??** ist somit T_0 bijektiv. ∎

Bemerkung
Ist $T \neq 0$, so ist $\|Q_{N(T)}\| = 1, \|J_{R(T)}\| = 1$.

Bemerkung
Der Operator $T_0^{-1}: R(T) \to X/_{N(T)}$ ist nicht stetig, denn es ist kein beschränkter linearer Operator.

Eine Verallgemeinerung von Quotientenabbildung und natürlicher Einbettung sind die folgenden Definitionen:

Definition III.3.2 (Metrische Surjektion und Injektion)
Seien X, Y normierte Räume.

1. Eine Abbildung $Q \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt genau dann **metrische Surjektion**, wenn $Q(\mathring{B}_X) = \mathring{B}_Y$.
2. Eine Abbildung $J \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt genau dann **metrische Injektion**, wenn für alle $x \in X$ gilt, $\|Jx\| = \|x\|$.

Gilt zusätzlich $J_X = Y$, so heißt J auch **Isometrie** oder **metrischer Isomorphismus** von X auf Y.

Satz III.3.3
Für eine metrische Surjektion $Q \in \mathcal{L}(X, Y)$ gilt die Faktorisierung:

$$Q = T_0 Q_{N(Q)} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "Q_{N(Q)}"'] & Y \\ X/_{N(Q)} \arrow[ur, "T_0"'] & \end{tikzcd}$$

Dabei ist T_0 eine Isometrie, d. h. $X/_{N(Q)}$ kann isometrisch mit Y identifiziert werden.

Beweis:
Nach dem Faktorisierungssatz (**??**) ist T_0 durch $T_0[x] = Qx$ für $x \in X$ definiert. Somit ist $\|T_0[x]\| = \|Qx\| = \|Q(x-z)\| \leqslant \|Q\|\|x-z\| \leqslant \|x-z\|$ für $z \in Q$. Also ist $\|T_0[x]\| \leqslant \|x-z\| \leqslant \|[x]\|$ für $x \in X$.

Für die Umkehrung sei $\varepsilon > 0$ und für alle $y \in Y$ existiert ein $x_\varepsilon \in X$ mit $y = Qx_\varepsilon$ und $\|x_\varepsilon\| \leqslant (1+\varepsilon)\|y\|$. Denn für $y \neq 0$ ist $\frac{1}{1+\varepsilon}\frac{y}{\|y\|} \in \mathring{B}_Y$. Somit existiert $\mathring{x}_\varepsilon \in \mathring{B}_X$ mit $Q\mathring{x}_\varepsilon = \frac{1}{1+\varepsilon}\frac{y}{\|y\|}$ und wir setzen $x_\varepsilon = (1+\varepsilon)\|y\|\mathring{x}_\varepsilon$. Also folgt, $Qx_\varepsilon = (1+\varepsilon)\|y\|Q\mathring{x}_\varepsilon = (1+\varepsilon)\|y\|\frac{y}{\|y\|}\frac{1}{1+\varepsilon} = y \Rightarrow \|x_\varepsilon\| \leqslant (1+\varepsilon)\|y\|\|\mathring{x}_\varepsilon\| < (1+\varepsilon)\|y\|$.

Nun sei $T_0[x] = Qx = y$ gegeben. Dann existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $x_\varepsilon \in X$ mit $Qx_\varepsilon = y = Qx = T_0[x]$ und $\|x_\varepsilon\| \leqslant (1+\varepsilon)\|y\| = (1+\varepsilon)\|Qx\| = (1+\varepsilon)\|T_0[x]\|$ und wegen $Qx_\varepsilon = Qx$ gilt, $(x_\varepsilon - x) \in N(Q)$. Somit $x_\varepsilon \in [x]$. Damit folgt, $\|[x]\| = \|[x_\varepsilon]\| \leqslant \|x_\varepsilon\|$ und $\|[x]\| \leqslant \|x_\varepsilon\| \leqslant (1+\varepsilon)\|T_0[x]\| \Rightarrow \|[x]\| \leqslant \|T_0[x]\|$. Wegen $\varepsilon \to 0$ folgt also: $\|[x]\| \leqslant \|T_0[x]\|$.
Insgesamt erhalten wir die Isometrie $T_0 \in \mathcal{L}(X/_{N(Q)}, Y)$ mit $\|T_0[x]\| = \|[x]\|$. ∎

Bemerkung
Dies rechtfertigt auch oft die Bezeichnung Quotientenabbildung für Q, da Q bis auf Isometrie mit $Q_{N(Q)}$ der natürlichen Quotientenabbildung identifiziert werden kann.

III.4 Fortsetzung beschränkter linearer Funktionale und Hahn-Banach-Theorem

Die Prinzipien der Fortsetzung von beschränkten linearen Operatoren und Funktionalen haben grundlegende Bedeutung in der Funktionalanalysis.

Definition III.4.1 (Fortsetzung, Einschränkung)
Seien X, Y normierte Räume und $M \subseteq X$ ein linearer Teilraum. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt genau dann **Fortsetzung** von $T_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ von M auf X, wenn $T_0 = T \cdot J_M$, wobei $J_M(x) := x$ für $x \in M$. Weiter heißt T_0 genau dann **Einschränkung** von $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ von X auf M, wenn $T_0 = TJ_M$.

Bemerkung
Wir schreiben $T|_M := TJ_M$.

Satz III.4.2
Sei $M \subseteq X$ ein linearer Teilraum eines normierten Raumes X und Y ein Banachraum. Dann existiert für $T_0 \in \mathcal{L}(M, Y)$ genau eine Fortsetzung $T \in \mathcal{L}(\mathrm{cl}(M), Y)$ von T_0 von $\mathrm{cl}(M)$ auf X mit $\|T\| = \|T_0\|$.

BEWEIS:

1. Schritt Wir zeigen in diesem Schritt die Existenz einer Fortsetzung von T_0: Für $x \in \mathrm{cl}(M)$ ist der Operator $T\colon \mathrm{cl}(M) \to Y$ durch $Tx := \lim_{n\to\infty} T_0 x_n$ definiert, wobei $(x_n) \subset M$ mit $x_n \to x \in \mathrm{cl}(M)$.

T ist wohldefiniert, denn für $x \in \mathrm{cl}(M)$ existiert $(x_n) \subset M$ mit $x_n \to x$ und $\|T_0 x_n - T_0 x_m\| = \|T_0(x_n - x_m)\| \leqslant \|T_0\|\|x_n - x_m\|$. Damit ist $T_0(x_n)$ eine Cauchyfolge, da x_n Cauchyfolge. Wegen der Vollständigkeit von Y existiert $\lim_{n\to\infty} T_0(x_n)$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} Tx_n$ unabhängig von $(x_n) \subset M$ mit $x_n \to x$ ist. Dazu sei $(y_n) \subset Y$ eine weitere Folge mit $y_n \to x$. Es ist wieder $T_0 y_n$ in Y konvergent. Wir kommen damit zu der Abschätzung: $\|T_0 x_n - T_0 y_n\| = \|T_0(x_n - y_n)\| \leqslant \|T_0\|\|x_n - y_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Also ist $\lim_{n\to\infty} T_0 x_n = \lim_{n\to\infty} T_0 y_n$.

T ist eine Fortsetzung von T_0. Denn für $x \in M$ und $x_n = x$ gilt: $Tx = \lim_{n\to\infty} T_0 x_n = \lim_{n\to\infty} T_0 x = T_0 x$.

Die Linearität von T ergibt sich wie folgt: Seien $x, y \in \mathrm{cl}(M)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann existieren Folgen $(x_n), (y_n) \subset M$ mit $x_n \to x$ und $y_n \to y$. Also folgt wegen $(\alpha x_n + \beta y_n) \subset M$, dass $T(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} T(\alpha x_n + \beta y_n) = \lim_{n\to\infty}(\alpha T_0 x_n + \beta T_0 y_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} T_0 x_n + \beta \lim_{n\to\infty} T_0 y_n = \alpha Tx + \beta Ty$.

Schließlich haben wir noch die Beschränktheit zu zeigen: Dazu seien $x, y \in \mathrm{cl}(M), (x_n) \subset M$ und $x_n \to x$. Dann strebt $\|x_n\|$ gegen $\|x\|$ und es ist auch $\|T_0 x_n\| \to \|Tx\|$ wegen $\lim_{n\to\infty} T_0 x_n = Tx$. Insgesamt haben wir also: $\|Tx\| = \lim_{n\to\infty}\|T_0 x_n\| \leqslant \lim_{n\to\infty}\|T_0\|\|x_n\| = \|T_0\|\|x\| \Rightarrow \|T\| \leqslant \|T_0\|$. Aber es gilt auch $\|T_0\| \leqslant \|T\|$, denn $\|T_0\| = \sup_{x\in M, \|x\|\leqslant 1}\|T_0 x\| = \sup_{x\in M, \|x\|\leqslant 1}\|Tx\| \leqslant \sup_{x\in \mathrm{cl}(M), \|x\|\leqslant 1}\|Tx\| = \|T\|$.

2. Schritt Im zweiten Schritt müssen wir noch die Eindeutigkeit zeigen. Dazu nehmen wir an, dass $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{cl}(M), Y)$ ebenfalls eine Fortsetzung von T_0 ist. Dann gilt für $x \in \mathrm{cl}(M)$ und $(x_n) \subset M$ mit $x_n \to x$: $\widetilde{T}x = \lim_{n\to\infty} \widetilde{T}x_n = \lim_{n\to\infty} T_0 x_n = Tx \Rightarrow \widetilde{T} = T$.

Fehlt hier noch etwas oder war das das Ende der beiden VL?

Jedoch hat man im Fall von beschränkten Funktionalen immer eine Fortsetzung von $M \subset X$ auf den ganzen Raum X unter Beibehaltung der Norm. Das ist das berühmte Hahn-Banach-Theorem. Zur Vorbereitung des Beweises müssen wir ein Lemma benutzen:

Lemma III.4.3
Sei X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

(i) Sei $l\colon X \to \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional, d. h. $l(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 l(x_1) + \alpha_2(l(x_2))$ für $x_1, x_2 \in X, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Setzt man $\widetilde{l}(x) \coloneqq l(x) - il(ix)$ für $x \in X$, so ist $\widetilde{l}\colon X \to \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional. Es ist $l = \Re\widetilde{l}$.

(ii) Ist h ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional, $l = \Re h$ und $\widetilde{l}$ wie in (i) definiert, so ist l ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional und $\widetilde{l} = h$.

(iii) Ist X ein normierter Raum und $l\colon X \to \mathbb{C}$ ein beschränktes $\mathbb{C}$-lineares Funktional, so ist $\|l\| = \|\Re l\|$.

Beweis:

(i) Es ist zu zeigen, dass $\widetilde{l}$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional ist. Zuerst zeigen wir die Linearität: $\widetilde{l}(x_1 + x_2) = l(x_1 + x_2) - il(i(x_1 + x_2)) = l(x_1) + l(x_2) - i(l(ix_1) + l(ix_2)) = l(x_1) - il(ix_1) + l(x_2) - il(ix_2) = \widetilde{l}(x_1) + \widetilde{l}(x_2)$.

Sei zunächst $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in X$. Dann hat man, $\widetilde{l}(\alpha x) = l(\alpha x) - il(\alpha ix) = \alpha l(x) - \alpha il(ix) = \alpha(l(x) - il(ix)) = \alpha\widetilde{l}(x)$. Sei nun $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Dann haben wir: $\widetilde{l}(\alpha x) = \widetilde{l}(\alpha_1 x + \alpha_2 ix) = \widetilde{l}(\alpha_1 x) + \widetilde{l}(\alpha_2 ix) = \alpha_1\widetilde{l}(x) + \alpha_2\widetilde{l}(ix)$. Nun müsen wir noch zeigen, dass $\widetilde{l}(ix) = i\widetilde{l}(x)$: $\widetilde{l}(ix) = l(ix) - il(i(ix)) = l(ix) - il(-x) = l(ix) + il(x) = i(l(x) - i(lix)) = i\widetilde{l}(x)$. Damit folgt, $\widetilde{l}(\alpha x) = \alpha_1\widetilde{l}(x) + \alpha_2 i\widetilde{l}(x) = \alpha\widetilde{l}(x)$.

(ii) Sei $h\colon X \to \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional, $l = \Re h$ und $\widetilde{l}$ wie oben. Wir zeigen zuerst, dass l $\mathbb{R}$-linear ist: Für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ und $x_1, x_2 \in X$ gilt, $l(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \Re h(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \Re(\alpha_1 h(x_1) + \alpha_2 h(x_2)) = \alpha_1 \Re h(x_1) + \alpha_2 \Re h(x_2) = \alpha_1 l(x_1) + \alpha_2 l(x_2) \Rightarrow l$ ist $\mathbb{R}$-linear.

Nun müssen wir noch zeigen, dass $h = \widetilde{l}$: Wegen $\Im z = -\Re iz$ für $z \in \mathbb{C}$ folgt, $h(x) = \Re h(x) + i\Im h(x) = \Re h(x) + i(-\Re ih(x)) = \Re h(x) - i\Re h(ix) = l(x) - il(ix) = \widetilde{l}(x)$.

(iii) Wegen $|\Re l(x)| \leqslant |l(x)| \leqslant \|l\|\|x\| \Rightarrow \|\Re l\| \leqslant \|l\|$. Für die Umkehrung gilt: Für $x \in X$ existiert ein $\lambda \coloneqq \lambda_x \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ und $l(x) = \lambda|l(x)|$ (Polardarstellung einer komplexen Zahl). Also gilt, dass $|l(x)| = \lambda^{-1} l(x) = \underbrace{l(\lambda^{-1}x)}_{\in\mathbb{R}} = \Re l(\lambda^{-1}x) \leqslant$

$|\mathfrak{R}l(\lambda^{-1}x)| \leqslant \|\mathfrak{R}l\|\|\lambda^{-1}x\| = \|\mathfrak{R}l\||\lambda^{-1}|\|x\| = \|\mathfrak{R}l\|\|x\| \Rightarrow \|l\| \leqslant \|\mathfrak{R}l\|$. Damit folgt die Behauptung.

Bemerkung
Durch den Ansatz $\varphi(l) := \mathfrak{R}l$ wird eine bijektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung von dem Vektorraum der $\mathbb{C}$-linearen Funktionale auf den Vektorraum der $\mathbb{R}$-linearen Funktionale definiert. Im normierten Fall ist φ isometrisch, d. h. $\|\varphi(l)\| = \|l\|$.

Beweis:
Die Abbildung φ ist $\mathbb{R}$-linear ist klar wegen der Definition. Der Rest ist auch klar. Die Injektivität ergibt sich durch: $\varphi(l)(x) = \mathfrak{R}l(x) + i\mathfrak{I}l(x)) = \mathfrak{R}l(x) - i\mathfrak{R}(il(x)) = \mathfrak{R}l(x) - i\mathfrak{R}l(ix) = 0$ für alle $x \in X \Rightarrow l = 0$. Im normierten Fall ist $\|\varphi(l)\| = \|l\|$. ∎

Satz III.4.4 (Hahn-Banach-Theorem)
Sei $M \subset X$ ein linearer Teilraum eines normierten Raumes X. Dann kann jedes beschränkte lineare Funktional auf M normgleich auf X fortgesetzt werden, d. h. $\forall a \in M'\, \exists b \in X'\colon b|_M = a$ und $\|b\| = \|a\|$.

Beweis:
1. Schritt Sei X zunächst ein reell normierter Raum und o. B. d. A. die Norm von a gleich 1 ($\|a\| = 1$). Wir zeigen, eine Fortsetzung von a für den Fall $\dim X/_M = 1$.

1. Fall Sei $x_0 \in X/_M$ fixiert. Dann lässt sich jedes $x \in X$ eindeutig als $x = u + \lambda x_0$ für $u \in M$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ darstellen, d. h. $x \in \operatorname{span}(M \cup \{x_0\})$. Sei $r \in \mathbb{R}$ ein freier Parameter. Der Ansatz $L_r(x) := a(u) + \lambda r$ mit $x = u + \lambda x_0$ definiert eine lineare Abbildung von X in $\mathbb{R}$, die a fortsetzt. Denn für $x_1 = u_1 + \lambda_1 x_0, x_2 = u_2 + \lambda_2 x_0 \in X$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} L_r(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= L_r(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + (\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2)x_0) \\ &= a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) + (\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2)r \\ &= \alpha_1 a(u_1) + \alpha_2 a(u_2) + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 \\ &= \alpha_1(a(u_1) + \lambda_1 r) + \alpha_2(a(u_2) + \lambda_2 r) \\ &= \alpha_1 L_r(x_1) + \alpha_2 L_r(x_2) \end{aligned}$$

Durch passende Wahl von r zeigen wir, dass $L_r \in X'$ mit $\|L_r\| \leqslant 1$. Damit ist die Norm von L_r gleich 1. Es gilt:

(III.2)
$$\begin{aligned} \|L_r\| \leqslant 1 &\Leftrightarrow |L_r(u + \lambda x_0)| \leqslant \|u + \lambda x_0\| \\ &\Leftrightarrow L_r(u + \lambda x_0) = a(u) + \lambda r \leqslant \|u + \lambda x_0\|) \qquad \forall u \in M\, \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Denn $|L_r(x)| \leqslant \|x\|$ für alle $x \in X$. Also folgt, $L_r(x) \leqslant \|x\|$ und $-L_r(x) = L_r(-x) \leqslant \|x\|$. Insgesamt folgt, $|L_r(x)| = \max\{L_r(x), -L_r(x)\} \leqslant \|x\|$.

Nach der Voraussetzung gilt, **??** für $\lambda = 0$ und alle $u \in M$. Denn $L_r(u) = a(u) \leqslant \|a\|\|u\| = \|u\|$. Sei $\lambda > 0$. Dann gilt **??** genau dann, wenn $\lambda r \leqslant \|u + \lambda x_0\| - a(u) \Leftrightarrow r \leqslant \|u/\lambda + x_0\| - a(u/\lambda) \Leftrightarrow r \leqslant \inf\{\, \|v + x_0\| - a(v) \mid v \in$ für $v = u/\lambda$. Für $\lambda < 0$ ist **??** äquivalent zu $\lambda r = (-\lambda)(-r) \leqslant \|u + \lambda x_0\| - a(u) \Leftrightarrow -r \leqslant \|\frac{u}{-\lambda} - x_0\| - a(\frac{u}{-\lambda}) \Leftrightarrow r \geqslant a(\frac{u}{-\lambda}) - \|\frac{u}{-\lambda} - x_0\|$ für alle $u \in M$. Das ist gleichbedeutend mit $r \geqslant \sup\{\, a(w) - \|w - x_0\| \mid w \in M \,\}$.

Daher existiert ein $r \in \mathbb{R}$ mit $\|L_r\| \leqslant 1$ genau dann, wenn das r über dem Supremum und unter dem Infimum von oben liegt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a(w) + a(v) \leqslant \|w - x_0\| + \|v + x_0\|$ für beliebige $v, w \in M$. Diese Abschätzung besteht aber, da aus $\|a\| = 1$ folgt: $a(w) + a(v) = a(w + v) \leqslant \|a\|\|w + v\| = \|w + v\| \leqslant \|w - x_0\| + \|v + x_0\|$.

2\. Fall Sei $\dim X/_M > 1$. Hier wenden wir das Zornsche Lemma an: Sei $(M, \prec)$ eine nichtleere, halbgeordnete Menge, in der jede Kette[1] $\mathcal{K} \in M$ eine obere Schranke besitzt. Dann besitzt M ein maximales Element, d. h. $m_0 \in M$ mit $m_0 \prec m \Rightarrow m = m_0$ für alle $m \in M$.

Wir betrachten nun die Klasse $\mathcal{M}$ aller Fortsetzungen von a. Das ist $\mathcal{M} := \{(N, L_N) \colon N \subset X$ linearer Teilraum mit $M \subset N \wedge L_N \in N' \colon \|L_N\| \leqslant 1, L_N|_M = a\}$ mit der Halbordnung. Die Halbordnung ist definiert durch $(N_1, L_{N_1}) \prec (N_2, L_{N_2})$ genau dann, wenn $N_1 \subseteq N_2$ und $L_{N_2}|_{N_1} = L_{N_1}$. Es ist $(M, a) \in \mathcal{M}$. Ist $((N_i, L_{N_i})_{i \in I})$ eine Kette, so ist (U, L_U) mit $U := \bigcup_{i \in I} N_i$ und $L_U \bigcup L_{N_i}(x)$ für $x \in N_i$ eine obere Schranke. Dabei ist L_U wohldefiniert, da (N_i, L_{N_i}) total geordnet und linear ist.

Die Wohldefiniertheit sieht man wie folgt: Ist $x \in N_i, N_j$. Wegen der Totalordnung folgt o. B. d. A., $N_j \supset N_i$. Dann ist L_{N_j} Fortsetzung von L_{N_i} und somit $L_{N_j}(x) = L_{N_i}(x) = L_U(x)$.

Die Linearität ergibt sich aus: Sei $x, y \in U$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann existieren N_i, N_j mit $x \in N_i$ und $y \in N_j$. Wegen der Totalordnung folgt, $N_j \supset N_i$ und $\alpha x + \beta y \in N_j$. Also hat man $L_U(\alpha x + \beta y) = L_{N_j}(\alpha x + \beta y) = \alpha L_{N_j}(x) + \beta L_{N_j}(y) = \alpha L_U(x) + \beta L_U(y)$.

Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales Element $m_0 : = (X_0, L_{X_0})$ von $\mathcal{M}$. Wäre $X_0 \neq X$, so gäbe es nach dem ersten Fall oben eine echte Majorante von m_0 und m_0 könnte nicht maximal sein. Damit folgt, $X_0 = X$ und $b := L_{X_0}$ löst das Fortsetzungsproblem im reellen Fall.

2\. Schritt Sei X ein komplexer normierter Raum und $M \subset X$ ein linearer Teilraum. Weiter sei $a \in M'$ mit $\|a\| = 1$. Wir betrachten jetzt ein reelles lineares Funktional: $\Re a \colon M \to \mathbb{R}$. Nach dem obigen zweiten Fall gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare

[1] total geordnete Teilmenge

Fortsetzung $l\colon X \to \mathbb{R}$ von $\Re a$ mit

$$\|l\| = \|\Re a\| \tag{III.3}$$

Nach **??** Punkt (i) ist $b \coloneqq \widetilde{l}\colon X \to \mathbb{C}$, wobei $\widetilde{l} \coloneqq l(x) - il(ix)$ für alle $x \in X$, ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional. Dabei gilt: $\Re b = l$. Jetzt zeigen wir, dass b eine Fortsetzung von a ist. Denn für $x \in M$ gilt folgendes: $b(x) = l(x) - il(ix) = \Re a(x) - i\Re a(ix) = \Re a(x) - i\Re(ia(x)) = \Re a(x) + i\Im a(x) = a(x)$. Für die Norm gilt $\|b\| = \|a\|$. Denn mit **??** Punkt (iii) und **??** ist $\|b\| = \|\Re b\| = \|l\| = \|\Re a\| = \|a\|$.

Bemerkung
Die Fortsetzung ist im Allgemeinen nicht eindeutig.

Folgerung III.4.5
(Hahn-Banach)

(i) Sei $X \supsetneq \{0\}$ ein normierter Raum und $0 \neq x \in X$. Dann existiert ein Funktional $a \in X'$ mit der Eigenschaft $\|a\| = 1$ und $a(x) = \|x\|$.

(ii) Trennung von Punkten: Seien $x_1, x_2 \in X$ mit der Eigenschaft $x_1 \neq x_2$ Elemente eines normierten Raumes $X \supsetneq \{0\}$. Dann existiert ein Funktional $a \in X'$ mit $\|a\| = 1$ und $a(x_1) \neq a(x_2)$.

(iii) Sei $M \subset X$ ein linearer Teilraum eines normierten Raumes X. Ist $x \in X$ mit der Eigenschaft, $d(x, M) > 0$, so existiert ein Funktional $a \in X'$ mit $a|_M = 0$ und $a(x) = d(x, M)$. Weiter ist $\|a\| = 1$.

Insbesondere gilt: Ist $\mathrm{cl}(M) \subsetneq X$, dann existiert ein Funktional $a \in X'$ mit $a \neq 0$ und $a|_{\mathrm{cl}(M)} = 0$.

Beweis:

(i) Sei $M = \mathrm{span}\{x\}$. Wir definieren $a_0\colon M \to \mathbb{K}$ durch $a_0(\alpha x) \coloneqq \alpha\|x\|$ für $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist a_0 linear (klar) und für die Norm gilt: $\|a_0(\alpha x)\| = |\alpha|\|x\| = \|\alpha x\|$. Also folgt, dass $\sup_{\|y\|\leqslant 1}|a_0(y)| = \sup_{\|y\|\leqslant 1}\|y\| = 1$.

Nach **??** existiert eine Fortsetzung $a \in X'$ von a_0 mit $\|a\| = 1$ und $a(x) = a_0(x) = \|x\|$.

(ii) Ist Anwendung des obigen Punktes auf $x_1 - x_2 = x$.

(iii) Wenn der Abstand von x zu M positiv ist, dann ist x nicht im Abschluss von M. Denn wenn es so wäre, dann gäbe es eine Folge, die gegen das x konvergiert. Wir betrachten nun den Quotientenraum $X/_{\mathrm{cl}(M)}$[2]. Dann existiert nach dem ersten Punkt der Folgerung ein Funktional $a_0 \in (X/_{\mathrm{cl}(M)})'$ mit $\|a_0\| = 1$ und $a_0([x]) = \|[x]\| = d(x, \mathrm{cl}(M)) = d(x, M) > 0$.

[2] Ist wieder ein normierter Raum.

Wir setzen $a \coloneqq a_0 \circ Q_{\mathrm{cl}(M)}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "Q_{\mathrm{cl}(M)}"'] & \mathbb{K} \\ X/_{\mathrm{cl}(M)} \arrow[ur, "a_0"'] & \end{tikzcd}$$

Dann gilt: $a(x) = a_0(Q_{\mathrm{cl}(M)}x) = a_0([x]) = d(x, M)$ und weiter $a(M) = a_0([0]) = 0$. Für die Norm ergibt sich: $\|a\| = \sup_{x \in \mathring{B}_X} |a(x)| = \sup_{[x] \in \mathring{B}_{X/_{\mathrm{cl}(M)}}} |a([x])| = \|a_0\|$ nach Definition.

Korollar III.4.6
Sei $M \subseteq X$ ein linearer Teilraum eines normierten Raumes X. Dann sind äquivalent:

(i) $\mathrm{cl}(M) = X$, also ist M dicht in X.

(ii) Für $a \in X'$ mit $a(M) = 0$ ist $a = 0$ auf X.

Beweis:
(i)⇒(ii) Sei $a \in X'$ mit $a|_M = 0$. Nach **??** existiert eine eindeutige Fortsetzung $\widetilde{a}\colon \mathrm{cl}(M) = X \to \mathbb{K}$ mit $\|\widetilde{a}\| = \|a|_M\| = 0$. Somit ist $\widetilde{a} = 0$. Da $\widetilde{a}$ eindeutig bestimmt ist, ist $a = \widetilde{a} = 0$.

(ii)⇒(i) Der Beweis erfolgt durch Kontraposition. Wir nehmen an, dass $\mathrm{cl}(M) \neq X$. Nach der **??** Punkt 3 existiert ein Funktional $a \in X'$ mit $a \neq 0$ und $a|_M = 0$. Damit haben wir gezeigt, dass aus Nicht-(i) Nicht-(ii) folgt und der Beweis ist erbracht.

Lemma III.4.7
Sei (X, d) ein separabler metrischer Raum. Dann ist jeder Teilraum $Y \subset X$ separabel, d. h. es existiert eine abzählbare Menge $B \subset Y$ mit $\mathrm{cl}(B) = Y$.

Beweis:
1. Schritt Sei $A \subset X$ eine abzählbare dichte Menge in X, d. h. $\mathrm{cl}(A) = X$. Dann sind die Mengen $\mathcal{A}_1 \coloneqq \left\{ \mathring{B}_r(a) \;\middle|\; a \in A \wedge 0 < r \in \mathbb{Q} \right\}$ und $\mathcal{A}_2 \coloneqq \left\{ \mathring{B}_r(a) \in \mathcal{A}_1 \;\middle|\; \mathring{B}_r(a) \cap Y \neq \emptyset \right\}$ abzählbar. Für $\mathring{B}_r(a) \in \mathcal{A}_2$ wählt man ein $b \in \mathring{B}_r(a) \cap Y$ und erhält eine abzählbare Menge $B \subset Y$.

2. Schritt Es gilt, $\mathrm{cl}(B) = Y$. Denn geben wir uns ein $\varepsilon > 0$ und ein $y \in Y$ vor. Dann existiert ein $a \in A$ mit der Eigenschaft $d(y, a) < \varepsilon/3$ und eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit $\varepsilon/3 < r\varepsilon/2$. Nun ist $y \in \mathring{B}_r(a)$. Also existiert ein $b \in B$ mit der Eigenschaft, $d(y, b) \leqslant d(y, a) + d(a, b) < \varepsilon/3 + r < \varepsilon$, d. h. B ist dicht in Y.

Satz III.4.8
Sei X ein normierter Raum. Dann gilt: Ist X' separabel, so ist auch X separabel.

Beweis:
Nach **??** ist mit X' auch die Einheitssphäre $\partial B_{X'} := \{ a \in X' \mid \|a\| = 1 \}$ separabel. Sei also $\{a_1, \ldots\} \subset \partial B_{X'}$ dicht in $\partial B_{X'}$. Wähle nun $x_i \in \partial B_{X'}$ mit $|a_i(x_i)| \geqslant 1/2$. Wir setzen $M := \operatorname{span}\{x_1, x_2, \ldots\}$ und zeigen $\operatorname{cl}(M) = X$. Sei $a \in X'$ mit $a|_M = 0$. Wir zeigen jetzt die Aussage (ii) von **??**. Dazu nehmen wir an, dass ein $a \in X'$ mit der Eigenschaft $a|_M = 0$ und $a \neq 0$ existiert. Dann existiert ein $a_{i_0} \in \partial B_{X'}$ mit $\|a - a_{i_0}\| \leqslant 1/4$ wegen der Separabilität von $\partial B_{X'}$ und es gilt die Abschätzung: $1/2 \leqslant |a_{i_0}(x_{i_0})| = |a_{i_0}(x_{i_0}) - a(x_{i_0})| = |(a_{i_0} - a)(x_{i_0})| \leqslant \|a - a_{i_0}\| \|x_{i_0}\| = \|a - a_{i_0}\| \leqslant 1/4$ ↯ Also muss $a = 0$ sein. Nach **??** gilt $\operatorname{cl}(M) = \operatorname{cl}(\operatorname{span}\{x_1, \ldots\}) = X$ und nach **??** ist dann X separabel. ■

Bemerkung
Die Umkehrung von **??** gilt i. A. nicht. Denn sei beispielsweise $X = \ell_1$ ist separabel. Aber $X' = \ell_1' = \ell_\infty$ ist *nicht* separabel.

III.5 Dualer Operator

Definition III.5.1 (Dualer Operator)
Seien X und Y normierte Räume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Der **duale Operator** $T' \colon X' \to Y'$ von T ist definiert durch:

$$T'a := a \circ T \qquad a \in Y'$$

In der Literatur wird T' auch oft als adjungierter Operator bezeichnet. Der Begriff des dualen Operators ist unerlässlich im Studium von beschränkten linearen Operatoren.

Satz III.5.2
Seien X und Y normierte Räume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ und $\|T'\| = \|T\|$.

Beweis:

1. Es ist T' linear, denn für $a, b \in Y', \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt: $T'(\alpha a + \beta b) = (\alpha a + \beta b) \circ T = \alpha(a \circ T) + \beta(b \circ T) = \alpha T'a + \beta T'b$.
2. Es ist T' beschränkt, denn $\|T'a\| = \|a \circ T\| \leqslant \|a\| \|T\|$ für $a \in Y'$. Also folgt, $\|T'\| \leqslant \|T\| < \infty$.
3. Schließlich ist auch $\|T'\| = \|T\|$. Denn nach Definition der Operatorennorm folgt die Gleichheit: $\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\|$ Wegen des **??** (Satz von Hahn-Banach) folgt, $\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \sup_{\|a\| \leqslant 1} |aT(x)|$. Wir können die Suprema umgruppieren und die Definitionen anwenden: $\sup_{\|a\| \leqslant 1} \sup_{\|x\| \leqslant 1} |aT(x)| = \sup_{\|a\| \leqslant 1} \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(T'a)(x)| = \sup_{\|a\| \leqslant 1} \|T'a\| = \|T'\|$.

Satz III.5.3
Seien X und Y normierte Räume. Dann gelten folgende algebraische Eigenschaften dualer Operatoren:

(i) $\forall S, T \in \mathcal{L}(X, Y)\,\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\colon (\alpha S + \beta T)' = \alpha S' + \beta T'$

(ii) $\forall S \in \mathcal{L}(X, Y)\,\forall T \in \mathcal{L}(Y, Z)\colon (TS)' = S'T'$

(iii) $I_X' = I_{X'}$ für den identischen Operator $I_X(x) = x$.

Beweis:

(i) $(\alpha S + \beta T)'a = a \circ (\alpha S + \beta T) = \alpha(a \circ S) + \beta(a \circ T) = \alpha S'a + \beta T'a = (\alpha S' + \beta T')a$ für alle $a \in Y'$

(ii) $(TS)'a = a \circ (T \circ S) = (a \circ T) \circ S = S'(a \circ T) = (S'T')a$ für alle $a \in Z'$

(iii) $I_X' a = a \circ I_X = a = I_{X'} a$

Bemerkung
Sei X ein normierter Raum und $a \in X'$. Für den Wert $a(x)$ für $x \in X$ benutzt man oft auch die Schreibweise $\langle x, a\rangle$ mit $\langle x, a\rangle := a(x)$. Mit Hilfe dieser Schreibweise ist der duale Operator $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ von $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ wie folgt definiert:

$$\langle x, T'a\rangle = \langle Tx, a\rangle \qquad x \in X, a \in Y'$$

Beispiel
Sei $M = (I_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ eine $m \times n$ Matrix. Durch $T_M x := \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} I_{ij}\xi_j\right) f_i$ für $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, wobei $f_1, \dots, f_m$ eine kanonische Basis im $\mathbb{K}^m$ ist, wird der Operator $T_M\colon \ell_p^n \to \ell_q^n$ definiert. Für den dualen Operator $T_M'\colon \ell_{q'}^n \to \ell_{p'}^n$ und $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \ell_{q'}^m$ gilt: $T_M' a = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} I_{ij}\alpha_i\right) e_j$, wobei $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis im $\ell_{p'}^n$ ist. Damit gilt: $T_M' = T_{M^T}$, wobei $M^T = (I_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ die transponierte Matrix von M ist.

Definition III.5.4 (Bidualer Raum)
Sei X ein normierter Raum. Dann heißt $X'' := (X')'$ **bidualer Raum** von X.

Satz III.5.5
Sei X ein normierter Raum. Die Abbildung $K_X\colon X \to X''$ definiert durch $(K_X x)a := a(x)$ für $x \in X$ und $a \in X'$ ist eine metrische Injektion, d. h. $K_X \in \mathcal{L}(X, X'')$ und $\|K_X x\| = \|x\|$ für $x \in X$.

Man nennt K_X auch die **kanonische Einbettung** von X in X''. Jedes Element $x \in X$ kann als Funktional $K_X x$ auf X' aufgefasst werden.

Hier fehlt was, ergänzen

Beweis:

1. Wir zeigen zuerst, dass $K_X \in \mathcal{L}(X, X'')$ ist. Dazu ist K_X ein lineares Funktional auf X'

2. Es ist K_X eine metrische Injektion, denn $\|K_X x\| = \sup_{\|a\| \leqslant 1} \|(K_X x)(a)\| = \sup_{\|a\| \leqslant 1} |a(x)| = \|x\|$ für $x \in X$.

Satz III.5.6
Seien X und Y normierte Räume. Dann gilt:

(i) $T''K_X = K_Y T$ für $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, wobei $T'' := (T')'$ bidualer Operator von T.

(ii) $K'_X K_{X'} = I_{X'}$

Beweis:

(i) $(T''K_X x)(a) = (K_X x)(T'a) = (T'a)(x) = a(Tx) = (K_Y Tx)(a)$ für alle $a \in Y'$. Damit folgt, $T''K_X x = K_Y Tx$ für alle $x \in X$ und weiter ist also $T''K_X = K_y T$.

(ii) $(K'_X K_{X'} a)(x) = ((K_{X'} a) \circ K_X)(x) = (K_{X'} a)(K_X x) = (K_X x)(a) = a(x)$ für alle $x \in X$. Damit ist also $K'_X K_{X'} a = a$ für alle $a \in X'$ und die Behauptung ist gezeigt.

Satz III.5.7
Seien X und Y normierte Räume. Dann gilt:

(i) Ist X endlich-dimensional und $T\colon X \to Y$ linear, so ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, d. h. T ist beschränkt.

(ii) Seien die Dimensionen von X und Y gleich und endlich. Dann ist ein linearer Operator $T\colon X \to Y$ genau dann injektiv und surjektiv, wenn $T'\colon X' \to Y'$ injektiv und surjektiv ist.

Beweis:

(i) Sei $x_1, \ldots, x_n \in X$ eine Basis. Für ein $x \in X$ gilt die eindeutige Darstellung $x = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$. Durch $\|\sum_{i=1}^n \xi_i x_i\|_0 := \sum_{i=1}^n |\xi_i|$ wird eine äquivalente Norm auf X festgelegt. Damit existiert ein positives C mit $\|x\|_0 = \|\sum_{i=1}^n \xi_i x_i\|_0 \leqslant C\|x\|$. Also gilt die Abschätzung:

$$\begin{aligned}\|Tx\|_Y = \|\sum_{i=1}^n \xi_i T x_i\| &\leqslant \sum_{i=1}^n |\xi_i| \|Tx_i\| \\ &\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|Tx_i\| \sum_{i=1}^n |\xi_i| \leqslant C \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|Tx_i\| \|x\|_X\end{aligned}$$

Also folgt: $\|T\| \leqslant C \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|Tx_i\| < \infty$ und T ist beschränkt.

(ii) „$\Rightarrow$“ Sei T injektiv und surjektiv. Also existiert $T^{-1}\colon Y \to X$ linear. Wegen der endlichen Dimension ist T^{-1} auch beschränkt. Durch $I_x = T^{-1}T$ und $I_Y = TT^{-1}$ folgt mit **??**: $I_{X'} = I'_X = (T^{-1}T)' = T'(T^{-1})'$ und ebenso $I_{Y'} = (T^{-1})'T'$. Damit ist $(T^{-1})' = T'^{-1}$. Damit muss T' injektiv und surjektiv sein.

„$\Leftarrow$“ Sei T' injektiv und surjektiv. Wir zeigen zunächst, dass T injektiv ist: Hierzu sei $Tx = 0$ und $a \in Y'$. Dann gilt, $0 = a(Tx) = (T'a)(x)$ und da T' surjektiv ist, folgt $b(x) = 0$ für alle $b \in X'$. Nach dem Theorem von Hahn-Banach (**??**) existiert ein $b \in X'$ mit $0 = b(x) = \|x\| \Rightarrow x = 0$, d. h. T ist injektiv.

Wir nehmen an, dass T *nicht* surjektiv ist. Also ist $R(T) \subsetneq Y$ und $R(T)$ ist abgeschlossen, denn die Dimension von $R(T)$ ist endlich. Sei nun $y \in Y \setminus R(T)$. Dann existiert ein Funktional a aus Y' mit der Eigenschaft, dass $a(y) \neq 0$ und $a|_{R(T)} = 0$ wegen Punkt iii aus **??**. Also ist $a(Tx) = 0$ für alle $x \in X$. Hieraus folgt, dass $(T'a)(x) = 0$ für alle $x \in X$. Da T' injektiv, muss $a = 0$ auf Y sein. ↯

Definition III.5.8 (Linearer Homöomorphimus)
Seien X und Y normierte Räume. Dann heißt ein linearer Operator $T\colon X \to Y$ **linearer Homöomorphimus**, falls T bijektiv und bistetig ist.

Satz III.5.9
Seien X und Y normierte Räume und T eine beschränkte lineare Abbildung von X nach Y. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Ist T ein Homöomorphimus, so ist der Dualoperator T' ebenfalls ein Homöomorphimus und es gilt, $T'^{-1} = (T^{-1})'$.

(ii) Ist X ein Banachraum und T' Homöomorphimus, so ist T ein Homöomorphimus.

Beweis:

(i) Es ist $I_X = T^{-1}T$ und $I_Y = TT^{-1}$. Dann folgt aus **??** $I_{X'} = I'_X = (T^{-1}T)' = T'(T^{-1})'$ und $I_{Y'} = (T^{-1})'T'$. Insgesamt folgt: $(T^{-1})' = T'^{-1}$.

(ii) Sei X ein Banachraum und $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$. Dann ist nach dem ersten Punkt $T'' \in \mathcal{L}(X'', Y'')$ ein Homöomorphimus und es folgt die Abschätzung:

a) Für $a \in X''$ gilt: $\|a\| = \|T''^{-1}T''a\| \leqslant \|T''^{-1}\|\|T''a\|$. Wegen (i) und **??** erhält man für $x \in X$: $\|x\| = \|K_X x\| \leqslant \|T''^{-1}\|\|T''K_X x\| = \|T''^{-1}\|\|K_Y Tx\| \leqslant \|T''^{-1}\|\|Tx\| \leqslant \|T''^{-1}\|\|T\|\|x\|$. Also gilt:

b) $\frac{1}{\|T''^{-1}\|}\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|$ für alle $x \in X$.

Aus dem zweiten Schritt folgt, dass $T_0 \coloneqq T\colon X \to R(T)$ ein Homöomorphimus ist. Denn T_0 ist injektiv und surjektiv von X auf $R(T)$. Damit existiert T_0^{-1} und es ist zu zeigen: T_0^{-1} ist beschränkt. Für $y \in R(T)$ folgt mit dem zweiten Punkt die Abschätzung: $\|T_0^{-1}y\| \leqslant \|T''^{-1}\|\|TT_0^{-1}y\| = \|T''^{-1}\|\|y\|$. Hieraus folgt, $\|T_0^{-1}\colon R(T) \to X\| \leqslant \|T''^{-1}\| < \infty$.

Wir zeigen nun, dass $R(T)$ abgeschlossen ist. Dazu zeigen wir, dass $R(T)$ vollständig ist. Hierzu sei $(y_n) \in R(T)$ eine Cauchyfolge. Dann gilt für $x_n \coloneqq T_0^{-1}y_n$ die Abschätzung: $\|x_n - x_m\| = \|T_0^{-1}y_n T_0^{-1}y_m\| = \|T_0^{-1}(y_n - y_m)\| \leqslant \|T_0^{-1}\|\|y_n - y_m\|$ und somit ist $(x_n) \subset X$ eine Cauchyfolge in X. Da X vollständig, existiert $x \coloneqq \lim_{n\to\infty} x_n$. Damit ist $y = T_0^{-1}x \in R(T)$ und es gilt, $\|y_n - y\| = \|T_0 x_n - T_0 x\| = \|T_0(x_n - x)\| \leqslant \|T_0\|\|x_n - x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, d. h. (y_n) ist in $R(T)$ konvergent. Also ist $R(T)$ vollständig und damit abgeschlossen in Y.

Wir zeigen nun noch $R(T) = Y$. Dazu nehmen wir an, dass $R(T) \subsetneq Y$. Da $R(T)$ abgeschlossen, existiert nach dem Hahn-Banach-Theorem (**??**) ein Element a

aus Y' mit $a \neq 0$ und $a|_{R(T)} = 0$. Andererseits gilt, $(T'a)(x) = a(Tx) = 0$ für alle $x \in X$. Dann muss $T'a$ das Nullfunktional sein und wegen der Injektivität von T' muss $a = 0$ sein. $\lightning$

Eventuell fehlt hier der Rest des Beweises. Wer kann das klären?

Untenstehendes liess sich nicht zuordnen. Ich brauche noch weitere Mitschriften.

$\|x\| = \|K_X(x)\| \leqslant \|T''^{-1}\|\|T''(K_X(x))\| = \|T''^{-1}\|\|K_Y(T(x))\| = \|T''^{-1}\|\|T(x)\| \leqslant \|T''^{-1}\|\|T\|\|x\|$
Umgeschrieben ergibt sich:

$$\frac{\|x\|}{\|T''^{-1}\|} \leqslant \|T(x)\| \leqslant \|T\|\|x\| \qquad \forall x \in X \tag{III.4}$$

Aus **??** folgt, dass $T_0 := T\colon X \to R(T)$ ein linearer Homöomorphimus ist. Denn wegen $0 \leqslant \frac{\|x\|}{T''^{-1}} \leqslant \|T(x)\| = \|0\| = 0$ ist T_0 injektiv und es folgt, $x = 0$. Per Konstruktion ist T_0 auch surjektiv, da $T_0\colon X \to R(T)$. Damit existiert T_0^{-1} und mit **??** gilt: $\|T_0^{-1}(y)\| \leqslant \|T''^{-1}\|\|T(T_0^{-1}(y))\| \leqslant \|T''^{-1}\|\|y\|$ für alle $y \in R(T)$. Damit ist also $\|T_0^{-1}\| \leqslant \|T''^{-1}\| < \infty$.

Laut Voraussetzung ist $\|T_0\| < \infty$ und somit gilt $T_0^{-1} \in \mathcal{L}(R(T), X)$ und $T_0 \in \mathcal{L}(X, R(T))$. Nun ist noch zu zeigen, dass $R(T) = Y$ ist. Denn dann wäre $T = T_0$ und die Behauptung bewiesen.

Zunächst zeigen wir, dass $R(T)$ abgeschlossen ist. Dazu genügt es wegen des **??** zu zeigen, dass $R(T)$ vollständig ist. Sei $\{y_n\} \subseteq R(T)$ eine Cauchyfolge. Dann gilt für $x_n := T_0^{-1}(y_n)$ die Abschätzung: $\|x_n - x_m\| = \|T_0^{-1}(y_n) - T_0^{-1}(y_m)\| = \|T_0^{-1}(y_n - y_m)\| \leqslant \|T_0^{-1}\|\|y_n - y_m\|$. Damit ist auch $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge. Da X vollständig ist, existiert $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Damit ist $y := T_0(x) \in R(T)$ und es gilt: $\|y_n - y\| = \|T_0(x_n) - T_0(x)\| = \|T_0(x_n - x)\| \leqslant \|T_0\|\|x_n - x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Das zeigt, dass $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq R(T)$ konvergent in Y ist. Damit ist $R(T)$ vollständig und somit auch abgeschlossen.

Schließlich zeigen wir noch, dass $R(T) = Y$. Dazu nehmen wir an, dass $R(T) \subsetneq Y$ ist. Da $R(T)$ abgeschlossen ist, existiert nach **??** Punkt (iii) ein $a \in Y'$ mit $a \neq 0$ und $a \circ J_{R(T)} = 0$. Andererseits gilt: $(T'(a))(x) = a(T(x)) = 0$ für alle $x \in X$ und somit ist $T'(a) = 0$. Da T' injektiv ist, folgt nun $a = 0 \lightning$ Denn nach Voraussetzung soll $a \neq 0$ gelten. Somit können wir folgern, dass $R(T) = Y$ und weiter $T = T_0$. Damit ist schließlich T ein linearer Homöomorphimus.

Lemma III.5.10
Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann existiert $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ genau dann, wenn $(T')^{-1} \in \mathcal{L}(X', Y')$ existiert. Ferner gilt $(T^{-1})' = (T')^{-1}$.

Beweis:
Der Beweis ist ein Spezialfall von **??**. ■

Lemma III.5.11
Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann gilt:

(i) Wenn T surjektiv ist, so ist T' injektiv.

(ii) Wenn T' surjektiv ist, so ist T injektiv.

Beweis:

(i) Sei $R(T) = Y$ und $T'(a) = 0$. Dann folgt, $\langle T(x), a\rangle = \langle x, T'(a)\rangle = 0$ für alle $x \in X$. Da $R(T) = Y$, folgt, $\langle y, a\rangle = 0$ für alle $y \in Y$ und somit ist $a = 0$. Also ist T' injektiv.

(ii) Sei $R(T') = X'$ und $T(x) = 0$. Dann folgt für alle $a \in Y'$: $\langle x, T'(a)\rangle = \langle T(x), a\rangle = 0$. Wegen $R(T') = X'$ folgt weiter, $\langle x, b\rangle = 0$ für alle $b \in X'$. Nach dem Punkt (i) des **??** existiert ein b_0 aus X' mit $0 = \langle x, b\rangle = \|x\|$. Also ist $x = 0$ und damit T injektiv.

Satz III.5.12
Jeder normierte Raum ist metrisch isomorph zu einem dichten Teilraum eines Banachraums.

Beweis:
Sei X ein normierter Raum. Dann ist X metrisch isomorph zu $K_X(X) \subseteq X''$ wegen **??**. Weil X'' ein Banachraum ist (siehe **??** Punkt (ii)), ist $\mathrm{cl}(K_X(X))$ ebenfalls ein Banachraum. ∎

Bemerkung
Die Umkehrung von **??** gilt nicht. So ist beispielsweise $I\colon l_1 \to c_0$ zwar injektiv, aber $I'\colon c_0' = l_1 \to l_1' = l_\infty$ ist nicht surjektiv, $l_1 \subsetneq l_\infty$.

Bemerkung
Der obige Satz gibt eine elegante Vervollständigung eines normierten Raumes.

Beispiel

(i) Sei $X := c_0 := \{x \in l_\infty\colon \xi_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\}$. Dann gilt, $K_X(x) = x$ für $K_X\colon c_0 \to l_\infty$. Das heißt $K_X = I$. Insbesondere ist K_X nicht surjektiv, da $c_0 \subsetneq l_\infty$. Denn zunächst ist $K_X\colon c_0 \to l_\infty'' = l_1' = l_\infty$. Außerdem gilt für $a \in l_1$ mit $a = \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ und $x = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty \in c_0$: $(K_X(x))(a) = a(x) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k \underbrace{a(e^{(k)})}_{=:\,\alpha_k} = \sum_{k=1}^\infty \xi_k\alpha_k$ für alle $a \in l_1$.
Damit folgt, $K_X(x) = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty \in l_\infty$. Also ist $K_X(x) = x$.

Intervallgrenzen prüfen

(ii) K_{l_1} ist ebenfalls nicht surjektiv.

(iii) $K_{l_p} = I_{l_p}$ für $p \in (1, \infty)$ ist eine Surjektion.

Definition III.5.13 (reflexiver Banachraum)
Ein Banachraum X heißt **reflexiv**, wenn K_X eine Surjektion ist.

Bemerkung
Die obige Definition ist auch für einen normierten nicht vollständigen Raum X möglich, doch diese können gleich unbeachtet bleiben, da X' immer vollständig und daher X'' immer vollständig ist. Damit kann K_X für solche Räume niemals eine Surjektion sein.

Bemerkung

(i) Obiges Beispiel zeigt, dass l_p für $1 < p < \infty$ reflexiv und l_1, l_∞ und c_0 nicht reflexiv sind.

(ii) Endlich-dimensionale normierte Räume X sind immer reflexiv, da die Dimensionen von X, X' und X'' gleich sind. Der Beweis hierzu folgt später in der Vorlesung.

Satz III.5.14

(i) Abgeschlossene Teilräume reflexiver Räume sind auch wieder reflexiv.

(ii) Ein Banachraum X ist genau dann reflexiv, wenn X' reflexiv ist.

Beweis:

(i) Sei $M \subseteq X$ ein abgeschlossener linearer Teilraum und $b \in M''$. Dann müssen wir zeigen, dass $K_X(M) = M''$. Hierfür genügt es zu zeigen, dass ein $x \in M$ mit $K_X(x) = b$ existiert. Wir definieren $a \in X''$ durch $a := (J_M)'' \circ b \in X''$. Dabei ist $J''_M \colon M'' \to X''$. Wegen $K_X(X) = X''$ existiert $x \in X$ mit $a = K_X(x)$ und für alle $u \in X'$ folgt, $a(u) = (K_X(x))(u) = u(x)$. Wir betrachten nur die Funktionale mit dieser speziellen Eigenschaft, aus denen folgt schon, dass $x \in M$ gilt

Sei $u(x) = 0$ für alle $u \in X'$ mit $u \circ J_M = 0$. Dann ist $x \in M$. Denn falls $x \notin M$ wäre, so existiert nach **??** Punkt (iii) ein $u \in X'$ mit $u(x) = |x, M| > 0$ und $u \circ J_M = 0$ aufgrund der Abgeschlossenheit von M.↯

Ferner existiert für jedes $v \in M'$ nach dem Hahn-Banach-Theorem ein $u \in X'$ mit $u \circ J_M = v = (J_M)'(u)$. Damit gilt für $x \in M$ dann:

$$\begin{aligned} b(v) &= \langle v, b\rangle = \langle J'_M(u), b\rangle = \langle u, J''_M(b)\rangle = \langle u, a\rangle \\ &= \langle u, K_X(x)\rangle = \langle x, u\rangle = \langle x, v\rangle = \langle v, K_X(x)\rangle \\ &= (K_X(x))(v) \qquad \forall a \in M' \\ &\Rightarrow K_X(x) = b \end{aligned}$$

(ii) Für die Hinrichtung sei X reflexiv. Dann ist zu zeigen, dass $R(K_{X'}) = X'''$ ist. Für $a \in X'''$ und $b := K'_X(a) \in X'$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle K_X(x) K_{X'}(b)\rangle &= \langle b, K_X(x)\rangle = \langle x, b\rangle = \langle x, K'_X(a)\rangle \\ &= \langle K_X(x), a\rangle \qquad \forall x \in X \\ &\Rightarrow \langle c, K'_X(b)\rangle = \langle c, a\rangle \qquad \forall c \in X''' \\ &\Rightarrow K'_X(b) = a \Rightarrow R(K_{X'}) = X''' \end{aligned}$$

Für die Gegenrichtung sei X' reflexiv und wir nehmen an, dass X nicht reflexiv ist. Dann ist $K_X(X)$ eine echte Teilmenge von X''. Weiter ist $K_X(X)$ abgeschlossen[3]

[3]Sei $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subseteq K_X(X)$. Dann existiert $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subseteq X$ mit $K_X(x_k) = y_k$. Da X ein Banachraum ist und damit insbesondere abgeschlossen, folgt die Existenz eines $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Damit folgen $y := K_X(x) \in K_X(X)$ und $\|y_k - y\| = \|K_X(x_k) - K_X(x)\| = \|K_X(x_k - x)\| = \|x_k - x\| < \varepsilon$. Also ist $K_X(X)$ abgeschlossen.

in X'', da X ein Banachraum ist und K_X eine metrische Injektion. Nach dem **??** Punkt (iii) existiert $a \in X'''$ mit $a \neq 0$ und $a \circ J_{K_X(X)} = 0$. Da X' reflexiv ist, ist $K_{X'}(X') = X'''$. Somit existiert $v \in X'$ mit $K_{X'}(v) = a$ und $\|v\| = \|K_{X'}(v)\| = \|a\| > 0$. Insbesondere existiert $v \in X'$ mit $K_{X'}(v) = a$ und $v \neq 0$. Somit folgt für alle $x \in X$: $0 = \langle K_X(x), a\rangle = \langle K_X(x), K_{X'}(v)\rangle = \langle v, K_X(x)\rangle = \langle x, v\rangle \Rightarrow v = 0$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $v \neq 0$.

Lemma III.5.15
Ist ein Banachraum X nicht reflexiv, so gilt, $X \subsetneq X'' \subsetneq X'''' \subsetneq \ldots$ und $X' \subsetneq X''' \subsetneq \ldots$. Die Inklusionen sind bezüglich der kanonischen Einbettung zu verstehen.

Beweis:
Wäre $X^{(k)}$ reflexiv, dann folgt nach **??**, dass auch $X^{(k-1)}$ reflexiv ist und so weiter. Damit wäre X auch reflexiv. ↯ ∎

Bemerkung
Es gibt einen Banachraum J, genannt James-Raum, der metrisch isomorph zu seinem bidualen Raum J'' ist und dennoch nicht reflexiv ist.

Satz III.5.16

(i) Sei $J\colon X \to Y$ eine metrische Injektion vom normierten Raum X in den normierten Raum Y. Dann ist J' eine metrische Surjektion.

(ii) Ist $Q\colon X \to Y$ eine metrische Surjektion, so ist Q' eine metrische Injektion.

Beweis:

(i) Wir betrachten die kanonische Faktorisierung $J = J_{R(J)} \circ J_0$. In unserem Fall ist $N(J) = \{0\} \Rightarrow X/_{N(J)} = X$ und $Q_{N(J)} = I_X$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "J"] \arrow[d, dotted, "Q_{N(J)}"'] \arrow[dr, "J_0"] & Y \\
X/_{N(J)} \arrow[r, dotted, "J_0"'] & R(J) \arrow[u, "J_{R(J)}"']
\end{tikzcd}$$

Dabei sind J_0 und J_0^{-1} nach Definition metrische Isomorphismen, d. h. $\|J_0(x)\| = \|x\|$ und $\|J_0^{-1}(y)\| = \|y\|$.

Wir zeigen, dass $J'(\mathring{B}_{Y'}) = \mathring{B}_{X'}$. Dazu genügt es zu zeigen, dass für alle $a \in \mathring{B}_{X'}$ ein $b \in \mathring{Y}'$ mit $a = J'(b)$ existiert. Dabei wird mit $\mathring{B}_X$ das $\mathring{B}_1(0) \subseteq X$ bezeichnet.

Sei $a \in \mathring{B}_X$. Dann definieren wir $b_0 \coloneqq (J_0^{-1})'(a) = (J_0')^{-1}(a)$ und es gilt: $\|b_0\| \leqslant \|(J_0^{-1})'\|\|a\| = \|J_0^{-1}\|\|a\| = \|a\| < 1 \Rightarrow b_0 \in B_{(R(J))'}$. Nach **??** existiert $b \in Y'$ mit $b \circ J_{R(J)} = b_0$ und $\|b\| = \|b_0\| < 1$. Dann gilt, $J'(b) = a$, denn $\langle x, a\rangle = \langle x, J_0'(b_0)\rangle = \langle J_0(x), b_0\rangle = \langle J_0(x), b\rangle = \langle J(x), b\rangle = \langle x, J'(b)\rangle$ für alle $x \in X$. Damit folgt, $a = J'(b)$ und $J'(\mathring{B}_{Y'}) \supseteq \mathring{B}_{X'}$. Wegen $\|J'(b)\| \leqslant \|J'\|\|b\| = \|b\|$ folgt auch $J'(\mathring{B}_{Y'}) \subseteq \mathring{B}_{X'}$.

(ii) Sei $Q(\mathring{B}_X) = \mathring{B}_Y$. Wir zeigen $\|Q'(b)\| \geqslant \|b\|$ für $y \in \mathring{B}_Y$. Für $b \in Y'$ und $0 < \varepsilon < 1$ wählen wir $y \in \mathring{B}_Y$ und erhalten $|\langle y, b\rangle| \geqslant (1-\varepsilon)\|b\| = (1-\varepsilon)\sup_{\|y\|\leqslant 1}|\langle y, b\rangle|$. Wegen $Q(\mathring{B}_X) = \mathring{B}_Y$ existiert $x \in \mathring{B}_X$ mit $Q(x) = y$ und es folgt: $\|Q'(b)\| \geqslant |\langle x, Q'(b)\rangle| = |\langle Q(x), b\rangle| = |\langle y, b\rangle| \geqslant (1-\varepsilon)\|b\| \Rightarrow \|Q'(b)\| \geqslant (1-\varepsilon)\|b\|$. Schließlich ist für $\varepsilon \to 0$: $\|Q'(b)\| \geqslant \|b\|$. Die Umkehrung folgt aus $\|Q'(b)\| \leqslant \|Q'\|\|b\| = \|Q\|\|b\| = \|b\|$. Also ist Q' eine metrische Injektion.

Definition III.5.17
Ein Banachraum F besitzt die metrische Fortsetzungseigenschaft, wenn für jede metrische Injektion $J\colon X_0 \to X$ von einem normierten Raum X_0 in einen normierten Raum X und jeden Operator $T_0 \in \mathcal{L}(X_0, F)$ ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, F)$ existiert mit $T_0 = T \circ J$ und $\|T\| = \|T_0\|$.

$$\begin{tikzcd}
R(J) \arrow[r, "J_{R(J)}"] & X \arrow[d, "T"] \\
X_0 \arrow[u, "J_0"] \arrow[ur, "J"] \arrow[r, "T_0"'] & F
\end{tikzcd}$$

Bemerkung
Für den Fall, dass $X_0 \subseteq X$ ist, dann ist $J_{X_0}\colon X_0 \to X$ mit $x \mapsto x$ eine metrische Injektion. Dann ist die metrische Fortsetzungseigenschaft die bisher betrachtete Fortsetzbarkeit.

Satz III.5.18
Sei I eine Indexmenge. Dann besitzt $l_\infty(I) := \left\{ f\colon I \to \mathbb{K} \;\middle|\; \sup_{x\in I}|f(x)| < \infty \right\}$ die metrische Fortsetzungseigenschaft.

Beweis:
Sei $J\colon X_0 \to X$ eine metrische Injektion von einem normierten Raum X_0 in einen normierten Raum X und $T_0 \in \mathcal{L}(X_0, l_\infty(I))$. Wir definieren für $y \in l_\infty(I)$ die Funktionale b_i durch $\langle y, b_i\rangle := y(i)$ für $i \in I$. Die b_i sind trivialerweise linear und es gilt: $\|b_i\| = \sup_{\|y\|_\infty\leqslant 1}|\infty y, b_i\rangle| = \sup_{\|y\|_\infty\leqslant 1}|y(i)| \leqslant \sup_{\|y\|_\infty\leqslant 1}\|y\|_\infty = 1$. Also ist $b_i \in (l_\infty(I))'$. Wir setzen $\mathring{a}_i := T_0'(b_i) \in X_0'$ und dann gilt:

$$(T_0(x))(i) = \langle T_0'(x), b_i\rangle = \langle x, T_0'(b_i)\rangle = \langle x, \mathring{a}_i\rangle \qquad \forall i \in I \tag{III.5}$$

$$\|T_0\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|T_0(x)\|_{l_\infty(I)} = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\sup_{i\in I}|\langle x, \mathring{a}_i\rangle| = \sup_{i\in I}\sup_{\|x\|\leqslant 1}|\langle x, \mathring{a}_i\rangle| = \sup_{i\in I}\|\mathring{a}_i\| \tag{III.6}$$

Sei $J = J_{R(J)} \circ J_0$ die kanonische Faktorisierung der Abbildung $J\colon X_0 \to X$. Dann gilt nach **??**: $\|J_0\| = \|J_0^{-1}\| = 1$. Betrachten für $i \in I$ die Funktionale $l_i := \mathring{a}_i \circ J_0^{-1}\colon R(J) \to \mathbb{K}$. Nach dem **??** existieren Fortsetzungen a_i von l_i von $R(J)$ auf X mit $\|a_i\| = \|l_i\|$ für $i \in I$. Für $x \in X_0$ gilt: $\mathring{a}_i(x) = (l_i \circ J_0)(x) = l_i(J_0(x)) = a_i(J_0(x)) = a_i(J(x)) = (J'(a_i))(x)$. Damit folgt, dass $\mathring{a}_i = J'(a_i)$ für alle $i \in I$.

$$\|a_i\| = \|l_i\| = \|\mathring{a}_i \circ J_0^{-1}\| \leqslant \|\mathring{a}_i\|\|J_0^{-1}\| = \|\mathring{a}_i\| \tag{III.7}$$

$$\|\mathring{a}_i\| = \|J'(a_i)\| \leqslant \|J'\|\|a\| = \|J\|\|a_i\| = \|a_i\| \tag{III.8}$$

$$\Rightarrow \|\mathring{a}_i\| = \|a_i\| \tag{III.9}$$

Nun definieren wir $T\colon X \to l_\infty(I)$ durch $T(x) \coloneqq (\langle x, a_i \rangle)_{i\in I}$. Dann gilt für $x \in X_0$:

$$\begin{aligned}(T \circ J)(x) = T(J(x)) = (\langle J(x), a_i \rangle)_{i\in I} = (\langle x, J'(a_i) \rangle)_{i\in I} &\overset{\textbf{??}}{=} (\langle x, \mathring{a}_i \rangle)_{i\in I} \\ &\overset{\textbf{??}}{=} ((T_0(x))(i))_{i\in I} = T_0(x) \\ &\Rightarrow T_0 = T \circ J\end{aligned}$$

Analog zu **??** folgt weiter: $\|T\| = \cdots = \sup_{i\in I}\|a_i\| \overset{\textbf{??}}{=} \sup_{i\in I}\|\mathring{a}_i\| \overset{\textbf{??}}{=} \|T_0\|$. ■

Bemerkung
Sei $M \subseteq X$ ein linearer Teilraum des normierten Raumes X und $T_0 \in \mathcal{L}(M, l_\infty(I))$. Dann existiert eine Fortsetzung $T \in \mathcal{L}(X, l_\infty(I))$ mit $T \circ J_M = T_0$ und $\|T\| = \|T_0\|$. Für $I = \{i\}$ folgt, dass $l_\infty(I) = \mathbb{K}$.

IV Hauptsätze für beschränkte lineare Operatoren auf Banachräumen

IV.1 Der Bairesche Kategoriensatz (BKS)

Satz IV.1.1 (Erste Variante des BKS)
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, wobei A_k abgeschlossen sind. Dann existiert ein k_0 mit $\operatorname{int}(A_{k_0}) \neq \emptyset$.

Beweis:
Wir nehmen an, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, $\operatorname{int}(A_k) = \emptyset$. Dann folgt, dass für eine offene nichtleere Menge $O \subseteq X$ gilt: $O \setminus A_k \neq \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für diese existiert weiter eine Kugel $\mathring{B}_\varepsilon(x)$ mit $\varepsilon \leqslant 1/k$ und $\operatorname{cl}(\mathring{B}_\varepsilon(x)) \subset O \setminus A_k$. Denn $O \setminus A_k$ hat mindestens einen nichtleeren Punkt. Somit können wir induktiv Kugeln mit $1 \geqslant \varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2 \geqslant \cdots$ mit $\varepsilon_k \leqslant 1/k$ und $\operatorname{cl}(\mathring{B}_{\varepsilon_k}(x_k)) \subseteq \mathring{B}_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1}) \setminus A_k$ wählen. Wegen $x_l \in \mathring{B}_{\varepsilon_k}(x_k)$ für $l \geqslant k$ und $\varepsilon_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ ist $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ eine Cauchyfolge in X. Da X vollständig ist, folgt, $\lim_{k\to\infty} x_k =: x \in X$ existiert. Damit gilt, $x \in \operatorname{cl}(\mathring{B}_{\varepsilon_k}(x_k))$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Andererseits folgt aus $\operatorname{cl}(\mathring{B}_{\varepsilon_k}(x_k)) \cap A_k = \emptyset$, dass $x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = X$. Dies ist ein Widerspruch zu $x \in X$. ∎

Bemerkung
Die Vollständigkeit von X ist notwendig, wie das Beispiel $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ mit $\mathbb{Q} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\{r\}$, aber $\operatorname{int}(\{r\}) = \emptyset$, zeigt.

Satz IV.1.2 (Zweite Variante des BKS)
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge offener und dichter Teilmengen von X. Dann ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ dicht in X.

Beweis:
Wir setzen $D := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ und zeigen $\operatorname{cl}(D) = X$. Jetzt genügt es zu zeigen, dass für alle $x \in X$ und alle $\varepsilon > 0$ gilt: $\mathring{B}_\varepsilon(x) \cap D \neq \emptyset$. Sei also $\mathring{B}_{\varepsilon_0}(x_0) \subseteq X$ eine beliebige Kugel. Da O_1 offen und dicht ist, gilt: $O_1 \cap \mathring{B}_{\varepsilon_0}(x_0) \neq \emptyset$ und $O_1 \cap \mathring{B}_{\varepsilon_0}(x_0)$ ist offen. Also existiert ein $x_1 \in O_1$ und ein $\varepsilon_1 > 0$ mit $\varepsilon_1 < \varepsilon_0/2$ und $\mathring{B}_{\varepsilon_1}(x_1) \subseteq O_1 \cap \mathring{B}_{\varepsilon_0}(x_0)$. Es könnte das ε_1 auch so gewählt werden, dass $\operatorname{cl}(\mathring{B}_{\varepsilon_1}(x_1)) \subseteq O_1 \cap \mathring{B}_{\varepsilon_0}(x_0)$ gilt. Nun betrachten wir ein O_2, welches offen und dicht ist. Also gilt $O_2 \cap \mathring{B}_{\varepsilon_1}(x_1) \neq \emptyset$ und ist offen. Wie oben existiert $x_2 \in O_2$ und $\varepsilon_2 < \varepsilon_1/2 < \varepsilon_0/2^2$ mit $\operatorname{cl}(\mathring{B}_{\varepsilon_2}(x_2)) \subseteq O_2 \cap \mathring{B}_{\varepsilon_1}(x_1) \subseteq O_1 \cap O_2 \cap \mathring{B}_{\varepsilon_0}(x_0)$. Sukzessives Fortsetzen liefert zwei Folgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $\varepsilon_n < \frac{\varepsilon_0}{2^n}$ und

$$\operatorname{cl}(\mathring{B}_{\varepsilon_n}(x_n)) \subseteq O_n \cap \mathring{B}_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1}) \subseteq O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n \cap \mathring{B}_{\varepsilon_0}(x_0) \tag{IV.1}$$

Damit folgt insbesondere:

$$x_n \in \mathring{B}_{\varepsilon_N}(x_N) \subseteq \mathring{B}_{\frac{\varepsilon_0}{2^N}}(x_N) \qquad \forall n > N \tag{IV.2}$$

Das zeigt, dass $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in X ist. Da X vollständig ist, folgt $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in X$ existiert. Aus der **??** folgt, dass $x \in \mathrm{cl}(\mathring{B}_{\varepsilon_n}(x_n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach **??** folgt nun, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \cap \mathring{B}_{\varepsilon_0}(x_0) = D \cap \mathring{B}_{\varepsilon_0}(x_0)$. Damit folgt, $D \cap \mathring{B}_{\varepsilon_0}(x_0) \neq \emptyset$. ∎

Lemma IV.1.3
Aus **??** folgt **??**.

Beweis:
Wir nehmen an, es gelte **??** und *nicht* **??**. Dann ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und es existieren $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ abgeschlossen: $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $\mathrm{int}(A_n) = \emptyset$ für alle natürlichen Zahlen n. Dann gilt ebenfalls für alle n: $\mathrm{cl}(X \setminus A_n) = X$. Denn wäre der Abschluss eine echte Teilmenge von X, dann würde $B_\varepsilon(a) \subseteq X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus A_n)$ existieren. Dies ist aber ein Widerspruch zur Abgeschlossenheit von A_n. Aus dem **??** folgt:

$$\mathrm{cl}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus A_n)\Big) = X \tag{IV.3}$$

Andererseits ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus A_n) = \emptyset$, da $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und es folgt, $\mathrm{cl}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus A_n)) = \emptyset$. Das ist ein Widerspruch zu **??**. ∎

Definition IV.1.4 (nirgends dicht, 1./2. Kategorie)
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gelten:

(i) Es heißt $M \subseteq X$ **nirgends dicht** genau dann, wenn $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(M)) = \emptyset$.

(ii) Es heißt $M \subseteq X$ von **1. Kategorie** genau dann, wenn existieren $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$ von nirgends dichten Mengen: $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$.

(iii) Es heißt $M \subseteq X$ von **2. Kategorie** genau dann, wenn M nicht von 1. Kategorie ist. $(\forall (M_n) \subset X\colon M = \bigcup M_n \Rightarrow \exists M_{n_0}\colon\ \mathrm{int}(\mathrm{cl}\, M_{n_0}) \neq \emptyset)$

Bemerkung

(i) $\mathbb{Q}$ ist von der 1. Kategorie, da $\mathbb{Q} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\{r\}$ ist.

(ii) Nirgends dichte Mengen liegen in keiner offenen Menge dicht.

Satz IV.1.5 (Bairescher Kategoriensatz)
In einem vollständigen metrischen Raum (X, d) liegt das Komplement einer Menge 1. Kategorie dicht, d. h. ist $M \subset X$ von 1. Kategorie, so gilt: $\mathrm{cl}(X \setminus M) = X$.

Beweis:
Der Satz ist äquivalent zum **??**. Daher zeigen wir zum Beweis die Äquivalenz:

Sei $M = \bigcup M_n$ eine Menge 1. Kategorie mit $\operatorname{int}(\operatorname{cl} M_n) = \emptyset$ für alle natürlichen n. Dann gilt: $X \setminus M = \bigcap (X \setminus M_n) \supset \bigcap (X \setminus \operatorname{cl}(M_n))$. Wegen $\operatorname{cl}(X \setminus \operatorname{cl} M_n) = X$[1] für alle natürlichen n folgt nach **??** $X = \operatorname{cl}(\bigcap (X \setminus \operatorname{cl} M_n)) \subseteq \operatorname{cl} \bigcap (X \setminus M_n) = \operatorname{cl}(X \setminus M)$. Hieraus folgt, $\operatorname{cl}(X \setminus M) = X$.

Für die Umkehrung (**??** $\Rightarrow$ **??**) sei $(O_n) \subset X$ mit $\operatorname{cl} O_n = X$ für alle natürlichen n. Dann muss gelten: $\operatorname{int}(X \setminus O_n) = \emptyset$. Zunächst ist zu zeigen, $X = \operatorname{cl} O_n = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus O_n) \Rightarrow \operatorname{int}(X \setminus O_n) = \emptyset$. Denn $O_n = X \setminus (X \setminus O_n) \subset X \setminus (X \setminus \operatorname{int} O_n) \Rightarrow \operatorname{cl} O_n \subset \operatorname{cl}(X \setminus (X \setminus \operatorname{int} O_n)) = X \setminus (X \setminus \operatorname{int} O_n)$. Andererseits $X \setminus O_n \supset X \setminus \operatorname{cl} O_n \Rightarrow \operatorname{int} X \setminus O_n \supset X \setminus \operatorname{cl} O_n \Rightarrow X \setminus \operatorname{int}(X \setminus O_n) \subset X \setminus (X \setminus \operatorname{cl} O_n) = \operatorname{cl} O_n$. Also ist $\operatorname{cl} O_n = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus O_n)$. Nun setzen wir $M := \bigcup (X \setminus O_n)$. Dies ist eine Menge der 1. Kategorie. Mit **??** folgt, $X \setminus M = X \setminus (\bigcup (X \setminus O_n)) = \bigcap O_n$ liegt dicht in X, d. h. $\operatorname{cl}(\bigcap O_n) = X$. Damit folgt dann der **??**. ∎

Eine schwächere Form von **??** bzw. **??** und gleichbedeutend mit dem erstgenannten **??** ist der folgende **??**:

Satz IV.1.6
Ein vollständiger metrischer Raum (X, d) ist von 2. Kategorie.

Beweis:
Wir zeigen zunächst, dass aus **??** folgt **??**: Sei $M_n \subset X$ mit $X = \bigcup M_n$. Dann gilt, $X = \bigcup \operatorname{cl} M_n$ und nach **??** existiert ein M_{n_0} mit $\operatorname{int}(\operatorname{cl} M_{n_0}) \neq \emptyset$.

Im folgenden wollen wir mit **??** impliziert **??** die Äquivalenz vervollständigen: Sei $(A_n) \subset X$ abgeschlossen mit $X = \bigcup A_n$. Mit **??** folgt, dass ein A_{n_0} existiert mit $\operatorname{int} \operatorname{cl} A_{n_0} = \operatorname{int} A_{n_0} \neq \emptyset$, denn X ist von 2. Kategorie. Also folgt der **??**. ∎

IV.2 Das Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit

Satz IV.2.1 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)
Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ eine Menge beschränkter linearer Operatoren, so dass für jedes $x \in X$: $\sup_{T \in \mathcal{A}} \|Tx\| < \infty$ ist. Dann gilt, $\sup_{T \in \mathcal{A}} \|T\| < \infty$, d. h. $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ ist in $\mathcal{L}(X, Y)$ eine beschränkte Menge.

Beweis:
Wir setzen $A_m := \{ x \in X \mid \forall T \in \mathcal{A}\colon \|Tx\| \leqslant m \}$ für eine natürliche Zahl m, d. h. $A_m = \bigcap_{T \in \mathcal{A}} \{ x \in X \mid \|Tx\| \leqslant m \}$. Die Mengen A_m sind abgeschlossen, denn $\{ x \in X \mid \|Tx\| \leqslant m \}$ abgeschlossen sind und für eine in X konvergente Folge $(x_n) \subset \{ x \in X \mid \|Tx\| \leqslant m \}$ ist zu zeigen, dass $a \in \{ x \in X \mid \|Tx\| \leqslant m \}$. Wegen der Stetigkeit von T folgt aus $x_n \to a$

[1]Das sieht man wie folgt: Wir nehmen an, der Abschluss wäre nicht gleich. Dann ist $X \setminus \operatorname{cl}(X \setminus \operatorname{cl} M_n)$ ungleich der leeren Menge und auch eine Teilmenge von $X \setminus (X \setminus \operatorname{cl} M_n) = \operatorname{cl} M_n$. Da die Ausgangsmenge offen ist, enthält der Abschluss innere Punkte. Dies ist ein Widerspruch.

auch $Tx_n \to Ta$ und auch $\|Tx_n\| \to \|Ta\|$. Damit folgt wegen der Beschränktheit $\|Ta\| \leqslant m$. Also liegt a in der Menge.

Ist das eine Null oder x_0?

Nach Voraussetzung ist $X = \bigcup A_m$. Weil X ein Banachraum ist, existiert nach **??** (Bairescher Kategoriensatz) ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{int} A_{m_0} \neq \emptyset$. Somit existiert eine Kugel $B_r(x_0) \subset A_{m_0}$ mit positivem r. Insbesondere gilt $\|Tx\| \leqslant m_0$ für jedes $x \in B_r(x_0)$ und für alle $T \in \mathcal{A}$. Also folgt für $x \in B_r(0)$, dass $\|Tx\| = \|T(x+x_0) - Tx_0\| \leqslant \|T(x+x_0)\| + \|Tx_0\| \leqslant m_0 + m_0 = 2m_0$. Also folgt hieraus $\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\| = 1/r \sup_{\|y\|\leqslant r}\|Ty\| \leqslant \frac{2m_0}{r}$ für jedes $T \in \mathcal{A}$. Also ist $\mathcal{A}$ beschränkt. ∎

Bemerkung
Obiger Satz wird auch manchmal als Satz von Banach-Steinhaus bezeichnet.

Satz IV.2.2 (Satz von Banach-Steinhaus)
Seien X, Y Banachräume, $(T_n) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ eine Folge beschränkter linearer Operatoren, so dass für jedes $x \in X$ die Folge $(T_n x)$ konvergiert. Dann ist der Operator $T\colon X \to Y$ definiert durch $Tx := \lim T_n x$ linear und beschränkt, d. h. $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Beweis:
Es ist T linear: Denn für $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ist $T(\alpha x + \beta y) = \lim T_n(\alpha x + \beta y) = \lim(\alpha T_n x + \beta T_n y) = \alpha Tx + \beta Ty$.

T ist beschränkt: Die Folge $(T_n x)$ ist für alle $x \in X$ beschränkt, $(T_n x)$ konvergent. Damit folgt, $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n x\| < \infty$. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit gilt für $\mathcal{A} = \{T_n\}$, dass $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\| < \infty$. Somit ist $\|Tx\| = \lim\|T_n x\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n x\| \leqslant (\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|)\|x\|$ für alle $x \in X$. Das heißt, T ist ein beschränkter Operator von X nach Y. ∎

Satz IV.2.3
Seien X, Y Banachräume, $(T_n) \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Dann definiert $Tx = \lim T_n x$ genau dann einen Operator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, wenn

1. $\forall x \in X\colon \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n x\| < \infty$
2. $(T_n x)$ ist Cauchyfolge für jedes x aus einer dichten Menge $M \subset X$.

Beweis:
„$\Rightarrow$“ klar

„$\Leftarrow$“ Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $x_\varepsilon \in M$ mit $\|x - x_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$. Ferner existiert $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geqslant n_\varepsilon$ gilt: $\|T_m x_\varepsilon - T_n x_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$. Somit haben wir: $\|T_m x - T_n x\| \leqslant \|T_m x - T_m x_\varepsilon\| + \|T_m x_\varepsilon + T_n x_\varepsilon\| + \|T_n x_\varepsilon - T_n x_\varepsilon\| \leqslant \|T_m\|\|x - x_\varepsilon\| + \varepsilon + \|T_n\|\|x_\varepsilon - x\|$. Nach **??** folgt in Verbindung mit der ersten Eigenschaft, dass $\sup\|T_n\| < \infty$ und auch $\|T_m - xT_n x\| \leqslant (2\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\| + 1)\varepsilon$. Damit ist $(T_n x)$ eine Cauchyfolge in Y und da Y ein Banachraum ist, existiert der Grenzwert von $T_n x$. Nach **??** ist der Operator $T\colon X \to Y$ definiert durch $Tx := \lim T_n x$ beschränkt und linear.

Bemerkung
In dem obigen zweiten Punkt kann man M durch eine Menge M_0 mit $\operatorname{cl}(\operatorname{span} M_0) = X$ ersetzen.

Für stetige Funktionen $f_n\colon X \to Y$ zwischen vollständigen metrischen Räumen gilt **??** im Allgemeinen nicht. Denn aus der punktweisen Konvergenz von $(f_n(x))$ folgt im Allgemeinen nicht die Stetigkeit von $f(x) \coloneqq \lim f_n(x)$.

IV.3 Der Satz von der offenen Abbildung

Definition IV.3.1 (Offene Abbildung)
Seien X und Y metrische Räume. Dann heißt eine Abbildung $f\colon X \to Y$ **offen**, wenn sie jede offene Menge $O \subset X$ wieder in eine offene Menge $f(O)$ abbildet.

Lemma IV.3.2
Seien X und Y normierte Räume und ist $T\colon X \to Y$ linear. Dann gilt, T ist genau dann eine offene Abbildung, wenn es ein $\delta > 0$ mit $\mathring{B}_\delta(0) \subset T(\mathring{B}_1(0))$ gibt.

Beweis:
„⇒“ klar

„⇐“ Sei $O \subset X$ eine offene Menge und $x \in O$. Wir wählen $\varepsilon > 0$ mit $\mathring{B}_\varepsilon(x) \subset O$. Dann gilt, $\mathring{B}_{\varepsilon\delta}(Tx) \subset T(\mathring{B}_\varepsilon(x)) \subset T(O)$. Denn für $z \in \mathring{B}_{\varepsilon\delta}(Tx)$ gilt $\|{}^1/_\varepsilon(z - Tx)\| < \delta$ und damit ist ${}^1/_\varepsilon(z - Tx) \in \mathring{B}_\delta(0) \subset T(\mathring{B}_1(0))$. Dann existiert ein $y \in \mathring{B}_1(0)$ mit ${}^1/_\varepsilon(z - Tx) = Ty$ oder $z = T(x + \varepsilon y)$ mit $x + \varepsilon y \in \mathring{B}_\varepsilon(x) \subset O$. Somit ist $z \in T(\mathring{B}_\varepsilon(x)) \subset T(O)$, d. h. $\mathring{B}_{\varepsilon\delta}(Tx) \subset T(O)$. Also ist $T(O)$ offen.

Lemma IV.3.3
Sei $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein beschränkter linearer Operator von einem Banachraum X in einen Banachraum Y. Dann gilt, $\mathring{B}_c(0) \subset \operatorname{cl}(T(\mathring{B}_x))$ mit $c > 0$ impliziert $\mathring{B}_c(0) \subset T(\mathring{B}_x)$.

Beweis:
Sei $y \in \mathring{B}_c(0)$, d. h. $\|y\| < c$. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$ mit $\|y\|y\varepsilon < c$. Dann folgt, $\overline{y} := \frac{c}{\varepsilon}y \in \mathring{B}_c(0)$ nach Voraussetzung. Jetzt wählen wir ein $0 < \alpha < 1$, so dass $\frac{\varepsilon}{c}\frac{1}{1-\alpha} < 1$ ist. Dann existiert ein $y_0 = Tx_0 \in T(\mathring{B}_x)$ mit $\|y - y_0\| < \alpha c$. Nun betrachten wir $\frac{\overline{y}-y_0}{\alpha} \in \mathring{B}_c(0)$. Nach Voraussetzung existiert wieder ein $y_1 = Tx_1 \in T(\mathring{B}_X)$ mit $\|\frac{\overline{y}-y_0}{\alpha} - y_1\| < \alpha c$ oder $\|\overline{y} - (y_0 + \alpha y_1)\| < \alpha^2 c$. Induktiv erhalten wir eine Folge $y_0, y_1, \dots$ mit $\|\overline{y} - (\sum_{i=0}^n \alpha^i y_i)\| = \|\overline{y} - T(\sum_{i=0}^n \alpha^i x_i)\| < \alpha^{n+1}c$. Wegen $0 < \alpha < 1$ und $x_i \in \mathring{B}_X$ konvergiert $\sum_{i=0}^n \alpha^i x_i$ absolut, das $\sum_{i=0}^n \|\alpha^i x_i\| \leqslant \sum_{i=0}^n \alpha^i \leqslant \sum_{i=0}^\infty \alpha^i = \frac{1}{1-\alpha}$. Somit existiert $\overline{x} \coloneqq \sum_{i=0}^\infty \alpha^i x_i \in X$, da X ein Banachraum ist. Nach Konstruktion ist $T\overline{x} = \overline{y}$, da T stetig ist. Jetzt setzen wir $x \coloneqq \frac{\varepsilon}{c}\overline{x}$. Dann ist $Tx = \frac{\varepsilon}{c}T\overline{x} = \frac{\varepsilon}{c}\overline{y} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{c}{\varepsilon}y = y$ und $\|x\| = \frac{\varepsilon}{c}\|\overline{x}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{c}\sum_{i=0}^\infty \alpha^i \|x_i\| \leqslant \frac{\varepsilon}{c}\sum_{i=0}^\infty \alpha^i = \frac{\varepsilon}{c}\frac{1}{1-\alpha} < 1$. Damit liegt $x \in \mathring{B}_x$ und $y \in T(\mathring{B}_x)$. ■

Satz IV.3.4 (Satz von der offenen Abbildung)
Seien X und Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist T genau dann surjektiv, wenn T offen ist.

BEWEIS:

1. Schritt Wir zeigen zunächst, dass aus der Surjektivität von T die Offenheit folgt. Die Surjektivität ergibt: $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{cl} T(\mathring{B}_k(0))$. Jetzt wenden wir den BAIREschen Kategoriensatz (**??**) an. Danach gibt es ein k_0 mit $\operatorname{int}\operatorname{cl} T(\mathring{B}_{k_0}(0)) \neq \emptyset$. Das heißt, es gibt eine offene Kugel $\mathring{B}_\varepsilon(y_0)$ mit $\mathring{B}_\varepsilon(y_0) \subset \operatorname{cl} T(\mathring{B}_{k_0}(0))$. Für $y \in \mathring{B}_\varepsilon(0)$ existiert eine Folge $(x_i) \subset \mathring{B}_{k_0}(0)$ mit der Eigenschaft $Tx_i \to y_0 + y$. Wir wählen $x_0 \in X$ mit $Tx_0 = y_0$ und es folgt, $T(\frac{x_i - x_0}{k_0 + \|x_0\|}) \to \frac{y}{k_0+\|x_0\|}$ und $\|\frac{x_i - x_0}{k_0+\|x_0\|}\| < 1$ wegen der Dreiecksungleichung. Somit ist die Kugel $\mathring{B}_{\delta_0}(0) \subset \operatorname{cl} T(\mathring{B}_x)$ für $\delta_0 := \frac{\varepsilon}{k_0+\|x_0\|}$. Nun können wir das **??** anwenden und es folgt, $\mathring{B}_{\delta_0}(0) \subset T(\mathring{B}_x)$. Jetzt wenden wir das **??** an und wissen, dass T offen ist.

2. Schritt Sei T offen. Nach dem **??** existiert ein $\delta > 0$ mit $\mathring{B}_\delta(0) \subset T(\mathring{B}_X)$. Also gilt $\mathring{B}_{r\delta}(0) \subset T(r\mathring{B}_X)$ für $r > 0$. Damit folgt, dass $T(X) = Y$, d. h. T ist surjektiv.

IV.4 Satz vom inversen Operator und vom abgeschlossenen Graphen

Satz IV.4.1 (Satz von Banach über den inversen Operator)
Seien X und Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ sei injektiv und surjektiv. Dann existiert $T^{-1}\colon Y \to X$ und $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

BEWEIS:
Die Existenz und Linearität von T^{-1} ist klar. Daher zeigen wir hier, dass das Urbild einer offenen Menge $O \subset X$ von T^{-1} offen ist. Nach dem Satz von der offenen Abbildung (**??**) ist $(T^{-1})^{-1}(O) = T(O)$ offen. Damit ist T^{-1} stetig, d. h. $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$. ∎

Satz IV.4.2 (Satz vom abgeschlossenen Graphen)
Seien X und Y Banachräume und $T\colon X \to Y$ ein linearer Operator. Dann ist der Graph von T, $\operatorname{graph}(T) := \{(x, Tx) \in X \times Y \mid x \in X\}$ im Banachraum $X \times Y$ versehen mit der Norm[2] $\|(x,y)\| := \|x\|_X + \|y\|_Y$ genau dann abgeschlossen, wenn $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ein beschränkter linearer Operator ist.

BEWEIS:

„⇒“ Sei $G := \operatorname{graph}(T) \subset X \times Y$. Das ist ein abgeschlossener Teilraum und damit ein Banachraum. Da $X \times Y$ ein Banachraum ist. Wir definieren die Operatoren $P_X\colon G \to X$ und $P_Y\colon G \to Y$ durch den Ansatz $P_X(x,y) := x$ und $P_Y(x,y) := y$ für $(x,y) \in G$. Es gilt, $P_X \in \mathcal{L}(G,X)$ und $P_Y \in (G,Y)$. Denn $\|P_X(x,y)\| = \|x\|_X \leqslant \|x\|_X + \|y\|_Y = \|(x,y)\|$ (analog für $\|P_Y(x,y)\|$). Somit ist die Operatorennorm kleiner oder gleich 1.

P_X ist injektiv und surjektiv. Letzteres ist klar, denn dazu muss das x in $P_X(x,y)$ nur X durchlaufen. Die Injektivität lässt sich wie folgt zeigen: $0 = P_X(x,y) =$

[2] Auch andere Normen sind hier denkbar.

$P_X(x, Tx) = x \Rightarrow (x, Tx) = (0, 0)$. Also ist P_X injektiv. Nach dem Satz vom inversen Operator ist $P_X^{-1} \in \mathcal{L}(X, G)$. Damit folgt, $T = P_Y P_X^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$. Denn $P_Y P_X^{-1} x = P_Y(x, Tx) = Tx$.

„$\Leftarrow$“ Sei T stetig. Dies impliziert, dass der graph(T) abgeschlossen ist. Dazu nehmen wir eine Folge $(x_n, Tx_n) \to (x, y) \in X \times Y$ und es folgt, $x_n \to x, Tx_n \to y$. Da T stetig ist, ist $y = Tx$. Damit ist $(x, Tx) \in G$. Also ist der Graph von T abgeschlossen.

V Finite Operatoren, Projektionen, approximierbare und kompakte Operatoren

V.1 Finite Operatoren

Definition V.1.1 (Finiter Operator)
Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ von einem normierten Raum X in einen normierten Raum Y heißt genau dann **finit** oder **finiter Operator**, wenn $\dim R(T) = \dim T(X) < \infty$. Die Dimension des Bildraumes wird auch als Rang bezeichnet. Wir bezeichnen die Menge aller finiten Operatoren mit $\mathcal{F} \coloneqq \{\, T \in \mathcal{L}(X, Y) \mid T \text{ finiter Operator} \,\}$.

Für $a \in X'$ und $y \in Y$ sei $a \otimes y \colon X \to Y$ durch $(a \otimes y)(x) \coloneqq \langle x, a\rangle y$ definiert. Es ist $a \otimes y$ ein finiter Operator mit $\operatorname{rank}(a \otimes y) = \dim R(a \otimes y) \leqslant 1$. Ferner gilt $\|a \otimes y\| = \|a\|\|y\|$. Denn $\|a \otimes y\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|(a \otimes y)(x)\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|\langle x, a\rangle y\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\langle x, a\rangle| \|y\| = \|a\|\|y\|$.

Satz V.1.2
Es ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ genau dann finit, wenn $a_1, \dots, a_n \in X'$ und $y_1, \dots, y_n \in Y$ mit $T = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes y_i$ existiert.

Beweis:
„$\Leftarrow$“ klar

„$\Rightarrow$“ Sei $n \coloneqq \dim R(T)$. Wir betrachten die kanonische Faktorisierung:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q"'] & Y \\ X/_{N(T)} \arrow[r, "T_0"] & R(T) \arrow[u, "J"'] \end{tikzcd}$$

mit $\|T_0\| = \|T, T_0[x]\| \coloneqq Tx, \|Q\| \leqslant 1$ und $\|J\| \leqslant 1$. Wir wählen in $R(T)$ eine Basis $y_1, \dots, y_n$. Weil T_0 eineindeutig von $X/_{N(T)}$ auf $R(T)$ ist, existiert eine Basis $[x_1], \dots, [x_n] \in X/_{N(T)}$ mit $T_0[x_i] = y_i$. Jedes Element $[x] \in X/_{N(T)}$ kann eindeutig in der Form $[x] = \sum_{i=1}^{n} \xi_i [x_i]$ dargestellt werden. Wir definieren nun Koordinatenfunktionale $\widehat{a_i}, \dots, \widehat{a_n} \in (X/_{N(T)})'$ durch $\widehat{a_i}([x]) \coloneqq \xi_i$ für $i = 1, \dots, n$. Die Funktionale $\widehat{a_i}$ sind beschränkt. Dazu definieren wir auf $X/_{N(T)}$ eine zusätzliche Norm $\|[y]\|_0 \coloneqq \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|$. Weil $X/_{N(T)}$ endlich-dimensional ist, ist die Norm $\|\cdot\|_0$ zur ursprünglichen Norm $\|\cdot\|$ äquivalent (nach **??**), d. h. $\exists c_0, c > 0\, \forall [x] \in X/_{N(T)} \colon c_0 \| \|[x]\| \| \leqslant \|[x]\|_0 \leqslant c\|[x]\|$. Damit folgt für $[x] = \sum_{i=1}^{n} \xi_i [x_i]$

folgendes: $|\langle [x], \widehat{a}\rangle| = |\xi_i| \leqslant \max|\xi_i| = \|[x]\|_0 \leqslant c\|[x]\|$ und somit $\|\widehat{a_i}\| \leqslant c$. Mit $Qx = [x] = \sum_{i=1}^{n} \langle [x], \widehat{a_i}\rangle [x_i] = \sum_{i=1}^{n} \langle Qx, \widehat{a_i}\rangle [x_i]$ folgt:

$$\begin{aligned} Tx = JT_0Qx = JT_0 \sum_{i=1}^{n} \langle Qx, \widehat{a_i}\rangle [x_i] &= \sum_{i=1}^{n} \langle Qx, \widehat{a_i}\rangle JT_0[x_i] \\ = \sum_{i=1}^{n} \langle Qx, \widehat{a_i}\rangle y_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, Q'\widehat{a_i}\rangle y_i &= \sum_{i=1}^{n} \langle x, a_i\rangle y_i \end{aligned}$$

Wegen $\|a_i\| = \|Q'\widehat{a_i}\| \leqslant \|Q'\|\|\widehat{a_i}\| = \|Q\|\|\widehat{a_i}\|$ sind die Funktionale $a \in X'$ beschränkt. Damit ist $T = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes y_i$ eine gewünschte Darstellung.

Folgerung V.1.3
Sei $T \in \mathcal{F}(X, Y), T \neq 0$. Dann gilt: $\operatorname{rank}(T) = \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid \exists a_1, \dots, a_n \in X' \,\exists y_1, \dots, y_n \in Y\colon T = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes y_i \,\}$ und $\operatorname{rank}(0) := 0$.

Beweis:
folgt aus dem Beweis zu **??** ∎

V.2 Projektionen

Definition V.2.1 (Projektion)
Eine beschränkte lineare Abbildung $P \in \mathcal{L}(X)$ von einem normierten Raum X in sich heißt genau dann **Projektion**, wenn gilt $P^2 = P$.

Satz V.2.2
Sei X ein normierter Raum und $P \in \mathcal{L}(X)$ eine Projektion. Dann sind $N(P)$ und $R(P)$ abgeschlossene Teilräume von X und es gilt, $\|P\| \geqslant 1$ oder $P = 0$.

Beweis:
Es ist $N(P) = \left\{\, x \in X \;\middle|\; Px = 0\} = P^{-1}(\{0\}) \,\right\}$ abgeschlossen, da P stetig. Es ist zu zeigen, dass $R(P)$ abgeschlossen ist. Dazu zeigen wir, dass $R(P) = N(I - P)$. Für die Inklusion $\supseteq$ gilt: $x \in N(I-P) \Rightarrow (I-P)x = 0 \Rightarrow Px = x \in R(P)$. Für die umgekehrte Inklusion $\subseteq$ haben wir: $x \in R(P) \Rightarrow \exists y \in X\colon Py = x \Rightarrow Px = P^2y = Py = x \Rightarrow x - Px = 0 \Rightarrow (I-P)x = 0 \Rightarrow x \in N(I-P)$. Nun können wir abschätzen: $\|P\| = \|P^2\| \leqslant \|P\|\|P\| = \|P\|^2$. Für den Fall $P > 0$ ist $\|P\| \neq 0 \Rightarrow 1 \leqslant \|P\|$. Wenn $P = 0$, dann ist auch $\|P\| = 0$. ∎

Satz V.2.3
Sei X ein Banachraum, $E \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum und $F \subset X$ ein Teilraum mit $X = E \oplus F$. Dann existiert eine Projektion $P \in \mathcal{L}(X)$ mit $R(P) = E$ und $N(P) = F$, genau dann, wenn F abgeschlossen ist.

Beweis:
Es ist nur die Rückrichtung zu beweisen. Denn die Gegenrichtung ist trivial, weil $N(P)$ abgeschlossen ist. Sei daher $\widetilde{X} := E \times F$ mit $\|x_E, x_F\| = \|x_E\| + \|x_F\|$. Also ist $\widetilde{X}$ ein Banachraum, weil sowohl E wie auch F als abgeschlossene Teilräume des Banachraumes X

ebenfalls Banachräume sind. Sei $T\colon \widetilde{X} \to X$ durch $T(x_E, x_F) \coloneqq x_E + x_F$ definiert. Dann ist T ein Isomorphismus von $\widetilde{X}$ auf X. Denn T ist injektiv, $T(x_E, x_F) = 0 \Rightarrow x_E = -x_F$. Aber da $X = E \oplus F$ und Darstellung eindeutig ist, folgt, $x_E = x_F = 0$. Die Surjektivität ist klar und die Beschränktheit ergibt sich durch: $\|T(x_E, x_F)\| = \|x_E + x_F\| \leqslant \|x_E\| + \|x_F\| = \|(x_E, x_F)\| \Rightarrow \|T\| \leqslant 1$. Es sind $\widetilde{X}$ und X Banachräume und $R(T) = X$. Damit folgt, $T \in \mathcal{L}(\widetilde{X}, X)$ sind injektiv und surjektiv und nach **??** ist $T^{-1} \in (X, \widetilde{X})$ beschränkt. Nun definieren wir $P_E\colon X \to E$ und $P_F\colon X \to F$ durch $P_E x = P_E(x_E, x_F) = x_E$ und analog. Es gilt, $P_E + P_F = 1_X$ und $P_E = I_X - P_F$ ist die gesuchte Projektion. Denn $P_E x = P_E(P_E x + P_F x) = P_E^2 x + P_E P_F x = P_E^2 x$ für alle $x \in X$. Damit ist $P_E = P_E^2$. Weiter ist P_E beschränkt, denn $T^{-1}x = (x_E, x_F) = (P_E x, P_F x)$ und $\|P_E x\| \leqslant \|P_E x\| + \|P_F x\| = \|(P_E x, P_F x)\| = \cdots = \|T^{-1}x\| \leqslant \|T^{-1}\|\|x\| \Rightarrow \|P_E\| \leqslant \|T^{-1}\| < \infty$. Schließlich ist $R(P_E) = E$ und $N(P_E) = R(I - P_E) = R(P_F) = F$. Vergleiche hierzu auch den Beweis zu **??**. ∎

Bemerkung
Der **??** besagt, dass ein abgeschlossener Teilraum E eines Banachraumes X ein abgeschlossenes Komplement F besitzt, falls E Bild einer stetigen Projektion $P \in \mathcal{L}(X)$ ist.

Definition V.2.4 (Komplementierter Teilraum)
Ein abgeschlossener Teilraum $E \subset X$ eines Banachraumes X heißt genau dann **komplementiert**, wenn ein abgeschlossener Teilraum $F \subset X$ mit $X = E \oplus F$ existiert.

Bemerkung

1. Offensichtlich ist, falls E komplementiert ist, auch F komplementiert.
2. Für die zugehörige Projektion $P \coloneqq P_E$ und $P_F = I - P$ sagen wir: projiziert X auf E entlang F. Es gilt, $R(P) = E$ und $N(P) = F$.
3. Es gibt abgeschlossene Teilräume, die nicht komplementiert sind. Beispielsweise ist $c_0 \subset \ell_\infty$ nicht komplementiert in ℓ_∞, d. h. es gibt keine Projektion $P \in \mathcal{L}(\ell_\infty)$ mit $P(\ell_\infty) = c_0$. (R. Whitley: American Mathematic Monthly (1966)).

V.3 Approximationszahlen und approximierbare Operatoren

Definition V.3.1 (Approximationszahl)
Seien X und Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Die n-te **Approximationszahl** von T ist definiert durch:

$$a_n(T) \coloneqq \inf\{\, \|T - A\| \mid A \in \mathcal{F}(X, Y), \operatorname{rank}(A) < n \,\}$$

Eigenschaften der Approximationszahlen

Monotonie $\|T\| = a_1(T) \geqslant a_2(T) \geqslant \cdots \geqslant 0, T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Additivität $a_{n+m-1}(T+S) \leqslant a_n(T) + a_m(S)$ für $S, T \in \mathcal{L}(X,Y)$

Multiplikativität $a_{n+m-1}(TS) \leqslant a_n(T)a_m(S)$ für $S \in \mathcal{L}(X,Y), T \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Insbesondere ist $a_n(STR) \leqslant \|S\| a_n(T) \|R\|$

Normierung Sei $\dim X \geqslant n$. Dann gilt: $a_n(I_X) = 1, I_X \colon X \to X, I_X x := x$ für $x \in X$.

Rang-Eigenschaft Sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann gilt: $a_n(T) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank}(T) < n$.

Beweis:

ergänzen

Definition V.3.2 (Approximierbarer Operator)
Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ist genau dann **approximierbar**, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $A \in \mathcal{F}(X,Y)$ mit $\|T - A\| \leqslant \varepsilon$ gibt.

Bemerkung
Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ist genau dann approximierbar, wenn $\lim a_n(T) = 0$.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Sei T approximierbar und $\varepsilon > 0$. Dann existiert $A \in \mathcal{F}(X,Y)$ mit $\|T - A\| \leqslant \varepsilon$. Für $n > m := \operatorname{rank}(A)$ mit $a_n(T) \leqslant \|T - A\| \leqslant \varepsilon \Rightarrow \lim a_n(T) = 0$.

„$\Leftarrow$" Sei $\lim a_n(T) = 0$, d. h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_\varepsilon}(T) < \varepsilon \Rightarrow \exists A \in \mathcal{F}(X,Y)\colon \operatorname{rank}(A) < n_\varepsilon$ und $\|T - A\| < \varepsilon \Rightarrow T$ ist approximierbar.

Definition V.3.3
Es bezeichne

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(X,Y) &:= \{\, T \in \mathcal{L}(X,Y) \mid T \text{ approximierbar} \,\} \\ \mathcal{L} &:= \bigcup_{X,Y} \mathcal{L}(X,Y) \\ \mathcal{F} &:= \bigcup_{X,Y} \mathcal{F}(X,Y) \\ \mathcal{A} &:= \bigcup_{X,Y} \mathcal{A}(X,Y) \end{aligned}$$

Dann ist $\mathcal{L}$ die Klasse aller Operatoren zwischen beliebigen Banachräumen, $\mathcal{F}$ die Klasse aller finiten Operatoren zwischen beliebigen Banachräumen und $\mathcal{A}$ die Klasse aller approximierbaren Operatoren zwischen beliebigen Banachräumen.

Definition V.3.4 (Operatorenideal nach Pietsch)
Für jedes Paar von Banachräumen X, Y sei $\mathcal{J}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ gegeben. Die Klasse $\mathcal{J} := \bigcup_{X,Y} \mathcal{J}(X,Y)$ heißt **Operatorenideal**, wenn:

(J1) $a \otimes y \in \mathcal{J}(X,Y)$ für $a \in X', y \in Y$.

(J2) $S, T \in \mathcal{J}(X,Y) \Rightarrow S + T \in \mathcal{J}(X,Y)$

(J3) $R \in \mathcal{L}(X_0, X), T \in \mathcal{J}(X, Y), S \in \mathcal{L}(Y, Y_0) \Rightarrow STR \in \mathcal{J}(X_0, Y_0)$

Bemerkung

1. $\lambda \in \mathbb{K}, T \in \mathcal{J}(X, Y) \Rightarrow \lambda T = \lambda I_y T I_x \in \mathcal{J}(X, Y)$. Damit ist nach der Eigenschaft (J2) das $\mathcal{J}(X, Y)$ ein linearer Teilraum von $\mathcal{L}(X, Y)$.
2. Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{J}$ nach der Eigenschaft (J1) und es gelte die obige Eigenschaft, d. h. $\mathcal{F}$ ist selbst ein Operatorenideal und zwar das kleinste. $\mathcal{L}$ ist das größte Operatorenideal.

Beweis einfügen

Definition V.3.5 (Abschluss)
Sei $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}$ ein Operatorenideal. Dann gehört $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ genau dann zum **Abschluss** $\mathrm{cl}(\mathcal{J}(X, Y))$, wenn $(T_n) \subset \mathcal{J}(X, Y)$ mit $\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$ existiert.

Bemerkung
Es ist $\mathrm{cl}(\mathcal{J}) := \bigcup_{X,Y} \mathrm{cl}(\mathcal{J}(X, Y))$ ein Operatorenideal.

Beweis:
Die Eigenschaft (J1) ist klar, denn $\mathcal{J} \subset \mathrm{cl}(\mathcal{J}) \Rightarrow a \otimes y \in \mathrm{cl}(\mathcal{J}(X, Y)), a \in X', y \in Y$. Für den Nachweis der Eigenschaft (J2) sei $S_n, T_n \in \mathcal{J}(X, Y)$ und $S_n \to S \in \mathrm{cl}(\mathcal{J}), T_n \to T \in \mathrm{cl}(\mathcal{J})$. Damit folgt, $S_n + T_n \to S + T \in \mathrm{cl}(\mathcal{J})$. Schließlich bleibt noch die Eigenschaft (J3) zu zeigen: Sei $R \in \mathcal{L}(X_0, X), T \in \mathrm{cl}(\mathcal{J}), S \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$. Dann existiert $(T_n) \subset \mathcal{J}(X, Y)$ mit $T_n \to T$. Da $\mathcal{J}$ ein Ideal ist, folgt, $ST_nR \in \mathcal{J}(X_0, Y_0)$ mit $ST_nR \to STR \in \mathrm{cl}(\mathcal{J})$. ■

Definition V.3.6 (Abgeschlossenes Operatorenideal)
Ein Operatorenideal $\mathcal{J}$ heißt genau dann **abgeschlossen**, wenn $\mathrm{cl}(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$.

Bemerkung
Sei $a(T) := \lim a_n(T)$ für $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann gilt, $a(S + T) \leqslant a(S) + a(T)$ für $S, T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $a(TS) \leqslant a(T)a(S)$ für $S \in \mathcal{L}(X, Y), T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Insbesondere $a(STR) \leqslant \|S\|a(T)\|R\|$ für $R \in \mathcal{L}(X_0, X), S \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $S \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$.

Beweis:
Aus der weiter oben bewiesenen Aussage $a_{n+m-1}(T + S) \leqslant a_n(T) + a_m(S)$ folgt, $a(T + S) \leqslant a_n(T) + a_m(S)$ und für $n, m \to \infty$ folgt schließlich, $a(T) + a(S)$. Analog können wir den Beweis zu Multiplikativität führen. ■

Satz V.3.7
Die Klasse $\mathcal{A}$ der approximierbaren Operatoren ist ein abgeschlossenes Operatorenideal.

Beweis:

1. $\mathcal{A}$ ist ein Operatorenideal. Hierfür müssen wir die Eigenschaften nachweisen:
   a) $a \otimes y \in \mathcal{A}(X, Y)$ für $a \in X', y \in Y$: klar wegen der Rang-Eigenschaft
   b) $S, T \in \mathcal{A}(X, Y) \Rightarrow a(S) = a(T) = 0 \Rightarrow a(S + T) \leqslant a(S) + a(T) = 0 \Rightarrow a(S + T) = 0 \Rightarrow S + T \in \mathcal{A}(X, Y)$ und $R \in \mathcal{L}(X_0, X), T \in \mathcal{A}(X, Y), S \in \mathcal{L}(Y, Y_0) \Rightarrow a(STR) \leqslant \|S\|a(T)\|R\| = 0 \Rightarrow STR \in \mathcal{A}(X_0, Y_0)$. Damit sind beide Eigenschaften gezeigt.

2. $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen, d. h. $\mathrm{cl}(\mathcal{A}(X,Y)) = \mathcal{A}(X,Y)$. Sei $T \in \mathrm{cl}(\mathcal{A}(X,Y))$, d. h. es existiert $(T_n) \subset \mathcal{A}(X,Y)$ mit $\|T - T_n\| \to 0$. Also $a(T) = a(T - T_n + T_n) \leqslant a(T - T_n) + a(T_n) \leqslant a_1(T - T_n) = \|T - T_n\| \Rightarrow a(T) = 0 \Rightarrow T \in \mathcal{A}(X,Y)$.

V.4 Entropiezahlen und kompakte Operatoren

Definition V.4.1 (Entropiezahl)
Seien X und Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ und n eine natürliche Zahl. Die n-te **Entropiezahl** von T ist definiert durch:

$$\mathcal{E}_n(T) \coloneqq \inf\left\{ \varepsilon \geqslant 0 \;\middle|\; \exists y_1,\dots,y_n \in Y\colon T(B_x) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (\{y_i\} + \varepsilon B_Y) \right\}$$

Eigenschaften von Entropiezahlen

Monotonie $\|T\| = \mathcal{E}_1(T) \geqslant \mathcal{E}_1(T) \geqslant \cdots \geqslant 0$

Additivität $\mathcal{E}_{nm}(T+S) \leqslant \mathcal{E}_n(T) + \mathcal{E}_m(S)$

Multiplikativität $\mathcal{E}_{nm}(TS) \leqslant \mathcal{E}_n(T)\mathcal{E}_m(S)$

Surjektivität und Injektivität $\mathcal{E}_n(TQ) = \mathcal{E}_n(T)$ für $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ und eine metrische Surjektion $Q\colon \widetilde{X} \to X$. Weiter $\mathcal{E}_n(JT) \leqslant \mathcal{E}_n(T) \leqslant 2\mathcal{E}_n(JT)$ für $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ und eine metrische Injektion $J\colon Y \to \widetilde{Y}$.

Sei $\dim X = N$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} n^{-1/N} &\leqslant \mathcal{E}_n(I_X) \leqslant 3n^{-1/N} && n = 1,2,\dots \text{ für reelle Banachräume } X \\ n^{-1/2N} &\leqslant \mathcal{E}_n(I_X) \leqslant 3n^{-1/2N} && n = 1,2,\dots \text{ für komplexe Banachräume } X \end{aligned}$$

Bemerkung
Dyadische Entropiezahlen: $e_n(T) = \mathcal{E}_{2^{n-1}}(T)$:

$$\begin{aligned} e_{n+m-1}(T+S) &= \mathcal{E}_{2^{n+m-2}}(T+S) = \mathcal{E}_{2^{n-1}\mathcal{E}_{2^{m-1}}}(T+S) \leqslant \mathcal{E}_{2^{n-1}}(T) + \mathcal{E}_{2^{m-1}}(S) \\ &= e_n(T) + e_m(S) \\ e_{n+m-1}(TS) &\leqslant e_n(T)e_m(S) \end{aligned}$$

Beweis:

(1) $\|T\| = \mathcal{E}_1(T)$: $\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\| \Rightarrow T(B_x) \subseteq \|T\|B_y \Rightarrow \mathcal{E}_1(T) \leqslant \|T\|$. Sei $\mathcal{E} > \mathcal{E}_1 \Rightarrow \exists y \in Y$: $T(B_x) \subset \{y\} + \varepsilon B_y$, d.h. für alle $x \in B_x$ existieren $z_+ \in B_y$ mit $Tx = y + \varepsilon z_+$ und $z_- \in B_y$ mit $T(-x) = y + \varepsilon z_-$, so dass $2Tx = Tx - T(-x) = \varepsilon(z_+ - z_-) \Rightarrow Tx = \varepsilon/2(z_+ - z_-)$ und $\|Tx\| = \varepsilon/2\|z_+ - z_-\| \leqslant \varepsilon/2\|z_+\| + \|z_-\| \leqslant \varepsilon \Rightarrow \|T\| \leqslant \varepsilon \Rightarrow \|T\|\mathcal{E}_1(T)$.

(2) Übung

(3) Übung

(4) Surjektivität: Es gilt: $(TQ)(\mathring{B}_{\tilde{x}}) = T(\mathring{B}_x) \Rightarrow \mathcal{E}_n(TQ) = \mathcal{E}_n(T)$.

Injektivität: $\mathcal{E}_n(JT) \leqslant \|J\|\mathcal{E}_n(T) = \mathcal{E}_n(T) \leqslant 2\mathcal{E}_n(JT)$, da J metrische Injektion ist, folgt, $\|J\| = 1$. Für $\delta > 0$ existieren $\widetilde{y_1}, \dots, \widetilde{y_n} \in \widetilde{Y}$ mit

$$(JT)(B_x) \subset \bigcup_{i=1}^{n}(\{\widetilde{y_i}\} + \underbrace{(\mathcal{E}_n(JT) + \delta)}_{=:\, r} B_{\widetilde{Y}}) \tag{V.1}$$

Wir zeigen, dass $y_i \in Y$ und $\{\widetilde{y_i}\} + rB_{\widetilde{Y}} \subset \{Jy_i\} + 2rB_{\widetilde{Y}}$ existieren: Für $\widetilde{y_i} \in \widetilde{Y}$ wählen wir $\widetilde{z_i} \in (JT)(B_x) \cap (\{\widetilde{y_i}\} + rB_{\widetilde{Y}})$. Dann gilt, $\{\widetilde{y_i}\} + rB_{\widetilde{Y}} \subset \{\widetilde{z_i}\} + 2rB_{\widetilde{Y}}$. Denn es existieren $\widetilde{v} \in B_{\widetilde{Y}}$ mit $\widetilde{z_i} = \widetilde{y_i} + r\widetilde{v}$ und für $x \in \{\widetilde{y_i}\} + rB_{\widetilde{Y}}$ gilt, $x = \widetilde{y_i} + r\widetilde{u}$ mit $\widetilde{u} \in B_{\widetilde{Y}}$. Es folgt, $x = \widetilde{z_i} + r(\widetilde{u} - \widetilde{v}) \in \{\widetilde{z_i}\} + 2rB_{\widetilde{Y}}$. Wegen $\widetilde{z_i} \in (JT)(B_x)$ existieren $y_i \in Y$ mit $\widetilde{z_i} = Jy_i$. Somit ist $x \in \{Jy_i\} + 2rB_{\widetilde{Y}}$. Ferner gilt:

$$(\{Jy_i\} + 2rB_{\widetilde{Y}}) \cap J(Y) = \{Jy_i\} + 2rJ(B_y) \tag{V.2}$$

Die **??** wird über die zwei Teilmengenbeziehungen bewiesen. Die Inklusion $\supseteq$ ist klar, da $J(B_y) \subseteq B_{\widetilde{Y}}$. Daher betrachten wir nun die Beziehung $\subseteq$. Hierfür sei $z \in \{Jy_i\} + 2rB_{\widetilde{Y}}$, d.h. $z = Jy_i + 2r\widetilde{u}$ mit $\widetilde{u} \in B_{\widetilde{Y}}$. Wegen $z \in J(Y)$ und $Jy_i \in J(Y)$ ist $\widetilde{u} \in B_{\widetilde{Y}} \cap J(Y)$. Damit existiert ein $v \in Y, Jv = \widetilde{u}$ und mit $\|v\| = \|Jv\| = \|\widetilde{u}\| \leqslant 1$ folgt, $v \in B_y$. Dies impliziert $z = J\widetilde{y} + 2rJv \Rightarrow z \in \{J\widetilde{y}\} + 2rJ(B_Y)$. Also folgt **??**.

Nun kombinieren wir die obigen Inklusionen und es folgt, $(\{\widetilde{y_i}\} + rB_{\widetilde{y}}) \cap J(Y) \subset \{Jy_i + 2rJ(B_y) = J(\{y_i\} + 2rB_y) \Rightarrow (JT)(B_x) = (JT)(B_X) \cap J(Y) \subset \bigcup_{i=1}^{n}(\{\widetilde{y_i}\} + rB_{\widetilde{Y}}) \cap J(Y) \subset \bigcup_{i=1}^{n} J(\{y_i\} + 2rB_Y) = J(\bigcup_{i=1}^{n}\{y_i\} + 2rB_Y) \Rightarrow J(T(B_x)) \subset J(\bigcup_{i=1}^{n}(\{y_i\} + 2rB_y)) \Rightarrow T(B_x) \subset \bigcup_{i=1}^{n}\{y_i\} + 2rB_y \Rightarrow \mathcal{E}_n(T) \leqslant 2r = 2(\mathcal{E}_n(JT) + \delta) \Rightarrow \mathcal{E}_n(T) \leqslant 2\mathcal{E}_n(JT)$.

(5) $I_x(B_x) = B_x \subset \bigcup_{i=1}^{n}(\{x_i\} + \varepsilon B_x)$
Wir betrachten das folgende Volumenmaß: $\mathrm{vol}_N(M) \coloneqq \lambda_N(A(M))$, wobei λ_N das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ ist. Weiter sind $A\colon X \to \mathbb{R}^n$ lineare Isomorphismen, M ist eine Borelmenge in X. Es gilt die Translationsinvarianz:

$$\mathrm{vol}_N(\{x\} + M) = \mathrm{vol}_N(M) \qquad x \in X \tag{V.3}$$

Es gilt: $0 < \mathrm{vol}_N(B_x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{vol}_N(\{x_i\} + \varepsilon B_x) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{vol}_N(\varepsilon B_x) = n\,\mathrm{vol}_N(\varepsilon B_x)$. Mit Anwendung der Transformationsformel können wir den folgenden Schluss ziehen: $\mathrm{vol}_N(\varepsilon B_x) = \lambda_N(A(\varepsilon B_x)) = \lambda_N(\varepsilon A(B_x)) = |\det \varepsilon I_N|\lambda_N(A(B_x)) = \varepsilon^N \mathrm{vol}_N(B_x) \Rightarrow 0 <$

$\mathrm{vol}_N(B_x) \leqslant n\varepsilon^N \mathrm{vol}_N(B_x) \Rightarrow 1 \leqslant n\varepsilon^N \Rightarrow n^{-1/N} \leqslant \varepsilon \Rightarrow n^{-1/N} \leqslant \mathcal{E}_n(I_x)$. Offensichtlich gilt: $\mathcal{E}_n(I_x) \leqslant \mathcal{E}_1(I_x) = \|I_x\| = 1$.

Sei $0 < \varepsilon < \mathcal{E}_n(I_X) \leqslant 1$. Wir zeigen, dass $x_1, \dots, x_n \in B_x$ existieren mit $\|x_i - x_j\| > \mathcal{E}$ für $i \neq j$. Sei $x_1 \in B_x$. Dann ist $B_x \setminus (\{x_1\} + \varepsilon B_x)$ nichtleer und es existiert ein $x_2 \in B_x$ mit $\|x_2 - x_1\| > \varepsilon$. Also ist auch $B_x \setminus \bigcup_{i=1}^{2}(\{x_i\} + \varepsilon B_x)$ nicht leer. Induktiv können wir dann folgern, dass $B_x \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1}(\{x_i\} + \varepsilon B_x)$ nichtleer ist und somit ein $x_n \in B\colon x$ mit $\|x_i - x_n\| > \varepsilon$ für $i = 1, \dots, n-1$ existiert. Nach Konstruktion sind die Kugeln $\{x_i\} + \varepsilon/2 B_x$ für $i = 1, \dots, n+1$ disjunkt und es gilt: $\{x_i\} + \varepsilon/2 B_x \subset B_x + \varepsilon/2 B_x \subset 3/2 B_x$. Damit ist auch die obige Vereinigung eine Teilmenge von $3/2 B_x$. Damit folgt, $n \,\mathrm{vol}_N(\varepsilon/2 B_x) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{vol}_N(\varepsilon/2 B_x) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{vol}_N(\{x_i\} + \varepsilon/2 B_x) = \mathrm{vol}_N(\bigcup_{i=1}^{n}(\{x_i\} + \varepsilon/2 B_x) \leqslant \mathrm{vol}_N(\varepsilon/2 B_x))$ und weiter $n(\varepsilon/2)^N \mathrm{vol}_N(B_x) = n \,\mathrm{vol}_N(\varepsilon/2 B_x) \leqslant \mathrm{vol}_N(3/2 B_x) = (3/2)^N \mathrm{vol}_N(B_x)$. Da $\mathrm{vol}_N(B_x) > 0$ ist, haben wir, $n(\varepsilon/2)^N \leqslant (3/2)^N$ und insgesamt $\varepsilon \leqslant 3n^{-1/N}$. Damit ergibt sich $\mathcal{E}_n(I_x) \leqslant 3n^{-1/N}$.

Bemerkung

(i) Der Beweis für $\mathbb{C}$-Banachräume ändert sich nur dahingehend, dass $A\colon X \to \mathbb{C}^N$ ein Isomorphismus ist, der auch als $\widetilde{A}\colon X \to \mathbb{R}^{2N}$ aufgefasst werden kann.

(ii) Die 2 aus der Eigenschaft (4) ist optimal, d. h. sie kann nicht verkleinert werden.

(iii) Wir wir in Beweisschritt (3) gesehen haben, ist es egal, ob wir in der Definition von $\mathcal{E}_n$ die offenen Kugeln $\mathring{B}_\varepsilon(y_i)$ oder die abgeschlossenen Kugeln $B_\varepsilon(y_i)$ verwenden, da wir in normierten Räumen arbeiten.

Beispiel
Sei $I\colon \ell_1 \to c_0$ mit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto I(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist offensichtlich $\mathcal{E}_n(I) = 1$ für alle natürlichen Zahlen n. Andererseits gilt, $\lim \mathcal{E}_n(JI) = 1/2$, wobei $J\colon c_0 \to \ell_\infty$ die natürliche Einbettung von c_0 in ℓ_∞ sein sol. Wenn wir $\mathcal{E}_n(I) \leqslant c\mathcal{E}_n(JI)$ haben wollen, folgt: $1 = \lim \mathcal{E}_n(I) \leqslant c \lim \mathcal{E}_n(JI) = c^{1/2} \Rightarrow c \geqslant 2$. Damit ist $c = 2$ optimal in der Ungleichung zu Eigenschaft (4).

Definition V.4.2 (Kompakt)
Seien X und Y Banachräume. Dann heißt $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ genau dann **kompakt**, wenn $T(B_1(0))$ präkompakt ist.

Lemma V.4.3
Sei $\mathcal{E}(T) \coloneqq \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_n(T)$ für $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann ist T genau dann kompakt, wenn $\mathcal{E}(T) = 0$.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ kompakt und $\varepsilon > 0$. Dann existieren $y_1, \dots, y_{n(\varepsilon)} \in Y$ mit $T(B_1(0)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n(\varepsilon)}(\{y_i\} + \varepsilon B_1(0)) \Rightarrow \mathcal{E}_n(T) \leqslant \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_\varepsilon$. Also ist $\lim \mathcal{E}_n(T) = 0$.

„$\Leftarrow$“ Sei $\mathcal{E}(T) = 0$ und $\varepsilon > 0$. Dann existieren $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{E}_{n(\varepsilon)}(T) < \varepsilon$ und damit existieren $y_1, \dots, y_{n(\varepsilon)} \in Y$ mit $T(B_1(0)) \subset \bigcup_{i=1}^{n(\varepsilon)}(\{y_i\} + \varepsilon B_1(0))$. Also ist $B_1(0)$ präkompakt und T kompakt.

Definition V.4.4

(i) $\mathcal{K}(X,Y) := \{T \in \mathcal{L}(X,Y) \mid T \text{ kompakt}\}$

(ii) $\mathcal{K} := \bigcup_{X,Y} \mathcal{K}(X,Y)$ die Klasse der kompakten Operatoren zwischen beliebigen Banachräumen.

Satz V.4.5
Es ist $\mathcal{K}$ ein abgeschlossenes Operatorenideal in $\mathcal{L}$.

BEWEIS:

(J1) $a \otimes y \in \mathcal{K}(X,Y), \forall a \in X', y \in Y$. Klar, da in endlich-dimensionalen Räumen jede beschränkte Menge präkompakt ist.

(J2) Sei $S,T \in \mathcal{K}(X,Y) \Rightarrow \mathcal{E}(S) = 0 = \mathcal{E}(T)$. Außerdem gilt: $\mathcal{E}_{n^2}(S+T) \leqslant \mathcal{E}_n(S) + \mathcal{E}_n(T) \Rightarrow 0 \leqslant \mathcal{E}(S+T) \leqslant \mathcal{E}(S) + \mathcal{E}(T) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}(S+T) = 0 \Rightarrow S+T \in \mathcal{K}(X,Y)$

(J3) $S \in \mathcal{L}(X_0, X), T \in \mathcal{K}(X,Y), R \in \mathcal{L}(Y,Y_0)$, d. h. $\mathcal{E}(T) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_n(RTS) \leqslant \|R\|\mathcal{E}_n(T)\|S\| \Rightarrow 0 \leqslant \mathcal{E}(RTS) \leqslant \|R\|\mathcal{E}(T)\|S\| = 0 \Rightarrow \mathcal{E}(RTS) = 0 \Rightarrow RTS \in \mathcal{K}(X,Y)$.

Schließlich ist noch zu zeigen, dass $\mathcal{K}$ abgeschlossen ist. Dazu sei $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{K}(X,Y)$ mit $\|T_n - T\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow 0 \leqslant \mathcal{E}(T) = \mathcal{E}(T - T_n + T_n) \leqslant \mathcal{E}(T - T_n) + \mathcal{E}(T_n) \leqslant \|T - T_n\| + 0 \Rightarrow \mathcal{E}(T) = 0 \Rightarrow T \in \mathcal{K}(X,Y)$. ∎

Definition V.4.6

(i) $\mathfrak{J}$ ist genau dann ein surjektives Operatorenideal, wenn $\forall \widetilde{X}, X, Y$ Banachräume, $\forall Q \in \mathcal{L}(\widetilde{X}, X)$ metrische Surjektionen, $\forall T \in \mathcal{L}(X,Y)\colon TQ \in \mathfrak{J}(\widetilde{X}, Y) \Rightarrow T \in \mathfrak{J}(X,Y)$

(ii) $\mathfrak{J}$ ist genau dann ein injektives Operatorenideal, wenn $\forall X, Y, \widetilde{Y}$ Banachräume, $\forall J \in \mathcal{L}(Y, \widetilde{Y})$ metrische Injektionen und $\forall T \in \mathcal{L}(X,Y)\colon JT \in \mathfrak{J}(X, \widetilde{Y}) \Rightarrow T \in \mathfrak{J}(X,Y)$

(iii) $\mathfrak{J}$ ist genau dann ein bijektives Operatorenideal, wenn $\mathfrak{J}$ injektiv und surjektiv ist.

Satz V.4.7
Es ist $\mathcal{K}$ ein bijektives Operatorenideal.

BEWEIS:
Für die Injektivität sie $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $J \in \mathcal{L}(Y, \widetilde{Y})$ eine metrische Injektion mit $JT \in \mathcal{K}(X,Y)$. Dann folgt, $\mathcal{E}_n(T) \leqslant 2\mathcal{E}_n(JT)$. Nun gehe n gegen unendlich. Dann haben wir: $0 \leqslant \mathcal{E}(T) \leqslant 2\mathcal{E}(JT) = 2 \cdot 0 = 0$. Also ist $\mathcal{E}(T) = 0$ und $T \in \mathcal{K}(X,Y)$.

Für die Surjektivität sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $Q \in \mathcal{L}(\widetilde{X}, X)$ eine metrische Surjektion mit $TQ \in \mathcal{K}(X,Y)$. Dann folgt, $\mathcal{E}_n(T) = \mathcal{E}_n(TQ)$. Für $n \to \infty$ ist $0 \leqslant \mathcal{E}(T) \leqslant \mathcal{E}(TQ) = 0$. Also ist $T \in \mathcal{K}(X,Y)$. ergänzen. ∎

Satz V.4.8
Sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann ist $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ genau dann, wenn $T' \in \mathcal{K}(Y', X')$ ist.

Beweis:

„⇒“ Sei $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ und $\varepsilon > 0$. Dann existieren $\mathring{y}_1, \dots, \mathring{y}_{n(\varepsilon)} \in Y$ mit $T(B_1(0)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n(\varepsilon)}(\{\mathring{y}_i\} + \varepsilon/2 B_1(0))$. Wir wählen $y_i \in T(B_1(0)) \cap (\{\mathring{y}_i\} + \varepsilon/2 B_1(0))$. Dann gilt, $\{\mathring{y}_i\} + \varepsilon/2 B_1(0) \subseteq \{y_i\} + \varepsilon B_1(0)$, denn für $y \in \{\mathring{y}_i\} + \varepsilon/2 B_1(0)$ folgt: $\|y - y_i\| \leqslant \|y - \mathring{y}_i\| + \|\mathring{y}_i - y_i\| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Somit existieren also $x_1, \dots, x_{n(\varepsilon)} \in B_1(0) \subseteq X$ mit:

$$T(B_1(0)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n(\varepsilon)} (\{Tx_i\} + \varepsilon B_1(0)) \tag{V.4}$$

Wir definieren $S\colon \ell_1^{n(\varepsilon)} \to X$ durch $S = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} e_i^* \otimes y_i$, wobei e_i^* die Koordinatenfunktionale bezüglich der kanonischen Basis sind. Damit ist $S \in \mathcal{F}(\ell_1^{n(\varepsilon)}, X)$ und es folgt, $S' \in \mathcal{F}(X', \ell_1^{n(\varepsilon)})$. Wenn wir **??** auf $S'T'$ statt auf T anwenden[1], erhalten wir die Existenz der $a_1, \dots, a_m \in B_1(0) \subseteq Y'$ mit $(S'T')(B_1(0)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m}(\{(S'T')(a_i)\} + \varepsilon B_1(0))$. Außerdem gilt $S' = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)}(k_x x_i) \otimes e_i^*$ und es folgt, $S'a = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \langle a, k_x x_i\rangle e_i^* = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \langle x_i, a\rangle e_i$. Für $a \in B_1(0) \subseteq Y'$ existiert also $a_j \in B_1(0) \subseteq Y'$ mit $\|(S'T')(a) - (S'T')(a_j)\| < \varepsilon$. Damit und wegen $Se_i = x_i$ erhalten wir: $|\langle x_i, T'a - T'a_j\rangle| = \langle Se_i, T'a - T'a_j\rangle = \langle e_j, (S'T')(a) - (S'T')(a_j)\rangle \leqslant \|e_j\| \|(S'T')(a) - (S'T')(a_j)\| = \|(S'T')(a) - (S'T')(a_j)\| < \varepsilon$. Nun können wir ein $x \in X$ mit $\|T'(a) - T'(a_j)\| \leqslant 2|\langle x, T'(a) - T'(a_j)\rangle|$ wählen. Ferner existiert ein $x_i \in B_1(0) \subseteq X$ mit $\|T(x) - T(x_i)\| < \varepsilon$. Zusammengefasst erhalten wir damit: $\|T'(a) - T'(a_j)\| \leqslant 2|\langle x, T'(a) - T'(a_j)\rangle| \leqslant 2|\langle x_i, T'(a) - T'(a_j)\rangle| + 2|\langle x - x_i, T'(a) - T'(a_j)\rangle| \leqslant 2\varepsilon + 2|\langle x - x_i, T'(a) - T'(a_j)\rangle| = 2\varepsilon + 2|\langle T(x) - T(x_i), a - a_j\rangle| \leqslant 2\varepsilon + 2\|T(x) - T(x_i)\| \|a - a_j\| \leqslant 2\varepsilon + 2\varepsilon\|a - a_j\| \leqslant 6\varepsilon$. Somit gilt $T'(B_1(0)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m}(\{T'(a_j)\} + 6\varepsilon B_1(0))$. Also ist $T' \in \mathcal{K}(Y', X')$.

- Sei $T' \in \mathcal{K}(Y', X')$. Dann ist $T'' \in \mathcal{K}(x'', Y'')$ und wegen **??** Punkt (i) folgt, $K_y T = T'' K_X \in \mathcal{K}(X, Y'')$. Da K_y laut **??** eine metrische Injektion ist und $\mathcal{K}$ nach **??** ein bijektives (und damit injektives) Operatorenideal ist, folgt $T \in \mathcal{K}(X,Y)$.

Bemerkung

$\forall 0 < p < \infty\, \exists c_p \geqslant 1\, \forall X, Y$ Banachräume, $\forall T \in \mathcal{L}(X,Y)\, \forall n \in \mathbb{N}\colon \sum_{k=1}^{n} e_k^p(T') \leqslant c_p \sum_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j^p(T)$ mit $e_k = \mathcal{E}_{2^{k-1}}$. Speziell für $p = 1$: $\sum_{k=1}^{n} e_k(T') \leqslant c \sum_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j(T)$ und $e_n(T') \leqslant 1/n \sum_{k=1}^{n} e_k(T') \leqslant c/n \sum_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j(T) \Rightarrow \mathcal{E}_n(T) \to 0 \Rightarrow e_n(T') \to 0 \Rightarrow \mathcal{E}_n(T) \to 0$.

Satz V.4.9

(i) Sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann gilt $\mathcal{E}(T) = \lim \mathcal{E}_n(T) \leqslant \lim a_n(T) =: a(T)$.

(ii) Es ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$.

Beweis:

(i) Mit **??** folgt mit $n \to \infty$, dass $\mathcal{E}(T) \leqslant a_m(T) \Rightarrow \mathcal{E}(T) \leqslant a(T)$.

(ii) $T \in \mathcal{A} \Leftrightarrow a(T) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}(T) = 0 \Rightarrow T \in \mathcal{K}$.

[1] Es ist $S'T'$ auch kompakt, da S' in endlich-dimensionalen $\ell_1^{n(\varepsilon)}$ abbildet, in dem $T(B_1(0))$ als beschränkte Menge präkompakt ist.

Bemerkung
Es ist $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{K}$ nach Enflo (1972–1974).

Lemma V.4.10
Sei $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann gilt folgende Ungleichung für $n, m \in \mathbb{N}$: $\mathcal{E}_n(T) \leqslant a_m(T) + 6\|T\|n^{-1/m}$ (X, Y reelle Banachräume) und $\mathcal{E}_n(T) \leqslant a_m(T) + 6\|T\|n^{-1/2m}$ (X, Y komplexe Banachräume).

Teil II

Höhere Analysis II

VI Elemente der Hilbertraumtheorie

VI.1 Prähilbert- und Hilberträume

Definition VI.1.1 (Skalarprodukt)
Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\langle : , : \rangle \colon X \times X \to \mathbb{K}$ heißt genau dann **Skalarprodukt**, wenn folgende Eigenschaften gelten:

(i) Positive Definitheit: $\forall x \in X \colon \langle x, x \rangle \geqslant 0 \wedge \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

(ii) Konjugierte Symmetrie: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ für $x, y \in X$.

(iii) Homogenität: $\forall x, y \in X \, \forall \alpha \in \mathbb{K} \colon \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

(iv) Distributitivität: $\forall x, y, z \in X \colon \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Folgerung VI.1.2
Aus den oben formulierten Eigenschaften lässt sich folgern:

1. $\forall x, y \in X \, \forall \alpha \in \mathbb{K} \colon \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$
2. $\forall x, y, y \in X \colon \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

Bemerkung
Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist das Skalarprodukt bilinear, d. h. $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ und für den Körper der komplexen Zahlen müssen die Skalare aus dem zweiten Argument konjugiert komplex herausgezogen werden.

Lemma VI.1.3
Sei X ein Vektorraum mit dem Skalarprodukt. Dann gilt die Cauchy-Schwartzsche Ungleichung:

$$\forall x, y \in X \colon |\langle x, y \rangle|^2 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn x und y linear abhängig sind. Durch $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle} \colon X \to [0, \infty)$ wird auf X eine Norm definiert.

Beweis:
Zunächst sei bemerkt, dass $\langle x, y \rangle = 0$, falls $x = 0 = y$. Die Cauchy-Schwartzsche Ungleichung ist für den Fall $y = 0$ trivial. Daher sei $y \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x + \lambda y \rangle + \langle \lambda y, x + \lambda y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, \lambda y \rangle + \langle \lambda y, x \rangle + \langle \lambda y, \lambda y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle
\end{aligned}$$

Nun setzen wir $\lambda := -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ und erhalten:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant -\frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\overline{\langle x, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle^2}\langle y, y\rangle \\ \Rightarrow 0 &\leqslant \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} \end{aligned}$$

Für $\sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ sind die Normeigenschaften nachzuweisen. Im folgenden wird nur auf die Dreiecksungleichung eingegangen:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\Re\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Bemerkung
Mit $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ kann die CAUCHY-SCHWARTZsche Ungleichung auch geschrieben werden: $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$.

Definition VI.1.4 (Prähilbertraum, Hilbertraum)

1. Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt genau dann **Prähilbertraum**, wenn ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $X \times X$ mit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ für $x \in X$ existiert.
2. Ein vollständiger Prähilbertraum heißt **Hilbertraum**.

Bemerkung
In einem Prähilbertraum H kann nicht nur die Norm durch das Skalarprodukt ausgedrückt werden, sondern auch das Skalarprodukt durch die Norm. Für $x, y \in H$ gilt:

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}\colon \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}\colon \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$$

BEWEIS:
Die Aussage wird nur für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bewiesen: $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle - \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle - \langle y, y\rangle = 4\langle x, y\rangle$. ■

Lemma VI.1.5
Das Skalarprodukt eines Prähilbertraumes ist eine stetige Abbildung.

BEWEIS:
Die Aussage folgt aus der Abschätzung: $|\langle x, y\rangle - \langle a, b\rangle| = |\langle x-a, y\rangle + \langle a, y-b\rangle| \leqslant |\langle x-a, b\rangle| + |\langle a, y-b\rangle| \leqslant \|x-a\|\|y\| + \|a\|\|y-b\|$. ■

Satz VI.1.6 (Parallelogrammgleichung)
Ein normierter Raum X ist genau dann ein Prähilbertraum, wenn für $x, y \in X$ die **Parallelogrammgleichung**:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \tag{VI.1}$$

erfüllt ist.

Satz VI.1.7

(i) Ein normierter Raum X ist genau dann ein Prähilbertraum, wenn alle zweidimensionalen Teilräume Prähilberträume sind.

(ii) Teilräume von Prähilberträumen sind Prähilberträume.

(iii) Die Vervollständigung eines Prähilbertraumes ist ein Hilbertraum.

VI.2 Projektionssatz und Orthogonalität

Definition VI.2.1 (Konvexe Menge)
Eine Teilmenge $K \subset X$ eines normierten Raumes X heißt genau dann **konvex**, wenn für alle $a, b \in K$ und für alle $0 \leqslant t \leqslant 1$ gilt: $(1-t)a + tb \in K$.

Satz VI.2.2 (Projektionssatz)
Sei K eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge eines Hilbertraumes H. Dann existiert für jedes $x \in H$ genau ein $k \in K$ mit $\|x-k\| := d(x,k) = \inf\{\, \|x-n\| \mid n \in K \,\}$. Die Abbildung $P \colon H \to H$ mit $Px = k$ heißt **Projektion**, d. h. $P^2 = P$. Im Allgemeinen ist sie nicht linear.

Hier weiter machen

Beweis:
Für $x \in K$ ist die Aussage trivial. Daher sei $x \notin K$.

fehlende Vorlesungen ergänzen

$$\langle x - P_2 x, n \rangle = 0 \qquad n \in L \tag{VI.2}$$

Satz VI.2.3
Sei $\{0\} \subsetneq L \subsetneq H$. Dann existiert eine Projektion $P_L \in \mathcal{L}(L)$ von H auf L ($P_L(H) = L$) mit $\|P_L\| = 1$ und $N(P_L) = L^\perp$. Es ist $I - P_L$ eine Projektion von H auf $L^\perp$ mit $\|I - P_L\| = 1$.

Beweis:
Es ist klar, dass P_L linear ist.

en

Es gilt, $R(P_L) = L$ (trivial) und $N(P_L) = L^{\perp}$. Nach der Formel (1)**??** gilt, $P_L x = 0 \Leftrightarrow x \in L^{\perp}$. Denn wegen $P_L x = 0$ folgt, $\langle x, n\rangle = \langle x - P_L x, n\rangle = 0 \Rightarrow x \in L^{\perp}$. In der anderen Richtung sei $x \in L^{\perp} \Rightarrow 0 = \langle x - P_L x, n\rangle = \langle x, n\rangle - \langle P_L x, n\rangle = -\langle P_L x, n\rangle$ für alle $n \in L$. Daraus folgt, $P_L \in L^{\perp}$. Andererseits ist $P_L x \in L$. Also ist $P_L x \in L^{\perp} \cap L \Rightarrow \|P_L x\|^2 = \langle P_L x, P_L x\rangle = 0 \Rightarrow P_L x = 0$. Damit folgt, $N(P_L) = L^{\perp}$.

Damit ist auch $I - P_L$ eine Projektion mit $R(I - P_L) = N(P_L) = L^{\perp}$ und $N(I - P_L) = R(P_L) = L$.

Es gilt, $H = L \oplus_2 L^{\perp}$, $x = u + v$, $u \in L$, $v \in L^{\perp}$, $\|x\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. Nach dem Satz von Pythagoras hat man $\|x\|^2 = \|P_L x + (I - P_L)x\|^2 = \|P_L x\|^2 + \|(I - P_L)x\|^2$. Das zeigt, $H = L \oplus L^{\perp}$. Ferner gilt, $\|P_L\| = 1$ und $\|I - P_L\| = 1$. Dies folgt aus $\|P_L x\| \leqslant \|x\|$, $\|(I - P_L)x\| \leqslant \|x\|$ und $\{0\} \subsetneq L \subsetneq H$. Wegen $P_L \neq 0$ und $I - P_L \neq 0$ folgt einerseits aus $0 < \|P_L\| = \|P_L^2\| \leqslant \|P_L\|^2$, dass $1 \leqslant \|P_L\|$. Analog ist $1 \leqslant \|I - P_L\|$. Ferner hat man $\|P_L x\| \leqslant \|x\|$ und $\|(I - P_L)x\| \leqslant \|x\|$ impliziert $\|P_L\|, \|I - P_L\| \leqslant 1$. Also $\|P_L\| = \|I - P_L\| = 1$. ∎

Folgerung VI.2.4
Für einen linearen Teilraum $L \subseteq H$ eines Hilbertraumes H gilt:

$$\operatorname{cl} L = (L^{\perp})^{\perp}$$

Beweis:
Zunächst gilt, $(\operatorname{cl} L)^{\perp} = L^{\perp}$. Denn $(\operatorname{cl} L)^{\perp} = (\operatorname{cl}(\operatorname{span} L))^{\perp} = L^{\perp}$. Wegen der Eigenschaft 3genügt es zu zeigen, $(L^{\perp})^{\perp} \subset \operatorname{cl} L$. Nach dem **??** ist $H = \operatorname{cl} L \oplus_2 (\operatorname{cl} L)^{\perp} = \operatorname{cl} L \oplus_2 L^{\perp}$. Link einbauen
Sei $x \in (L^{\perp})^{\perp}$. Wegen $x = u + v$ mit $u \in \operatorname{cl} L$ und $v \in L^{\perp}$ gilt, $0 = \langle x, v\rangle = \langle u + v, v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle = 0 + \langle v, v\rangle = 0 + \|v\|^2$. Damit muss auch $v = 0$ gelten. Also ist $x = u \in \operatorname{cl} L$.

Alternativer Beweis: Wegen $(\operatorname{cl} L)^{\perp} = L^{\perp}$ folgt mit **??** $I - P_{\operatorname{cl} L} = P_{(\operatorname{cl} L)^{\perp}} = P_{L^{\perp}}$ und $I - P_{L^{\perp}} = P_{(L^{\perp})^{\perp}}$ folgt, $P_{\operatorname{cl} L} = P_{(L^{\perp})^{\perp}}$. Daraus folgt, $\operatorname{cl} L = P_{\operatorname{cl} L}(H) = P_{(L^{\perp})^{\perp}}(H) = (L^{\perp})^{\perp}$. ∎

Bemerkung
Als eine Folgerung von **??** erhalten wir eine Verschärfung des Riesz-Lemmas für abgeschlossene lineare Teilräume $\emptyset \neq L \subsetneq H$ eines Hilbertraumes.

$$\exists x \in H\colon \|x\| = \operatorname{dist}(x, L) = 1$$

Beweis:
$\operatorname{dist}(x, L) = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{cl} L = L$. Für $x_0 \in H \setminus L$ gilt, $\operatorname{dist}(x_0, L) > 1$. Nach dem **??** existiert ein $k \in L$, so dass $\|x_0 - k\| = \operatorname{dist}(x_0, L)$. Wir setzen $x := \frac{x_0 - k}{\|x_0 - k\|}$. Dann ist $\|x\| = 1$ und für $u \in L$ folgt: $\|x - u\| = \|\frac{x_0 - k}{\|x_0 - k\|} - u\| = \frac{1}{\|x_0 - k\|}\|x_0 - (k + \|x_0 - k\|u)\| \Rightarrow\geqslant \frac{\operatorname{dist}(x_0, L)}{\operatorname{dist}(x_0, L)} = 1$. Damit folgt, $\operatorname{dist}(x, L) \geqslant 1$. Für $u = 0$ folgt, dass $\operatorname{dist}(x, L) = \inf\{\, \|x - u\| \mid u \in L \,\} \leqslant \|x\| = 1$. Also: $\|x\| = 1$ und $\operatorname{dist}(x, L) = 1$. ∎

Der folgende *wichtige* Darstellungssatz von Funktionalen auf einem Hilbertraum wird mit Hilfe des Satzes von der Orthogonalprojektion bewiesen.

Satz VI.2.5 (Darstellungssatz von Frechet-Riesz)
Sei H ein Hilbertraum und $a \in H'$. Dann existiert genau ein $y \in H$ mit $a(x) = \langle x, y \rangle$ für alle $x \in H$. Die Abbildung $C_H \colon H \to H'$ mit $(C_H y)(x) := \langle x, y \rangle$ ist eine konjugiert lineare Isometrie von H auf H', d. h. $C_H(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha_1} C_H y_1 + \overline{\alpha_2} C_H y_2$ für $y_1, y_2 \in H$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. Ferner gilt, $\|C_H y\| = \|y\|$.

Beweis:
Es ist trivial, dass C_H konjugiert linear ist. Weiterhin ist $C_H \colon H \to H'$ ist eine konjugiert lineare Isometrie von H auf H'. Zunächst ist C_H isometrisch, d. h. $\|C_H y\| = \|y\|$: $|(C_H y)(x)| = |\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$. Letzteres folgt aus der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung. Insgesamt folgt, $\|C_H y\|_{H'} \leqslant \|y\|$.

Sei nun $y \neq 0$. Für $x = \frac{y}{\|y\|}$ gilt, $\|x\| = 1$ und $(C_H y)(x) = \langle \frac{y}{\|y\|}, y \rangle = \frac{1}{\|y\|}\langle y, y \rangle = \frac{\|y\|^2}{\|y\|} = \|y\|$.

Zur Surjektivität: Sei $a \in H'$. Falls $a = 0$, so ist $y = 0$ ein Element mit $a(x) = \langle x, y \rangle$ für alle $x \in H$. Weiterhin ist $y = 0$ eindeutig bestimmt, denn ist $y \in H$ und $a(x) = \langle x, y \rangle$ für alle $x \in H$, so folgt mit $x = y$ folgende Gleichheit: $0 = a(y) = \|y\|^2 \Rightarrow y = 0$. Sei nun $a \neq 0$. Dann ist $N = N(a) := \{ x \in H \mid a(x) = 0 \}$ abgeschlossen mit $N \subsetneq H$, da $a \neq 0$ ($\dim H \geqslant 1$). Mit **??** gilt die Darstellung $H = N \oplus_2 N^\perp$ mit $\{0\} \subsetneq N^\perp$. Für $x \in N^\perp$ und $a(x) = 0$ ist $x \in N^\perp \cap N$, d. h. $x = 0$. Somit ist für $z \in N^\perp$ mit $z \neq 0$, $\lambda := a(z) \neq 0$. Für $x \in H$ gilt: $x = u + v$ mit $u \in N$ und $v \in N^\perp$. Damit folgt, dass $v - \lambda^{-1} a(v) z \in N^\perp$ und $a(v - \lambda^{-1} a(v) z) = 0$. Dies impliziert, dass $v = \lambda^{-1} a(v) z$. Also liefert $\langle x, z \rangle = \langle u + v, z \rangle = \langle u, z \rangle + \langle v, z \rangle = 0 + \langle v, z \rangle = \lambda^{-1} a(v) \langle z, z \rangle = \lambda^{-1} a(v) \|z\|^2$ die Gleichung $a(x) = a(u) + a(v) = a(v) = \frac{\lambda}{\|z\|^2}\langle x, z \rangle \Rightarrow a(x) = \langle x, \frac{\overline{\lambda}}{\|z\|^2} z \rangle$. Wir setzen $y := \frac{\overline{\lambda} z}{\|z\|^2}$. Es folgt, $a(x) = \langle x, y \rangle$ für alle $x \in H$.

Ferner gilt, $\|a\| = \|y\|$. Denn $|a(x)| = |\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ liefert $\|a\| \leqslant \|x\|\|y\|$ und $\|y\| = \frac{|\lambda|\|z\|}{\|z\|^2} = \frac{|\lambda|}{\|z\|} = \frac{|a(z)|}{\|z\|} = |a(\frac{z}{\|z\|})| \Rightarrow \|y\| \leqslant \|a\|$. Insgesamt hat man $\|a\| = \|y\|$.

Eindeutigkeit von y: Sei $\tilde{y} \in H$ mit $a(x) = \langle x, y \rangle = \langle x, \tilde{y} \rangle$ für alle $x \in H$. Dann folgt, $\langle x, y - \tilde{y} \rangle = 0$. Wir setzen $x := y - \tilde{y}$. Dann ist $\|y - \tilde{y}\|^2 = 0$. Somit ist $y = \tilde{y}$.

Also ist $C_H y = a$ und $\|C_H y\| = \|y\|$. ∎

Satz VI.2.6
Sei H ein Hilbertraum. Dann ist H' ebenfalls ein Hilbertraum und H ist reflexiv.

Beweis:
H' ist als Dualraum automatisch vollständig. Auf H' gilt die Parallelogrammgleichung, $\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$ für $a, b \in H'$. Denn für $a, b \in H'$ existieren nach dem Riezschen Darstellungssatz $x, y \in H$ mit $a = C_H x$ und $b = C_H y$. Damit folgt mit der Parallelogrammgleichung in H un den Eigenschaften von C_H die Parallelogrammgleichung in H':

$\|a+b\|^2+\|a-b\|^2 = \|C_Hx+C_Hy\|^2+\|C_Hx-C_Hy\|^2 = \|C_H(x-y)\|^2+\|C_H(x-y)\|^2 = \|x+y\|^2+\|x-y\|^2 =^H 2(\|x\|^2+\|y\|^2) =^{C_H} 2(\|C_Hx\|^2+\|C_Hy\|^2) = 2(\|a\|^2+\|b\|^2)$

Damit ist gezeigt, dass H' ein Hilbertraum ist. Wir zeigen nun, dass das durch die Norm in H' erzeugte Skalarprodukt durch den Ansatz $\langle C_Hx, C_Hy\rangle_{H'} \coloneqq \langle y, x\rangle_H$ charakterisiert werden kann.

Eigenschaften des Skalarprodukts für $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H'}$:

- $\langle C_Hx, C_Hx\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow C_Hx = 0$.
- $\langle C_Hx, C_Hy\rangle = \langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle} = \overline{\langle C_Hy, C_Hx\rangle}$
- $\langle \alpha C_Hx + \beta C_Hy, C_Hz\rangle = \langle C_H(\overline{\alpha}x+\overline{\beta}y), C_Hz\rangle = \langle z, \overline{\alpha}x+\overline{\beta}y\rangle = \langle z, \overline{\alpha}x\rangle + \langle z, \overline{\beta}y\rangle = \alpha\langle z, x\rangle + \beta\langle z, y\rangle = \alpha\langle C_Hx, C_Hz\rangle + \beta\langle C_Hy, C_Hz\rangle$.

Mit $\|C_Hx\|_{H'} = \sqrt{\langle C_Hx, C_Hx\rangle_{H'}}$ wird auf H' eine Norm definiert, die mit der Norm auf H' nach dem Riezschen Darstellungssatz übereinstimmt.

H ist reflexiv: Wir zeigen zunächst $K_H = C_{H'} \circ C_H$. Nach Definition von K_H, $C_{H'}$ und C_H folgt, $(K_Hx)(C_Hy) = (C_Hy)(x) = \langle x, y\rangle$ und $(C_{H'}(C_Hx))(C_Hy) = \langle C_Hy, C_Hx\rangle = \langle x, y\rangle$. Damit ist $K_H = C_{H'} \circ C_H$ gezeigt. Weil $C_{H'} \circ C_H$ surjektiv ist, ist K_H surjektiv. Also ist K_H reflexiv. ∎

VI.3 Orthonormalsysteme und Orthonormalbasen

Definition VI.3.1

(i) Eine Teilmenge $A \subset H$ eines Prähilbertraumes heißt **Orthonormalsystem** genau dann, wenn $\forall e, f \in A\colon e \neq f \Rightarrow \langle e, f\rangle = 0$.

(ii) Ein Orthonormalsystem $B \subset H$ eines Hilbertraumes heißt **Orthonormalbasis** genau dann, wenn für beliebige Orthonormalsysteme A mit $B \subset A$ folgt, dass $A = B$. Eine Orthonormalbasis wird auch oft **vollständiges Orthonormalsystem** genannt.

Beispiel

(a) In $H = \ell_2$ ist die Menge $A = \{\, e_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ mit $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $x = (\xi_i), y = (\eta_i) \in \ell_2$: $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\overline{\eta_i}$. Es ist $\langle e_k, e_l\rangle = 0$ für $k \neq l$ der Einheitsvektoren eine Orthonormalbasis.

(b) Sei $H = L_2[0, 2\pi]$ und $A = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$. Dann ist A eine Orthonormalbasis.

(c) In $H = L_2[0, 2\pi]$ (komplexer Hilbertraum) ist $A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in(\cdot)} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Satz VI.3.2 (Gram-Schmidt-Verfahren)
Sei $\{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \} \subset H$ eine linear unabhängige Teilmenge eines Hilbertraumes H. Dann existiert ein Orthonormalsystem $A = \{e_1, e_2, \dots\} \subset H$ mit $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\} = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\operatorname{cl}(\operatorname{span} A) = \operatorname{cl}(\operatorname{span}\{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \})$.

Beweis:
Setzen $e_1 := \frac{e_1}{\|e_1\|}$. Betrachten $f_2 := x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1$ und $e_2 := \frac{f_2}{\|f_2\|}$. Es ist $f_2 \neq 0$, da $\{x_1, x_2\}$ linear unabhängig. Dann ist $e_1 \perp e_2$. Denn $\langle f_2, e_1\rangle = \langle x_2, e_1\rangle - \langle x_2, e_1\rangle\langle e_1, e_1\rangle = 0$.

Durch eine Vorschrift $f_{k+1} := x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i\rangle e_i$ und $e_{k+1} := \frac{f_{k+1}}{\|f_{k+1}\|}$ wird so eine Folge definiert. Nach Konstruktion ist $A = \{e_1, e_2, \dots\}$ ein Orthonormalsystem mit $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\} = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ nach Induktion. Folglich ist $\operatorname{cl}(\operatorname{span}(A)) = \operatorname{cl}(\operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots\})$. ■

Beispiel
Wendet man das Gram-Schmidt-Verfahren auf $x_n = x_n(t) = t^n$ mit $n \geqslant 0$ in $L_2[-1, 1]$ an,[1] so erhält man $e_n = e_n(t) = \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n(t)$, wobei $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}((t^2 - 1)^n)$ die so genannten Legendre-Polynome sind. Sie bilden eine Orthonormalbasis in $L_2[-1, 1]$. Der Beweis dazu ist etwas länglich.

Satz VI.3.3 (Besselsche Ungleichung)
Sei $\{ e_n \mid n \in \mathbb{N} \} \subset H$ ein Orthonormalsystem eines Hilbertraumes H und $x \in H$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle| \leqslant \|x\|^2$$

Beweis:
Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Setze $x_N := x - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n$. Dann ist $x_N \perp e_k$ für $k = 1, \dots, N$. Mit dem Satz von Pythagoras folgt, $\|x\|^2 = \|x_N\|^2 + \|\sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle\|^2 = \|x_N\|^2 + \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 \|e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$. Da N beliebig ist, folgt die Behauptung. ■

Folgerung VI.3.4
Sei $\{ e_n \mid n \in \mathbb{N} \} \subset H$ ein Orthonormalsystem eines Hilbertraumes. Dann gilt für alle $x, y \in H$: $\sum_{n=1}^{\infty} |\infty x, e_n\rangle||\langle e_n, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$.

Beweis:
Mit der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung und der Besselschen Ungleichung folgt: $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle||\langle e_n, y\rangle| \leqslant \sqrt{(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2)} \sqrt{(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, y\rangle|^2)} \leqslant \|x\|\|y\|$. ■

Lemma VI.3.5
Sei $A \subset H$ ein Orthonormalsystem eines Hilbertraumes H. Für $x \in H$ ist die Menge $A_x := \{ e \in A \mid \langle x, e\rangle \neq 0 \}$ höchstens abzählbar.

[1] Skalarprodukt: $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\, dt$

Beweis:
Nach der Besselschen Ungleichung ist jede der Mengen $A_{x,n} := \left\{ e \in A \;\middle|\; |\langle x, e_n\rangle| \geqslant \frac{1}{n} \right\}$ endlich. Denn wäre $\operatorname{card} A_{x,n} = \infty$, so wählen wir eine abzählbare Teilmenge $B \subset A_{x,n}$ mit $\operatorname{card} B = \infty$. Für B gilt einerseits, $\sum_{e\in B} |\langle x, e\rangle|^2 = \infty$. Andererseits ist nach der Besselschen Ungleichung $\sum_{e\in B} |\langle x, e\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 < \infty$↯ Daher ist $A_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{x,n}$ höchstens abzählbar. ■

Um auch im folgenden nichtseparable Hilberträume mit einzubeziehen, ist es notwendig, das Konzept der unbedingten Konvergenz einzuführen.

Definition VI.3.6
Sei X ein normierter Raum und I eine Indexmenge. Sei $x_i \in X$ für $i \in I$. Die Reihe $\sum_{i\in I} x_i$ konvergiert genau dann unbedingt gegen $x \in X$, wenn

(i) $I_0 := \{ i \in I \mid x_i \neq 0 \}$ ist höchstens abzählbar.

(ii) Für jede Aufzählung $I_0 = \{i_1, i_2, \ldots\}$ gilt Gleichung $\sum_{n=1}^{\infty} x_{i_n} = x$

Bemerkung
Der Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_{i_n}$ hängt also nicht von der Reihenfolge der Summation der x_i ab. Wir schreiben $\sum_{i\in I} x_i = x$.

Selbst für $I = \mathbb{N}$ sind die Symbole $\sum_{n\in\mathbb{N}}$ und $\sum_{n=1}^{\infty}$ zu unterscheiden.

A Übungsaufgaben

A.1 Aufgaben zu normierten Räumen

Wir betrachten Folgenräume $l_p := l_p(\mathbb{K}) := \{ x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \mid \xi_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty \}$ mit $0 < p \leqslant \infty$ und $\|x\|_p := (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p)^{1/p}$ mit $0 < p < \infty$. Weiter ist $l_\infty := l_\infty(\mathbb{K}) := \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \;\middle|\; \xi_i \in \mathbb{K}, \sup_{1 \leqslant i < \infty} |\xi_i| < \infty \right\}$. Dann kann man folgende Norm festlegen: $\|x\|_\infty := \sup_{1 \leqslant i < \infty} |\xi_i|$. Seien $x = (\xi_i), y = (\eta_i)$, so schreibt man $x \cdot y = (\xi_i \eta_i), x + y : = (\xi_i + \eta_i)$ und $\lambda x := (\lambda \xi_i)$ für $\lambda \in \mathbb{K}$.

Aufgabe 1 Man zeige die folgenden Ungleichungen:

- **Höldersche Ungleichung**: Seien $0 < r, p, q \leqslant \infty$. Dann gilt für $x \in l_p, y \in l_p$:

$$\|x \cdot y\|_r \leqslant \|x\|_p \|y\|_q \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

- **Minkowskische Ungleichung**: Sei $0 < p \leqslant \infty$. Dann gilt für $x, y \in l_p$:

$$\|x + y\|_p \leqslant \max\{2^{1/p - 1}, 1\}(\|x\|_p + \|y\|_p)$$

Aufgabe 2 Man zeige: $l_p \subset l_q$ für $0 < p < q \leqslant \infty$ und es gilt $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$ für $x \in l_p$. Es gilt: $x \in \ell_p \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^q |\xi_i|^{p-q} < \infty \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^q < \infty \Rightarrow x \in \ell_q$.

1. Fall Für $x = 0$ gilt aufgrund der allgemeinen Normeigenschaften: $\|x\|_p = 0 = \|x\|_q$.

2. Fall Sei $q = \infty$. Dann haben wir $\|x\|_q = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i| (\sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i|^p)^{1/p} \leqslant (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p)^{1/p} = \|x\|_p$.

3. Fall Sei $q < \infty$ und $x \neq 0$. Wir setzen $\alpha^p := \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p$. Somit liegt α^p zwischen 0 und unendlich und es folgt, dass $\frac{|\xi_i|^p}{\alpha^p} \leqslant 1$. Nun können wir schließen: $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{|\xi_i|}{\alpha} \right)^q \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{|\xi_i|}{\alpha} \right)^p = \frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p = 1$ wegen der Definition von α. Da nun $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{|\xi_i|}{\alpha} \right)^q \leqslant 1$ folgt, $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^q \leqslant \alpha^q = (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p)^{q/p}$. Also folgt insgesamt, dass $(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^q)^{1/q} \leqslant (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p)^{1/p}$ und wir haben $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$.

Aufgabe 3 Man zeige, dass die Räume $[l_p, \|\cdot\|_p]$ für $1 \leqslant p \leqslant \infty$ Banachräume sind.
Banachräume sind normiert und vollständig. Die Normiertheit ist klar. Daher wird im folgenden nur die Vollständigkeit gezeigt: Das heißt, für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_p \subset F$ existiert ein $a \in \ell_p$ mit $x_n \to a$. Wir setzen $x_n :$ $= (\xi_n^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\xi_n \in \mathbb{K}$ und es gilt: $|\xi_n^{(i)}| \leqslant \|x_n\|_p$ für alle n. Sei nun $\xi_n := \lim_{n\to\infty} \xi_n^{(i)}$ und $a := \lim_{n\to\infty} x_n$. Wir müssen nun zeigen, dass $a \in \ell_p$ und $\|x_n - a\|_p \to 0$. Dazu wählen wir uns für ein $\varepsilon > 0$ und $N = (N\varepsilon)$ mit $\|x_n - x_{n'}\|_p \leqslant \varepsilon$. Dabei sind die n und n' größer oder gleich N. Es folgt für alle $M \in \mathbb{N}$: $\left(\sum_{i=1}^{M} |\xi_n^{(i)} - \xi_n^{(i')}|^p\right)^{1/p} \leqslant \|x_n - x_{n'}\| \leqslant \varepsilon$ und für $n' \to \infty$ ist $\left(\sum_{i=1}^{M} |\xi_n^{(i)} - \xi_n|^p\right)^{1/p} \leqslant \varepsilon$. Schließlich sie M beliebig und es ergibt sich: $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_n^{(i)} - \xi_n|^p\right)^{1/p} \leqslant \varepsilon$. Der Term entspricht aber gerade $\|x_n - a\|_p$. Damit ergibt sich die Behauptung.

Aufgabe 4 Man zeige, dass l_p für $1 \leqslant p < \infty$ separabel und l_∞ nicht separabel ist.

a) Sei e_n der n-te Einheitsvektor und $A = \{\, e_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$. Da A abzählbar ist und $\|e_i\|_p = 1$, gilt $A \subset \ell_p$. Weiter ist auch $\ell_p \subset \mathrm{cl}(A)$, denn für $x = (\xi_n)_{n\in\ell_p}$ gilt: $\|x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\|_p = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

b) Sei $X = \{\, x \mid \mathbb{N} \to \{0,1\} \,\}$. Dann ist $X \subset \ell_\infty$ und X überabzählbar. Der letztgenannte Fakt kann mit dem Cantorschen Diagonalisierungsverfahren nachgewiesen werden. Weiterhin trägt $(X, \|\cdot\|)$ die diskrete Metrik. Nun wird behauptet, dass ℓ_∞ nicht separabel ist. Zum Beweis nehmen wir das Gegenteil an: Sei $D \subset \ell_\infty$ eine abzählbar dichte Teilmenge von ℓ_∞. Dann definieren wir eine Abbildung $a\colon X \to D$, so dass für $x \in X$ gilt: $\|a(x) - x\|_\infty < 1/2$. Seien nun $x, y \in X$ und es gilt $a(x) = a(y)$. Dann haben wir: $\|x - y\|_\infty = \|x - a(x) + a(y) - y\|_\infty \leqslant \|a - a(x)\|_\infty + \|a(y) - y\|_\infty < 1/2 + 1/2 = 1$. Wegen der diskreten Metrik ist damit $\|x - y\|_\infty = 0$. Also ist x gleich y. Damit ist die Abbildung a injektiv und D ebenso überabzählbar. Dies ist eine Widerspruch zur Annahme.

A.2 Aufgaben zu Funktionenräumen

Aufgabe 1 Es gilt $\|T\| = \sup_{\|x\|<1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{\, c \geqslant 0 \mid \forall x \in X\colon \|Tx\| \leqslant c\|x\| \,\}$.

Sei $\alpha := \sup_{\|x\|<1} \|Tx\|$. Es ist klar, dass $\|T\| \geqslant \alpha$ gilt. Sei nun $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ beliebig. Dann ist $\frac{1}{\|x\|+\varepsilon}\|Tx\| = \|T(\frac{x}{\|x\|+\varepsilon})\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|Tx\| \leqslant \alpha(\|x\| + \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \alpha\|x\| \Rightarrow \|Tx\| \leqslant \alpha\|x\| \Rightarrow \|T\| \leqslant \alpha$.

Sei nun $\beta := \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$. Dann ist $\|\frac{x}{\|x\|}\| = 1$ und es folgt, $\|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leqslant \beta \Rightarrow \|Tx\| \leqslant \beta\|x\|$ für alle $x \in X$. Also folgt, dass $\|T\| \leqslant \beta$.

Sei $\gamma \coloneqq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \Rightarrow \|Tx\| \leqslant \gamma\|x\|$ für alle $x \in X$. Also ist $\|T\| \leqslant \gamma$. Für $\|T\| \geqslant \gamma$ existiert ein $\varepsilon > 0$ beliebig und es existiert ein $x_\varepsilon \neq 0$ mit $\gamma - \varepsilon \leqslant \frac{\|Tx_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} = \|T(\frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|})\| \leqslant \|T\| \Rightarrow \|T\| \geqslant \gamma - \varepsilon \Rightarrow \|T\| \geqslant \gamma$ für $\varepsilon \to 0$.

Sei $A \coloneqq \inf\{\, c \geqslant 0 \mid \forall x \in X\colon \|Tx\| \leqslant c\|x\| \,\}$ und $c > A$. Dann gilt für alle $x \in X$: $\|Tx\| \leqslant c\|x\| \Rightarrow \|T\| \leqslant c \Rightarrow \|T\| \leqslant A$. Wegen $\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|$ folgt, dass $A \leqslant \|T\|$.

1. Die Räume $\ell_\infty(M)$ und $C_b(M)$ werden mit $\|\cdot\|_\infty$ zu Banachräumen. Insbesondere gilt für einen kompakten metrischen Raum $M \coloneqq C(M) = C_b(M)$. Damit ist auch $C(M)$ ein Banachraum, falls M ein kompakter metrischer Raum ist.

2. Man zeige, dass die Räume $[C[0,1], \|\cdot\|_p]$ bezüglich der Norm $\|f\|_p \coloneqq (\mathrm{int}_0^1 |f(s)|^p \, ds)^{1/p}$ für $1 \leqslant p < \infty$ keine Banachräume sind.
   Sei

$$\varphi_n = \begin{cases} 0 & x > \frac{1}{2^{np-1}} \\ 1 - 2^{np-1} & x \leqslant \frac{1}{2^{np-1}} \end{cases}$$

   und $f_n(x) \coloneqq (\varphi_n(x))^{1/p}$. Es gilt: $f_n \in C[0,1]$. Außerdem $f_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun rechnen wir: $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p = \sum_{n=1}^\infty (\mathrm{int}_0^1 |f_n|^p)^{1/p} = \sum_{n=1}^\infty (\mathrm{int}_0^1 \varphi_n)^{1/p} = \sum_{n=1}^\infty (\frac{1}{2}\frac{1}{2^{np-1}})^{1/p} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} = 1 < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty f_n(x) \in C[0,1]$. Der Beweis hat eine kleine Lücke.

   Zweiter Beweis: Wähle für $n \in \mathbb{N}$ ein $f_n \in C[0,1]$ mit

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant 1/2 - \frac{1}{n+1} \\ 1 & t \geqslant 1/2 \end{cases}$$

   und linearem Verlauf dazwischen. Dann ist (f_n) eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_p$. Denn ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so gilt für $n > m > \frac{1}{\varepsilon^p}$:

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\| &\leqslant \left(\mathrm{int}_{1/2 - \frac{1}{n+1}}^{1/2} |f_n(s) - f_m(s)|^p \right)^{1/p} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{m+1} \right) < \frac{1}{m} < \varepsilon \end{aligned}$$

   Nehmen wir nun an $f_n \to f \in C[0,1] \Rightarrow f(s) = 0$ für $s < 1/2$ und $f(s) = 1$ für $s > 1/2$. Also ist f nicht stetig. Auch dieser Beweis ist nicht perfekt. Er wurde aber in der Übung akzeptiert.

3. Seien $E \coloneqq \{\, x \in C[0,1] \mid x(1) = 0 \,\}$, $\|\cdot\|_\infty = \sup|\cdot|$ ein normierter Raum, $M \coloneqq \left\{ x \in E \;\middle|\; \mathrm{int}_0^1 x(s)\, ds \right.$
   Dann ist E bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ein normierter Raum und $M \subsetneq E$ ein abgeschlossener linearer Teilraum. Man zeige, dass $\forall x \in E\colon \|x\|_\infty = 1 \Rightarrow d(x, M) < 1$. (Lösung siehe [**?**])
   Zur Ersparnis von Schreibarbeit sei $T\colon E \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \mathrm{int}_0^1 x(s)\, ds$. Damit ist

T ein linearer Operator und für $x \in E$ mit $\|x\|_\infty = 1$ gilt: $|Tx| = |\mathrm{int}_0^1 x(s)\,ds| \leqslant \mathrm{int}_0^1 |x(s)|\,ds < 1$. Dann ist $M = N(T)$ und damit ein Untervektorraum von E. Wegen $T \neq 0$ liegt $M \subsetneq E$ und M ist abgeschlossen da $N(T)$ abgeschlossen, da T beschränkt.

Sei $x \in E$ mit $\|x\| = 1$ beliebig. Dann ist zu zeigen, dass $d(x, M) < 1$. Wir beginnen mit einer Fallunterscheidung:

1. Fall Sei $Tx = 0$. Dann ist $x \in M$ und damit der Abstand 0.

2. Fall Sei $Tx > 0$. Setze $a := Tx$. Damit ist $0 < a < 1$. Da x stetig und $x(1) = 0$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $|x(t)| < 1/2$ füt $t \geqslant 1 - \varepsilon$. Wähle ein beliebiges $x_1 \in E$ mit $x_1(t) = 0$ für $t \leqslant 1 - \varepsilon$, $x_1(t) \geqslant -a/2$ für alle t und $b := Tx_1 = \mathrm{int}_0^1 x_1(s)\,ds < 0$. Dann ist $\|x - x_1\|_\infty \leqslant 1$. Denn für $t \leqslant 1\varepsilon$ gilt $|x(t) - x_1(t)| = |x(t)| \leqslant 1$ und für $t \geqslant 1 - \varepsilon$ gilt $|x(t) - x_1(t)| \leqslant |x(t)| + |x_1(t)| \leqslant 1/2 + a/2 < 1$.

   Setze $h := -\frac{b}{a-b}x + \frac{a}{a-b}x_1$. Es ist $h \in E$ und $Th = -\frac{a}{a-b}Tx + \frac{a}{a-b}Tx_1 = -\frac{a}{a-b}(-a) + \frac{a}{a-b}b = 0$, d.h. $h \in N(T) = M$. Weiter $\|x - h\|_\infty = \|\frac{a-b}{a-b}x - (-\frac{b}{a-b}x + \frac{a}{a-b}x_1)\|_\infty = \|\frac{a}{a-b}x - \frac{a}{a-b}x_1\|_\infty = \frac{a}{a-b}\|x - x_1\|_\infty < 1$. Daher ist der Abstand immer kleiner als 1.

3. Fall Sei $Tx < 1$. Dann ist $T(-x) > 0$ und $d(x, M) = \|Q_M x\| = \|-Q_M x\| = \|Q_M(-x)\| = d(-x, M)$.

4. Sei B_X die abgeschlossene Einheitskugel eines normierten Raumes X. Dann gilt für die Entropiezahlen $\mathcal{E}_n(B_X)$ die Multiplikationsformel

$$\mathcal{E}_{mn}(B_X) \leqslant \mathcal{E}_n(B_X)\mathcal{E}_m(B_X) \qquad m, n \in \mathbb{N}$$

Damit kann man folgern, $\mathcal{E}_n(B_X) = 1$, falls $\dim X = \infty$.

A.3 Aufgaben zu Operatoren

counter setzen

Aufgabe 9 Sei $1 \leqslant p < \infty$. Für ein beschränktes lineares Funktional $a\colon \ell_p \to \mathbb{K}$ existiert eine Darstellung der Form $a(x) = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i \xi_i$ mit $x = (\xi_i) \in \ell_p, \alpha = (\alpha_i) \in \ell_{p'}$, $1/p' + 1/p = 1$ und für die Norm von a gilt $\|a\| = (\sum_{i=1}^\infty |\alpha_i|^{p'})^{1/p'}$. Ferner gilt $\ell_p' \cong \ell_{p'}$. Das ist eine Isometrie von ℓ_p' auf $\ell_{p'}$.
Sei $x = (\xi_k) \in \ell_p$ und es ist $x_n = \sum_{k=1}^n = \xi_k e_k = (\xi_1, \xi_2, \dots, 0, 0, \dots)$. Also ergibt sich $\|x - x_n\|_p = (\sum_{k \geqslant n+1} |\xi_k|^p)^{1/p}$. Dann ist die Summe kleiner als unendlich und sie konvergiert für n gegen unendlich gegen 0. Also folgt, $x = \sum_{k=1}^\infty \xi_k e_k \in \ell_p$. Jetzt nehmen wir ein stetiges lineares Funktional. Dann ist $a(x) = a(\sum_{k=1}^\infty \xi_k e_k) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k a(e_k)$. Nun setzen wir $\alpha_k = a(e_k)$ und es ergibt sich $a(x) = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \xi_k$.

Nun nehmen wir eine Folge $x_n = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$. Es ist $|\sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k| = |a(x_n)| \leqslant \|a\| \|x_n\|_p = \|a\| (\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p)^{1/p}$. Wir können schreiben $\alpha_k = |\alpha_k| e^{-i\varphi_k}$ für $1 \leqslant k \leqslant n$ und setzen $\xi_k = |\alpha_k|^{p'-1} e^{-i\varphi_k}$. Die Multiplikation ergibt: $\sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^{p'}$ und $(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p)^{1/p} = (\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^{(p'-1)p})^{1/p} = (\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^{p'})^{1/p}$. Alles zusammengefasst haben wir $\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^{p'} = |\sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k| \leqslant \|a\| (\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^{p'})^{1/p} \Rightarrow (\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^{p'})^{1-1/p} = (\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^{p'})^{1/p'} \leqslant \|a\|$. Für n gegen unendlich ergibt sich nun: $(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^{p'})^{1/p'} \leqslant \|a\|$. Die Umkehrung ist $|a(x)| = |\sum_{k=1}^\infty \alpha_k \xi_k| \leqslant (\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^{p'})^{1/p} (\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p)^{1/p} \leqslant (\sum_{k=1}^\infty |\alpha_k|^{p'})^{1/p'} \|x\|_p \Rightarrow \|a\| \leqslant \|\alpha\|_{p'}$. Also folgt, $\|a\| = \|\alpha\|_{p'}$.

Der Operator ist definiert als $\alpha = (\alpha_k) \in \ell_{p'}$ und $(T\alpha)(x) := \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \xi_k$. Es gilt: $\|T\alpha\| = \|\alpha\|_{p'}$, d. h. $\ell_p' \cong \ell_{p'}$.

Sei $C_0 \subset \ell_\infty$ der Raum der Nullfolgen ausgestattet mit der Supremumsnorm. Das ist ein Banachraum. Der duale Raum von diesem Raum ist ℓ_1.

Aufgabe 9 Sei α eine stetige Funktion aus dem Intervall $[0, 1]$ ($\alpha \in C[0, 1]$). Dann wird durch $a(x) := \mathrm{int}_0^1 \alpha(t)x(t)\,dt$ ein beschränktes lineares Funktional auf $C[0, 1]$ definiert. Für die Norm von a gilt die Abschätzung $\|a\| = \mathrm{int}_0^1 |\alpha(t)|\,dt$.

A.4 Aufgaben zu Entropiezahlen

(a) Sei $\dim X = \infty$. Dann gilt $\mathcal{E}_n(I_X) = 1$ für $n = 1, 2, \ldots$.

Beweis:
$\mathcal{E}(I_X) := \lim \mathcal{E}_n(T)$ und $\mathcal{E}_{nm}(TS) \leqslant \mathcal{E}_n(T)\mathcal{E}_m(S) \Rightarrow \mathcal{E}(TS) \leqslant \mathcal{E}_n(T)\mathcal{E}_n(S) \leqslant \mathcal{E}(T)\mathcal{E}(S)$. Da B_X nicht kompakt ist, folgt, $\mathcal{E}(I_X) > 0$. Weiter ist $0 > \mathcal{E}(I_X) = \mathcal{E}(I_X^2) = \mathcal{E}(I_X I_X) \leqslant \mathcal{E}(I_X)\mathcal{E}(I_X) \Rightarrow \mathcal{E}(I_X) \geqslant 1$. Außerdem ist $\mathcal{E}(I_X) \leqslant \|I_X\| = 1$. ∎

(b) Sei $\dim X = N$. Dann gilt $\mathcal{E}_N(I_X) = 1$ (Anwendung des Lemma von Riesz, **??**)

Literaturverzeichnis

[1] D. Werner. Funktionalanalysis. Springer 2004

[2] D. Werner. Einführung in die höhere Analysis. Springer 2006

[3] W. Rudin. Functional Analysis. McGrw Hill 1991