Maß und Integral

Engelbert

SS 2004

Vorwort

Dieses Dokument wurde als Skript für die auf der Titelseite genannte Vorlesung erstellt und wird jetzt im Rahmen des Projekts „Vorlesungsskripte der Fakultät für Mathematik und Informatik“ weiter betreut. Das Dokument wurde nach bestem Wissen und Gewissen angefertigt. Denoch garantiert weder der auf der Titelseite genannte Dozent, die Personen, die an dem Dokument mitgewirkt haben, noch die Mitglieder des Projekts für dessen Fehlerfreiheit. Für etwaige Fehler und dessen Folgen wird von keiner der genannten Personen eine Haftung übernommen. Es steht jeder Person frei, dieses Dokument zu lesen, zu verändern oder auf anderen Medien verfügbar zu machen, solange ein Verweis auf die Internetadresse des Projekts `http://uni-skripte.lug-jena.de/` *enthalten ist.*

Diese Ausgabe trägt die Versionsnummer 1689 und ist vom 21. Oktober 2008. Eine (mögliche) aktuellere Ausgabe ist auf der Webseite des Projekts verfügbar.

Jeder ist dazu aufgerufen, Verbesserungen, Erweiterungen und Fehlerkorrekturen für das Skript einzureichen bzw. zu melden oder diese selbst einzupflegen – einfach eine E-Mail an die Mailingliste `<uni-skripte@lug-jena.de>` *senden. Weitere Informationen sind unter der oben genannten Internetadresse verfügbar.*

Hiermit möchten wir allen Personen, die an diesem Skript mitgewirkt haben, vielmals danken:

- *Jörg Sommer* `<joerg@alea.gnuu.de>` *(2003)*
- *Jens Kubieziel* `<jens@kubieziel.de>` *(2006)*
- *Mario Ullrich* `<mario-ullrich@gmx.de>` *(2008)*

Inhaltsverzeichnis

Auflistung der Theoreme

Sätze

Definitionen und Festlegungen

Literaturverzeichnis

[1] H. Bauer: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, Walter de Gruyter

[2] H. Bauer: Maß- und Integrationstheorie, Walter de Gruyter

[3] J. Bellach, P. Franken, E. Warmuth, W. Warmuth: Maß, Integral und bedingter Erwartungswert, Akademie-Verlag

[4] D. L. Cohn: Measure Theory, Birkhäuser

[5] J. Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie, Springer

[6] P. R. Halmos: Measure Theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag

[7] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin: Reelle Funktionen und Funktionsanalysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften

[8] H. Michel: Maß- und Integrationstheorie I, Deutscher Verlag der Wissenschaften

[9] I. P. Natanson: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, Verlag Harri Deutsch

[10] J. Neveu: Bases mathématiques du calcul des probalités, Masson et Cie

[11] A. N. Shiryaev: Wahrscheinlichkeit, Deutscher Verlag der Wissenschaften

[12] J. Hoffmann-Jørgensen: Probility with a view towards statistics, Vol. I, Chapman and Hall

[13] H. Meschkowski: Probleme des Undendlichen – Werk und Leben Georg Contors, Vieweg

[14] P. R. Halmos: Naive set theory, Springer

1 Messbare Funktionen

Seien $(\Omega, \mathcal{F}), (E, \mathfrak{E})$ messbare Räume.

Definition 1/1
Eine Abbildung $f\colon \Omega \to E$ heißt *messbare Abbildung* von $(\Omega, \mathcal{F})$ in $(E, \mathfrak{E})$, falls für alle $B \in \mathfrak{E}$ das volle Urbild $f^{-1}(B) = \omega \in \Omega : f(\omega) \in B \in \mathcal{F}$

Notation: $f\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathfrak{E})$ messbar

1.1 Eigenschaften messbarer Funktionen

(1) Die konstante Funktion $f(\omega) = c \in E, \omega \in \Omega$ ist stets messbar

Beweis:

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & c \notin B \\ \Omega & c \in B \end{cases} \qquad \in \mathcal{F} \qquad \blacksquare$$

(2) Hintereinanderausführung messbarer Funktionen $f\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (E_1, e_1)$ messbar, $g : (E_1, e_1) \to (E_2, e_2)$ messbar
$g \circ f$ Hintereinanderausführung $\longrightarrow g \circ f \ (\Omega, \mathcal{F}) \to (E_2, e_2)$ messbar

Beweis: $B \in e_2$: $(g \circ f)^{-1}$(B)=$f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(B)}_{\in e_1}) \in \mathcal{F}$

(3) Einschränkung messbarer Funktionen $f\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathfrak{E})$ messbar, $\Omega_0 \subseteq \Omega$, $f_{|\Omega_0} := f(\omega), \omega \in \Omega_0$ (Einschränkung von f auf $\Omega_0 \longrightarrow f_{|\Omega_0} : (\Omega_0, \mathcal{F} \cap \Omega_0) \to (E, \mathfrak{E})$ messbar, $(\Omega_0, \mathcal{F} \cap \Omega_0)$ Spur von $(\Omega, \mathcal{F})$ auf Ω_0
Beweis: $B \in \mathfrak{E} : f^{-1}_{|\Omega_0}(B) = \underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{F}} \cap \Omega_0 \in \mathcal{F} \cap \Omega_0$

(4) Kriterium für Messbarkeit $(\Omega, \mathcal{F}), (E, e), \mathfrak{S} \subseteq e, \sigma(\mathfrak{S}) = \mathfrak{e}(\mathfrak{S}$ erzeugt $\mathfrak{e}$ bzw. $\mathfrak{S}$ ist ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{E}$) $f\colon \Omega \to E$ $f\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathfrak{E})$ messbar $\Longleftrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathfrak{S}$

Beweis:

I. Notwendigkeit: klar

II. Hinlänglichkeit: $\widetilde{\mathfrak{e}} := B \in \mathfrak{E} : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ („gute“ Mengen z. z.: $\widetilde{\mathfrak{E}} = \mathfrak{E}$

1) $\mathfrak{S} \subseteq \widetilde{\mathfrak{E}}$

2) a) $E \in \widetilde{\mathfrak{E}} : f^{-1}(E) = \Omega \in \mathcal{F}$

b) $B \in \widetilde{\mathfrak{E}} \Rightarrow B^{\complement} \in \widetilde{\mathfrak{E}} : f^{-1}(B^{\complement}) = (\underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{F}})^{\complement} \in \mathcal{F}$

c) $B_n \in \widetilde{\mathfrak{E}}, n \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \widetilde{\mathfrak{E}} : f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\underbrace{B_n}_{\in \mathcal{F}}) \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \widetilde{\mathfrak{E}} \Rightarrow \widetilde{\mathfrak{E}} \sigma$-Algebra $\xrightarrow{1)} \mathfrak{e} = \sigma(\mathfrak{S}) \subseteq \widetilde{\mathfrak{E}} (\subseteq \mathfrak{E})$ ■

(5) Anwendung auf den Fall $(E, \mathfrak{E}) = (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ $f \colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ messbar $\Leftrightarrow f < r := f^{-1}((-\infty, r)) \in \mathcal{F}$

Beweis:
Folgerung zu A.16: $B(\mathbb{R}) = \sigma((-\infty, r) : r \in \mathbb{Q}(oder \mathbb{R})) \forall r \in \mathbb{Q}(bzw. r \in \mathbb{R})$ ■

(6) (E, ρ) metrischer Raum, $\mathfrak{E} := B(E) \sigma$-Algebra der Borelmengen $f \colon (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow$(E,B(E)) messbar $\Leftrightarrow f^{-1}(G) \in \mathcal{F}, \forall G \subseteq E$ offen Anwendung von 4

(7) (E_1, ρ_1), (E_2, ρ_2) metrische Räume $f \colon (E_1, B(E_1)) \to (E_2, B(E_2))$ messbar $\Longleftarrow$ $f \colon E_1 \to E_2$ stetig

Beweis:
Es gilt: $f \colon E_1 \to E_2$ stetig $\Leftrightarrow f^{-1}(G)$ offen in $E_1, \forall G \in E_2$ offen ■

2 Messbar erweiterte reelle Funktionen

$\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = [-\infty, \infty]$

Rechenregeln:

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty \tag{2.1}$$
$$x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty, x \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$
$$x - (\pm\infty) = \mp\infty, x \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$
$$(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty \tag{2.4}$$
$$(\pm\infty)(\mp\infty) = (\mp\infty)(\pm\infty) = -\infty \tag{2.5}$$
$$x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = \pm\infty, x > 0 \tag{2.6}$$
$$x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = \pm\infty, x < 0 \tag{2.7}$$
$$0\,(\pm\infty) = 0 \tag{2.8}$$

Verboten:

(1) $(\pm\infty) - (\pm\infty)$

(2) $(\pm\infty) + (\mp\infty)$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x = +\infty \\ \frac{x}{1+|x|} & x \in \mathbb{R} \\ -1 & x = -\infty \end{cases}$$
$$h : \hat{\mathbb{R}} \to [-1, +1]$$

$\hat{\rho}(x, y) = |h(x) - h(y)|, x, y \in \hat{\mathbb{R}}$

Aussage 1 $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{\rho})$ metrischer Raum (Übungsaufgabe)

Aussage 2 G$\subset \mathbb{R}$, G offen bzgl. $\hat{\rho} \Leftrightarrow$ G offen bzgl. $\rho(x, y) = |x-y|, x, y \in \mathbb{R}$ (Übungsaufgabe–Anwendung nächste Übungsserie)

Bemerkung 2.0.0/1
$\mathbb{R}$ offen in $\hat{\mathbb{R}}$ bgzl. $\hat{\rho}$

Definition 2/1

(i) Eine Funktion $f\colon \Omega \to \hat{\mathbb{R}}$ heißt messbar erweitert reell, falls $f\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (\hat{\mathbb{R}}, B(\hat{\mathbb{R}})$ messbar ist

(ii) f messbar erweitert reell, $f(\Omega) = \{f(\omega)\colon \omega \in \Omega\} \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt f messbar reell auf $(\Omega, \mathcal{F})$.

Satz 2/2

(i) $B(\mathbb{R}) = B(\hat{\mathbb{R}}) \cap \mathbb{R}$ (Spur von $B(\hat{\mathbb{R}})$ auf $\mathbb{R}$)

(ii) $B(\hat{\mathbb{R}}) = \sigma([-\infty, r) : r \in \mathbb{Q}(r \in \mathbb{R}))$

(iii) $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$

f ist messbar reell auf $(\Omega, \mathcal{F}) \Leftrightarrow f\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ messbar

Beweis:

(i) Anwendung von Ü-Aufgabe 1.3 $\mathbb{R}$ offen in $\hat{\mathbb{R}}$ bzgl. $\hat{\rho}$

(ii) $\mathfrak{E} := \sigma\big(\{[-\infty, r] : r \in \mathbb{Q}\}\big)$

1) $\mathfrak{E} \subseteq$ B($\hat{\mathbb{R}}$), d [-∞,r) offen in $\hat{\mathbb{R}}$

2) i. $\{-\infty\}, \{+\infty\}, \{-\infty, +\infty\}, \mathbb{R} \quad \in \mathfrak{E}$

ii. $A \in B(\hat{\mathbb{R}}) : A \cap \mathbb{R} \in B(\mathbb{R})$ (wegen (i)) $= \sigma_{\mathbb{R}}((-\infty, r) : r \in \mathbb{Q}) \subseteq \mathfrak{E} \cap \mathbb{R} \subseteq \mathfrak{E}$
$A \cap -\infty, +\infty \in \mathfrak{E} \longrightarrow A = (A \cap \mathbb{R}) \cup (A \cap -\infty, +\infty) \in \mathfrak{E}$, d. h. $B(\hat{\mathbb{R}}) \subseteq \mathfrak{E}$

(iii) $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$

I. f sei messbar reell

z. z.: $f\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ messbar Sei $B \in B(\mathbb{R}) : f^{-1}(B)$ $(B(\mathbb{R}) = B(\hat{\mathbb{R}}) \cap \mathbb{R} \subseteq B(\hat{\mathbb{R}}))$, da $B \in B(\hat{\mathbb{R}})$ und wegen der Eigenschaft, dass f messbar reell

II. Es sei $f\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ messbar

z. z.: $f\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (\hat{\mathbb{R}}, B(\hat{\mathbb{R}}))$ messbar

$B \in B(\hat{\mathbb{R}})\colon f^{-1}(B \cap \mathbb{R}) \in \mathcal{F}$ wegen $B \cap \mathbb{R} \in B(\mathbb{R})$ (vgl. (i)) und die vorrausges. Messbarkeit ∎

Kurzbezeichnung: f messbar (auf $(\Omega, \mathcal{F})$)

Eigenschaften messbarer Funktionen: $(\Omega, \mathcal{F})$ sei fest gewählt

E1 f und g messbar, $f(\omega)$ und $g(\omega)$ sind keine Unendlichkeiten verschiedenen Vorzeichens $\forall \omega \in \Omega$

$$(f + g)(\omega) := f(\omega) + g(\omega), \omega \in \Omega \Rightarrow f + g \text{ messbar}$$

Beweis:
{f+g < x}= $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\{f<r\}\cap\{g<x-r\}\in\mathcal{F}=\{\omega\in\Omega: f(\omega)+g(\omega)<x\}$ Anwendung von Eigenschaft 2.4, von Satz 3.1(ii) ■

E2 f messbar, $a\in\mathbb{R}\Rightarrow(af)(\omega):=af(\omega)$, $\omega\in\Omega$, af messbar

Beweis:
1) $a=0$: klar

2) $a>0$: $\{af<x\}=\{f<\frac{x}{a}\}\in\mathcal{F}, a\in\mathbb{R}$

3) $a>0$: $\{af<x\}=\{f>\frac{x}{a}\}=\{f\leq\frac{x}{a}\}^{\complement}\in\mathcal{F}$ (da f messbar) ■

E3 f,g messbar, $(f\vee g)(\omega)=\max\{f(\omega),g(\omega)\}$, $(f\wedge g)(\omega)=\min\{f(\omega),g(\omega)\}$, $\omega\in\Omega\Rightarrow$ $f\vee g, f\wedge g$ messbar

Beweis:
$\{f\vee g<r\}=\{f<r\}\cup\{g<r\}\in\mathcal{F},r\in\mathbb{R}$

$\{f\wedge g<r\}=\{f<r\}\cap\{g<r\}\in\mathcal{F},r\in\mathbb{R}$ ■

E4 f messbar, $f^+:=f\vee 0:=\max\{f,0\}$ positiver Anteil von f $f^-:=\max\{-f,0\}$ negativer Anteil von $f\Rightarrow f^+,f^-$ messbare Funktionen

E5 f messbar, $|f|(\omega):=|f(\omega)|,\omega\in\Omega\Rightarrow|f|$ messbar

Beweis:
$|f|=f^++f^-$ ■

E6 f,g messbar, $(f\cdot g)(\omega):=f(\omega)\cdot g(\omega)$, $\omega\in\Omega\Rightarrow f\cdot g$ messbar

Beweis:

$$f\cdot g=f^+\cdot g^+-f^+\cdot g^--f^-\cdot g^++f^-\cdot g^- \tag{2.9}$$

g. z. z.: $f\cdot g$ für $f,g\geq 0$

$\{f\cdot g<r\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{f\cdot g\leq r-\frac{1}{n}\}$ deshalb g. z. z.: $\{f\cdot g\leq r\}\in\mathcal{F},\forall r\in\mathbb{R}$

$\{f\cdot g\leq r\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty}\{f\frac{k}{n}\leq r\}\cap\{\frac{k}{n}\leq g<\frac{k+1}{n}\}\in\mathcal{F}\Rightarrow\{f\cdot g\leq r\}\in\mathcal{F},\forall r\in\mathbb{R}$ ■

E7 f_n messbar, $n\geq 1\Rightarrow\sup f_n,\inf f_n$ messbar $(\sup f_n)(\omega):=\sup f_n(\omega),\omega\in\Omega$ $(\inf f_n)(\omega):=\inf f_n(\omega),\omega\in\Omega$

Beweis:
$\{\sup f_n<r\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\underbrace{\{f_n<r\}}_{\in\mathcal{F}}\in\mathcal{F},r\in\mathbb{R}$ $\inf f_n=-\sup(-f_n)$ ■

E8 f_n messbar, $n \geq 1, \limsup_{n\to\infty} f_n := \inf_n(\sup_{k\geq n} f_k)\ \liminf_{n\to\infty} f_n := \sup_n(\inf_{k\geq n} f_k)$
$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} f_n, \liminf_{n\to\infty} f_n$ messbar

E9 f, g messbar $\Rightarrow \{f < g\}, \{g < f\}, \{f \leq g\}, \{g \geq f\}, \{f = g\} \quad \in \mathcal{F}$

BEWEIS:

$$\{f < g\} = \{f - g < 0\} \in \mathcal{F} \tag{2.10}$$

Rest folgt daraus ∎

E10 f_n messbar , $n \geq 1$, $\Omega_0 := \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \text{existiert in} \hat{\mathbb{R}}\}$
$((\lim_{n\to\infty} f_n)(\omega) = \lim_{n\to\infty}(f_n(\omega)), \omega \in \Omega_0)$

Dann folgt:

1) $\Omega_0 \in \mathcal{F}$

2) $\lim_{n\to\infty} f_n$ messbar auf $(\Omega_0, \mathcal{F} \cap \Omega_0)$

BEWEIS:

1) $\Omega_0 = \{\limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n\} \in \mathcal{F}$ (wegen E9, $\limsup$, $\liminf$ messbar wegen E8)

2) $\lim_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n|_{\Omega_0}$ messbar wegen E8 und Eigenschaft 2.3 ∎

E11 f_n messbar, $n \geq 1$, $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$

setzen:

$$f(\omega) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) & \text{sofern Limes existiert} \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $\omega \in \Omega \Rightarrow f$ messbar

E12 $A \subseteq \Omega$,

$$1_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \in A^{\complement} \end{cases} \quad \omega \in \Omega$$

1_A heißt Indikatorfunktion (oder charakteristische Funktion) der Menge A

1_A messbar $\Leftrightarrow A \in \mathcal{F}$

3 Monotoner Klassensatz

$\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

Definition 3/1

(i) $\mathcal{M}$ heißt monotone Klasse, falls

a) $A_n \in \mathcal{M}, A_n \subseteq A_{n+1}, n \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

b) $A_n \in \mathcal{M}, A_{n+1} \subseteq A_n, n \geq 1 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

(ii) $S \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Dann bezeichne $\mathfrak{M}(S)$ die kleinste monotone Klasse, die S enthält: $\mathfrak{M}(S) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{M} \text{ monotone Klasse} \\ S \subseteq \mathfrak{M}}} \mathcal{M}$

Satz 3/2
$\mathcal{F} \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathcal{F}$ σ-Algebra $\Leftrightarrow$

(1) $\mathcal{F}$ monotone Klasse

(2) $\mathcal{F}$ Algebra

Beweis:

I. Notwendigkeit: klar

II. Hinlänglichkeit: Es sei 1. und 2. erfüllt

z. z.: $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, falls $A_n \in \mathcal{F}, n \geq 1$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \underbrace{(\bigcup_{n=1}^{m} A_n)}_{B_m \in \mathcal{F} wegen 2.) B \subseteq B_{m+1}}$$

■

Bemerkung 3.0.0/2
$\mathfrak{M}(S) \subseteq \sigma(S)$

Satz 3/3 (Satz über monotone Klassen)
es sei $\mathcal{A}$ und $\mathcal{M}$ Mengensysteme von Teilmengen von Ω mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathcal{A}$ Algebra

(2) $\mathcal{M}$ monotone Klasse

(3) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$

Dann folgt: $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$

Satz 3/4
2' $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ sei Algebra $\Rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$

Aussagen von Satz 2 und Satz 2' sind äquivalent:

I. satz 2' $\Rightarrow$ Satz 2: $\mathcal{A}$ Algebra, $\mathcal{M}$ monotone Klasse, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \xrightarrow{Satz2'} \sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathfrak{M}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$

II. Satz 2 $\Rightarrow$ Satz 2'

   z. z.: $\mathcal{A}$ Algebra $\Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ g. z. z.: sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ monotone Klasse $\xrightarrow{Satz2}$ $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$

   Beweis:
   z. z.: $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$ g. z. z.: $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ σ-Algebra (wegen $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$) g. z. z.: $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ Algebra (wegen Satz 1)

   $A \subseteq \Omega\colon \mathcal{M}_A := \{B \subseteq \Omega\colon A \cup B \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})\}$

   (a) $\mathcal{M}_A$ monotone Klasse – klar

   (b) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{M}_A \supseteq \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{M}_A \supseteq \mathfrak{M}(\mathcal{A})$

   (c) $B \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow B \in \mathcal{M}_A \Rightarrow A \in \mathcal{M}_B \forall A \in \mathcal{A}$ ■

   $\Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_B \Rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}_B \Rightarrow \forall A \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) : A \cup B \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}), \forall B \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$

   Es folgt: $A, B \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ Es gibt weiterhin: $\Omega \in \mathcal{A} \subseteq \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$

   weiterhin gilt: $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow A^{\complement} \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$

   Insgesamt erhalten wir: $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ Algebra und damit ein σ-Algebra (weil es eine monotone Klasse ist)

$(\Omega, \mathcal{F})$ messbarer Raum m heißt Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$

- $m(\emptyset) = 0$
- $A_n \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkt (für $n \geq 1$) $\Rightarrow m(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$

E1 (σ-Subadditivität)

   $A_n \in \mathcal{F}, n \geq 1, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$

   Beweis:
   $A'_n := A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \in \mathcal{F}, n \geq 1$, paarweise disjunkt $m(A) = \mathfrak{m}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n)$ ■

E2 (Stetigkeit von unten) $A_n \in \mathcal{F},\ A_n \subseteq A_{n+1},\ n \geq 1,\ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$

Beweis:
a. Fall $\exists n$ mit $m(A_n) = +\infty \xrightarrow{A_n \subseteq A} m(A) = +\infty(Monotonie) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(A)(= +\infty)$

b. Fbll $m(A_n) < +\infty, \forall n \geq 1 A'_n = A_n \setminus A_{n-1}, n \geq 1, A_0 = \emptyset m(A) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n) =^{\sigma-Addit.} \sum_{n=1}^{\infty} m(A'_n) = m(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} m(A'_k) = m(A_n) + \lim_{n\to\infty}[m(A_n) - m(A_1)] = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$ ■

E3 (Stetigkeit von oben) $A_n \in \mathcal{F}, A_{n+1} \subseteq A_n, n \geq 1, \exists n \geq 1 : m(A_n) < +\infty, A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$

Beweis:
$\exists n_0 \colon m(A_{n_0}) < +\infty \Rightarrow m(A_n) < +\infty, n \geq n_0$

o. B. d. A.: $m(A_n) < +\infty, \forall n \geq 1, B_n := A_1 \setminus A_n \in \mathcal{F}, B_n \subseteq B_{n+1}, B := A_1 \setminus A, B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \to m(B) = \lim_{n\to\infty} m(B_n)$

$m(A_1) - m(A) = \lim_{n\to\infty}[m(A_1) - m(A_n)] \Rightarrow m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$ ■

E4 (Stetigkeit in der leeren Menge) $A_n \in \mathcal{F}, A_{n+1} \subseteq A_n, n \geq 1, \bigcap_{n=1}^{\infty} = \emptyset, \exists n \geq 1 : m(A_n) < +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} m(A_n) = 0$

Beispiele von Maßen

B1 (Dirac-Maß) $(\Omega, \mathcal{F})$ messbarer Raum, $\omega_0 \in A$,

$$\delta_{\omega_0} = \begin{cases} 1 & \omega_0 \in A \\ 0 & \omega_0 \in A^{\complement} \end{cases} \qquad A \in \mathcal{F}$$

δ_{ω_0} ist ein Maß (Dirac-Maß, δ-Maß, Einheitsmasse in ω_0)

B2 (Summe von Maßen) $(m_n)_{n\geq 1}$ Folge von Maßen auf $(\Omega, \mathcal{F})$ $m(A) := \sum_{n=1}^{\infty} m_n(A), A \in \mathcal{F} \Rightarrow m$ Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$

Beweis:
1. σ-Superadditivität von m: $m(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty}(A_k), A_k \in \mathcal{F}, k \geq 1$, paarw. disj.

2. Vorraus.: $\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) < +\infty$

z. z.: $m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k), A_k \in \mathcal{F}, k \geq 1$, parw. disj. (Anwendung des Umordnungssatzes für absolut konvergente unendl. Reichen) ■

B3 (Multiplikation mit Skalaren) m sei ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, $\alpha \in [0, +\infty]$, $(\alpha m)(A) := \alpha m(A), A \in \mathcal{F} \Rightarrow \alpha m$ ist Maß

B4 (Nullmaß) $m(A) = 0, A \in \mathcal{F} \Rightarrow m$ Maß (Nullmaß)

B5 (m_n) Folge von Maßen $(\Omega, \mathcal{F})$, (α_n) Folge aus $[0, +\infty] \Rightarrow m = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n m_n$ Maß

B6 $m_1, \ldots, m_n$ Maße, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, +\infty] \Rightarrow \alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_n m_n$ Maß

B7 (Diskrete Maße) $\omega_1, \omega_2, \ldots \in \Omega, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \in [0, +\infty]$

$m = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{\omega_n}$ ist ein Maß (heißt diskretes Maß)

Eigenschaft: $A \in \mathcal{F}, A \cap \{\omega_1, \omega_2, \ldots\} = \emptyset \Rightarrow m(A) = 0$

B8 m_n Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, $m_n(A) \leq m_{n+1}(A)$, $A \in \mathcal{F}$, $n \geq 1$, $m(A) := \lim_{n\to\infty} m_n(A), A \in \mathcal{F} \Rightarrow m$ Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$

Beweis:
1. m ist additiv auf $\mathcal{F}$ (Inhalt auf $\mathcal{F}$)
2. m ist σ-superadditiv: $m(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m(A), A_k \in \mathcal{F}, k \geq 1$, parw. diskj, $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$
3. $A_k \in \mathcal{F}, k \geq 1$, paarw. disj., $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k m(A) = \lim_{n\to\infty} m_n(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{m_n(A_k)}_{m(A_k)} \leq$

$\sum_{k=0}^{\infty} m(A_k)$ ■

Alternativer Beweis:

Beweis:
$m = \sum_{n=1}^{\infty} [m_n - m_{n-1}], m_0 = 0$ (siehe B2) ■

Bemerkung 3.0.0/3
Beweis von B2 kann durch Anwendung von B8 erfolgen. $\mu_n = \sum_{k=1}^{n} m_k$ Maß, $\mu_n \leq \mu_{n+1}, m = \lim_{n\to\infty} \mu_n mit m = \sum_{n=1}^{\infty} m_n$

B9 (Zählmaß) $\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}$

$\lambda := \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n$ Maß, λ heißt Zählmaß: $\lambda(A) = \text{Anzahl}(A), A \subseteq \mathbb{N}$

B10 Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist ein Maß. Es gilt $P(\Omega) = 1$

3.1 Eindeutigkeitssatz für Maße

$(\Omega, \mathcal{F})$ messbarere Raum, m_1, m_2 Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$

Problem: $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{F}$ Mengensystem, $m_1(A) = m_2(A), \forall A \in \mathfrak{S} \xrightarrow{?} m_1 = m_2$ (auf $\mathcal{F}$)

Definition 3/5
Ein Maß m auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt endlich, falls $m(\Omega) < +\infty$ (und somit $m(A) < +\infty, \forall A \in \mathcal{F}$) gilt.

Satz 3/6
Es seien m_1, m_2 *endliche* Maße auf $(\Omega, \mathcal{F}), \mathfrak{S} \subseteq 2^\Omega$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\mathfrak{S}$ π-System
- $\Omega \in \mathfrak{S}$
- $\sigma(\mathfrak{S}) = \mathcal{F}$ ($\mathfrak{S}$ ist Erzeugendensystem von $\mathcal{F}$)
- $m_1(A) = m_2(A), A \in \mathfrak{S}$

Dann folgt: $m_1 = m_2$ (auf $\mathcal{F}$)

Beweis:
$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{F} : m_1(A) = m_2(A)\}$

a) $\mathfrak{S} \in \mathcal{D}$

b) $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System:

(i) $\Omega \in \mathfrak{S} \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{D}$

(ii) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^\complement \in \mathcal{D} : m_1(A) = m_1(\Omega) - m_1(A) = m_2(\Omega) - m_2(A) = m_2(A^\complement)$

(iii) $A_k \in \mathcal{D}, k \geq 1$, paarw. disj. $\Rightarrow m_1(\bigcup_{k=1}^\infty m_1(A_k) = \sum_{k=1}^\infty m_2(A_k) = m_2(\bigcup_{k=1}^\infty A_k) \Rightarrow \bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \mathcal{D}$

$\xrightarrow{S.I.5.2.} \sigma(\mathfrak{S}) \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$ ■

Definition 3/7
(i) $\mathfrak{S} \subseteq 2^\Omega, m$ Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, m heißt σ-endlich *auf* $\mathfrak{S}$, falls $\exists \Omega_n \in \mathfrak{S}$ mit $\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1}, n \geq 1$ und $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n$, sowie $m(\Omega_n) < +\infty$

(ii) m heißt σ-endl., falls m σ-endl auf $\mathcal{F}$ ist

Satz 3/8
Seien m_1, m_2 Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$, $\mathfrak{S} \subseteq 2^\Omega$ mit folgenden Vorraussetzungen:

1) $\mathfrak{S}$ π-System

2) m_1, m_2 sind σ-endl. *auf* $\mathfrak{S}$

3) $\sigma(\mathfrak{S}) = \mathcal{F}$

4) $m_1(A) = m_2(A), A \in \mathfrak{S}$

Dann gilt: $m_1 = m_2$ (auf $\mathcal{F}$)

Beweis:
$\exists \Omega_i^{(n)} \in \mathfrak{S}, \Omega_i^{(n)} \uparrow_{n\to\infty} \Omega, \mathfrak{M}_i(\Omega_i^{(n)}) < +\infty, \forall n \geq 1, i = 1,2$

$\Omega^{(n)} := \Omega_1^{(n)} \cap \Omega_2 \in \mathfrak{S}, \Omega^{(n)} \uparrow_{n\to\infty} \Omega, m_1(\Omega^{(n)}) < +\infty, m_2(\Omega^{(n)}) < +\infty$

$m_1^{(n)}, m_2^{(n)}$ endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$, $\mathfrak{S}' := \mathfrak{S} \cup \{\Omega\}$

$m_1, m_2, \mathfrak{S}'$ erfüllen Vorraussetzung von Satz 1 $\Rightarrow m_1^{(n)} = m_2^{(n)}$ auf $\mathcal{F}$ für alle $n \Rightarrow$
$m_1(A \cap \Omega^{(n)}) = m_2(A \cap \Omega^{(n)}), A \in \mathcal{F}$
$\downarrow n \to \infty \downarrow n \to \infty$ (Stetigkeit von unten von m_1, m_2)
$m_1(A) = m_2(A), A \in \mathcal{F}$ ∎

3.2 Fortsetzungssatz von Caratheodory

C. Caratheodory (1873-1950)

Satz 3/9 (Fortsetzungssatz)
$(\Omega, \mathcal{F})$ messbarer Raum, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ Algebra, $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}, m$ Prämaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$

Dann folgt:

(i) Es exit. ein Maß $\bar{m}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $\bar{A} = m(A), A \in \mathcal{A}$

(ii) Sei m σ-endlich auf $\mathcal{A}$. Dann ist auch $\bar{m}$ eindeutig bestimmt.

Beweis:
Beweis der Eindeutigkeit von $\bar{m}$: Sei m σ-endlich auf $\mathcal{A}$.

Ann.: $\bar{m}, \widetilde{m}$ Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $\bar{m}(A) = m(A) = \widetilde{m}(A), A \in \mathcal{A}$
$\xrightarrow{Satz 2.2}_{(\mathfrak{S}=A)} \bar{m} = \widetilde{m}$ auf $\mathcal{F}$ ∎

Das äußere Maß

Definition 3/10
$\mathcal{A}_\sigma := \{A \subseteq \Omega : A = \bigcup_{n=1}^\infty, A_n \subseteq A_{n+1}, A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1\}$

Bemerkung 3.2.0/4
$\mathcal{A}_\sigma$ ist i. a. *keine* σ-Algebra (*keine* Algebra)

Satz 3/11

(i) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\sigma$

(ii) $A, B \in \mathcal{A}_\sigma \Rightarrow A \cup B,\ A \cap B \in \mathcal{A}_\sigma$

(iii) $A_n \in \mathcal{A}_\sigma, A_n \subseteq A_{n+1}, n \geq 1 \Rightarrow A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}_\sigma$

Beweis:
(ii) A=$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \subseteq A_{n+1}, A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$ B=$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, B_n \subseteq B_{n+1}, B_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$
$\Rightarrow A \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(A_n \cap B_n)}_{\in \mathcal{A}}, A_n \cap B_n \subseteq A_{n+1} \cap B_{n+1} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}_\sigma$

analog für A∪ B

(iii) $A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m}, A_{n,m} \in \mathcal{A}, A_{n,m} \in A_{n,m+1}, m \geq 0 A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n D_m := \bigcup_{n=1}^{m} A_{n,m}, m \geq 1$ ■

Eigenschaften:

a) $D_m \in \mathcal{A}$

b) $A_{n,m} \subseteq D_m \subseteq A_m, n \leq m$

c) $D_m \subseteq D_{m+1}, m \geq 1$

d) A=$\bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$

a),c),d) $\Rightarrow A \in \mathcal{A}_\sigma$

zeigen d):

1) Aus b): $D_m \subseteq A_m \Rightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = A$

   $A_{n,m} \subseteq D_m, n \leq m \Rightarrow A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m} \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m, \forall n \Rightarrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$

Definition 3/12
$m'(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n), A \in \mathcal{A}_\sigma, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \subseteq A_{n+1}, A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$

Bemerkung 3.2.0/5
m monoton auf $\mathcal{A} \Rightarrow m(A_n) \leq m(A_{n+1})$

Beh.: Definition ist korrekt.

Lemma 3.2.0/1
$A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \subseteq A_{n+1}, A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$ $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m, B_m \subseteq B_{m+1}, B_m \in \mathcal{A}, m \geq 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} m(A_n) \leq \lim_{m\to\infty} m(B_m)$ ($A = B \Rightarrow$ Korrektheit der Definition)

Beweis:
$A_n \cap B_m \in \mathcal{A}, A_n \cap B_m \subseteq A_n \cap B_{m+1}, m \geq 1, A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty}(A_n \cap B_m)$

$\Rightarrow$ m$(A_n) = \lim_{m\to\infty} m(A_n \cap B_m)$ (Stetigkeit des Prämaßes $\mathfrak{m}$ auf $\mathcal{A}$ in Analogie zu E1.7)

$\leq \lim_{m\to\infty} m(B_m)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} m(A_n) \leq \lim_{m\to\infty} m(B_m)$ ■

Bemerkung 3.2.0/6
i. a. Eindeutigkeit von $\bar{\mathfrak{M}}$ nicht erfüllt.

Satz 3/13

(i) $m'(A) = m(A), A \in \mathcal{A}$, insbes.: $m(\emptyset) = 0$

(ii) m' ist stark additiv: $m'(A \cup B) + m'(A \cap B) = m'(A) + m'(B),\ A, B \in \mathcal{A}_\sigma$

(iii) m' ist monoton (folgt aus Lemma)

(iv) m' ist stetig von unten

Beweis:
(ii) $A, B \in \mathcal{A}_\sigma, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \subseteq A_{n+1}, A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$
$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, B_n \subseteq B_{n+1}, B_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$

$A \cap B = \bigcup_{m=1}^{\infty}(A_n \cap B_n), A_n \cap B_n \subseteq A_{n+1} \cap B_{n+1}, A_n \cap B_n \in \mathcal{A}, n \leq 1$

$A \cup B = \bigcup_{m=1}^{\infty}(A_n \cup B_n), A_n \cup B_n \subseteq A_{n+1} \cup B_{n+1}, A_n \cup B_n \in \mathcal{A}, n \leq 1$

beiden $\Rightarrow$ $m'(A \cup B) + m'(A \cap B) = \lim_{n\to\infty} m(A_n \cup B_n) + \lim_{n\to\infty} m(A_n \cap B_n) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{[m(A_n \cup B_n) + m(A_n \cap B_n)]}_{m(A_n)+m(B_n)} = m'(A) + m'(B)$

(iv): $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathcal{A}_\sigma, A_n \subseteq A_{n+1}, n \geq 1$

wissen: $A \in \mathcal{A}_\sigma$ $A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m}, A_{n,m} \subseteq A_{n,m+1}, A_{n,m} \in \mathcal{A}, m \geq 1$

$D_m := \bigcup_{n=1}^{m} A_{n,m}, m \geq 1$ $A_{n,m} \subseteq D_m \subseteq A_m, n \leq m$ (siehe (b) aus Satz 1)

z. z.: $m'(A) = \lim_{n\to\infty} m'(A_n)$

1) $A_n \subseteq A \xrightarrow{(iii)} m'(A_n) \leq m'(A) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} m'(A_n) \leq m'(A)$

2) m'(A) = (nach Definition von m) = $\lim_{m\to\infty} m(D_m) = \lim_{m\to\infty} m'(D_m) \leq (nach(iii)) \lim_{n\to\infty} m'(A_m)$ ■

Bezeichnung: m statt m'

Definition 3/14
$A \subseteq \Omega : m^*(A) = \inf_{A\subseteq B, B\in\mathcal{A}_\sigma} m(B)$

Die Mengenfuktion heißt äußeres Maß von m

Bemerkung 3.2.0/7
Warnung! m^* ist i. a. kein Maß, da m^* i. a. nicht additiv

Satz 3/15

(i) $m^*(A) = m(A), A \in \mathcal{A}_\sigma$

(ii) m^* ist stark subadditiv: $A, B \in \Omega$, $m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) \leq m^*(A) + m^*(B)$

(iii) m^* ist monoton

(iv) m^* ist stetig von unten

BEWEIS:

(i) $A \in \mathcal{A}_\sigma, B \in \mathcal{A}_\sigma, A \subseteq B$

$$m(A) \leq m(B) \Rightarrow m(A) \leq \underbrace{\inf_{A \subseteq B, B \in \mathcal{A}_\sigma} m(B)}_{m^*(A)} \leq m(A)$$

(ii) $A, B \subseteq \Omega$

F1ll 1: $m^*(A) = +\infty$ oder $m^*(B) = +\infty$ – klar

F2ll 2: $m^*(A), m^*(B) < +\infty$ $\varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathcal{A}_\sigma : m(A_\varepsilon) \leq m^*(A) + \varepsilon, m(B_\varepsilon) \leq m^*(B) + \varepsilon$

$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) \leq^* m(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) + m(A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) =^{(S.2(ii))} \leq m^*(A) + m^*(B) + 2\varepsilon$

$(*)$ da A∪ B $\subseteq A_\varepsilon \cup B_\varepsilon \in \mathcal{A}_\sigma$ A∩ B $\subseteq A_\varepsilon \cap B_\varepsilon \in \mathcal{A}_\sigma$ ∎

(iii) A,B⊆ Ω, A⊆B

$m^*(A) = \inf_{A \subseteq C, C \in \mathcal{A}_\sigma} m(C) \leq \inf_{B \subseteq C, C \in \mathcal{A}_\sigma} m(c) = m^*(B)$

(iv) A⊆ Ω, A=$\bigcup_{n=1}^\infty A_n, A_n \subseteq \Omega, A_n \subseteq A_{n+1}$

z. z.: $m^*(A) = \lim_{n \to \infty} m^*(A_n)$

todo: hier fehlt was

3.3 Vervollständigung von Maßräumen

$(\Omega, \mathcal{F}, m)$ beliebiger Maßraum

Definition 3/16
$\mathcal{F}^m = \{A \subseteq \Omega : \exists A_1, A_2 \in \mathcal{F}, A_1 \subseteq A \subseteq A_2, m(A_2 \setminus A_1) = 0\}$

Lemma 3.3.0/2
$\mathcal{F}^m$ ist eine σ-Algebra, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^m$

BEWEIS:
$\mathcal{F}^m$ ist σ-Algebra:

1) $\Omega \in \mathcal{F}^m$, da $\Omega \in \mathcal{F}$

2) $A \in \mathcal{F}^m \Rightarrow A^\complement \in \mathcal{F}^m$: klar, da $m(A_1^\complement \setminus A_2^\complement) = m(A_2 \setminus A_1) = 0$

3) $A_n \in \mathcal{F}^m, n \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}^m$: $\exists A_n^{(n)} \subseteq A_n \subseteq A_n^{(n)}, A_i^{(n)} \in \mathcal{F}, m(A_2^{(n)} \setminus A_1^{(n)} = 0, n = 1$

A:= $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_i := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i^{(n)} \in \mathcal{F}, A_1 \subseteq A \subseteq A_2, m(A_2 \setminus A_1) \leq m(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_2^{(n)} \setminus A_1^{(n)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_2^{\infty} \setminus A_1^{(n)} = 0$

$\Rightarrow A \in \mathcal{F}^m$ ■

Definition 3/17
m(A)=m(A_1) (=m(A_2)), $A_1 \subseteq A \subseteq A_2, A_1, A_2 \in \mathcal{F}, m(A_2 \setminus A_1) = 0 A \in \mathcal{F}^m$

Lemma 3.3.0/3

(i) Definition von m auf $\mathcal{F}^m$ korrekt

(ii) m ist ein Maß auf $\mathcal{F}^m$ (Fortsetzung von m auf $\mathcal{F}$)

Beweis:

(i) $A_1 \subseteq A \subseteq A_2, A_1, A_2 \in \mathcal{F}, m(A_2 \setminus A_2) = 0$ $A_1' \subseteq A \subseteq A_2', A_1', A_2' \in \mathcal{F}, m(A_2' \setminus A_1') = 0$

$\Rightarrow A_1 \setminus A_1' \subseteq A_2' \setminus A_1' \Rightarrow m(A_1 \setminus A_1') \leq m(A_2' \setminus A_1') = 0$

Es folgt $m(A_1) = \underbrace{m(A_1 \setminus A_1')}_{=0} + m(A_1 \cap A_1') = m(A_1 \cap A_1') = \ldots = m(A_1')$

(ii) (a) m($\emptyset$) =0

(b) m(A_n) $\in \mathcal{F}^m$ paarw. disjunkt, A := $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ $\exists A_1^{(n)} \subseteq A_n \subseteq A_2^{(n)} : A_1^{(n)}, A_2^{(n)} \in \mathcal{F}, m(A_2^{(n)} \setminus A_1^{(n)}) = 0, n \geq 1$

$A_i := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i^{(n)} \in \mathcal{F}, A_1 \subseteq A \subseteq A_2, m(A_2 \setminus A_1) = 0$

Es gilt: $m(A) =^{(\text{nach Definition})} m(A_1) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_1^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ (wegen σ-Additivität von m auf $\mathcal{F}$, $A_1^{(n)}, n \geq 1$, paarw. disj.) ■

Definition 3/18

(i) $\mathcal{F}^m$ heißt Vervollständigung von $\mathcal{F}$ bgzl. m

(ii) $(\Omega, \mathcal{F}^m, m)$ heißt Vervollständigung des Maßraumes $(\Omega, \mathcal{F}, m)$

Definition 3/19
Es sei $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum. $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ heißt vollständig, falls für alle $A \subseteq \Omega$, für die exist. eine Menge $B \in \mathfrak{M}$ mit $A \subseteq B$ und $\mu(B) = 0$, stets folgt $A \in \mathfrak{M}$ (und $\mu(A) = 0$ gilt)

Bemerkung 3.3.0/8
$(\Omega, \mathcal{F}^m, m)$ ist vollständig.

Satz 3/20
Sei m ein Prämaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, $\mathfrak{A}$ Algebra, $\mathcal{F} := \sigma(\mathfrak{A})$

$\bar{m}$ auf $\bar{\mathcal{F}}$ seien definiert wie im Beweis des Fortsetzungssatzes (insbesondere ist $\bar{m}$ ein Maß auf $\mathcal{F}$)

Dann gilt:

(i) $\mathcal{F}^{\bar{m}} \subseteq \bar{\mathcal{F}}$

(ii) Sei m endlich. Dann gilt $\mathcal{F}^{\bar{m}} = \bar{\mathcal{F}}$

Beweis:

(i) Sei $A \in \mathcal{F}^{\bar{m}}$. $\Rightarrow \exists A_1, A_2 \in \mathcal{F}\colon A_1 \subseteq A \subseteq A_2, \bar{m}(A_2 \setminus A_1) = 0$

$A = \underbrace{A_1}_{\in \mathcal{F} \subseteq \bar{\mathcal{F}}} \cup (A \setminus A_1)$

ggz. $A \setminus A_1 \in \bar{\mathcal{F}}$

Es gilt: $A \setminus A_1 \subseteq A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{F}, \bar{m}(A_2 \setminus A_1) = 0$

deshalb ggz.: $C \subseteq B, B \in \mathcal{F}, \bar{m}(B) = 0 \Rightarrow C \in \bar{\mathcal{F}}$

$m^*(C \cap E) + m^*(C^\complement \cap E) \leq \underbrace{m^*(B)}_{=\bar{m}(B)=0} + m^*(C^\complement \cap E) \leq m^*(E)$

umgekehrte Ungleichung folgt aus der Subadditivität von m^* (außeres Maß sogar stark subadditiv)

$\Rightarrow C \in \bar{\mathcal{F}}$

(ii) m sei endl., $A \in \bar{\mathcal{F}}$ z. z.: $A \in \mathcal{F}^{\bar{m}}$ folgerung zum Fortsetzungssatz:

$$\sup_{B \subseteq A, B \in \mathfrak{A}_\delta} \bar{m}(B) = \bar{m}(A) = \inf_{A \subseteq B, B \in \mathfrak{A}_\sigma} \bar{m}(B) \tag{3.1}$$

Analog zum Beweis von Satz 4.1 folgt hieraus:

(3.2)
$\exists A_1 \in \mathfrak{A}_{\delta\sigma}, A_2 \in \mathfrak{A}_{\sigma\delta} : A_1 \subseteq A \subseteq A_2, \bar{m}(A_1) = \bar{m}(A) = \bar{m}(A_2) (\Rightarrow \bar{m}(A_2 \setminus A_1) = 0)$

$$\mathfrak{A}_{\delta\sigma}, \mathfrak{A}_{\sigma\delta} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow A_1, A_2 \in \mathcal{F} \tag{3.3}$$

$$\Rightarrow A \in \mathcal{F}^{\bar{m}} \tag{3.4}$$

■

4 Konstruktion von Prämaßen

$\Omega \neq \emptyset$

Definition 4/1
$\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ Mengensystem, $\mathfrak{C}$ heißt dann eine Halbalgebra, falls gilt:

(1) $\Omega \in \mathfrak{C}$

(2) $\mathfrak{C}$ ist ein π-System

(3) $A \in \mathfrak{C} \Rightarrow A^{\complement} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{C}$ paarw. disj.

Bemerkung 4.0.0/9
$\emptyset \in \mathfrak{C}$

Beispiel 4.0.0/1
$\Omega = \mathbb{R}, \mathfrak{C} = \{[a,b) \cap \mathbb{R} : -\infty \leq a \leq b < +\infty\}$ Halbalgebra

Lemma 4.0.0/4
$\mathfrak{C}$ sei halbalgebra, $\mathfrak{A} := \alpha(\mathfrak{C})$ die von $\mathfrak{C}$ erzeugte Algebra

Dann gilt: $A \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{C}$ paarw. disj.

Satz 4/2
Sei m eine nicht negative Mengenfunktion auf einer Halbarlgebra. $\mathfrak{C}$, $m(\emptyset) = 0$, m additiv

(1) Es exist. genau ein Inhalt m' (additive mengenfnk. mit $m(\emptyset) = 0$) auf $\mathfrak{A} := \alpha(\mathfrak{C})$ mit $m'(A) = m(A)$, $A \in \mathfrak{C}$

Es gilt $(*)$: $m'(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$, $A \in \mathfrak{A}, A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{C}$ paarw. disj.

(2) Falls m σ-additiv auf $\mathfrak{C}$ ist, dann ist auch m' σ-additiv auf $\mathfrak{A}$ (und damit ein Prämaß).

Beweis:
(1) Definieren Mengenfunktion m' gemäß $(*)$ auf $\mathfrak{A}$

Definition ist korrekt. $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_m, A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{C}$ paarw. dj. $B_1, \ldots, B_m \in \mathfrak{C}$

$\Rightarrow A_i = \bigcup_{j=1}^{m} \underbrace{(A_i \cap B_j)}_{\in \mathfrak{C}} i = 1, \ldots, n$

$\sum_{i=1}^n m(A_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m(A_i \cap B_j)$ (Additiv. von m auf $\mathfrak{C}$) $= \sum_{j=1}^m \underbrace{\sum_{i=1}^n m(A_i \cap B_j)}_{m(B_j)} =$

$\sum_{j=1}^m m(B_j)$

$\bigcup_{i=1}^n \underbrace{(A_i \cap B_j)}_{\in \mathfrak{C}\text{pw. dj}} = B_j$

(2) m' ist additiv auf $\mathfrak{A}$ $A^{(j)j} \in \mathfrak{A}, j = 1, \dots, m$ pw. dj. A:= $\bigcup_{j=1}^m A^{(j)}$

z. z.: m'(A) $= \sum_{j=1}^m m'(A^{(j)})$

Darstellung von $A^{(j)}, A : A^{(n)} = \bigcup_{i=1}^{n_j} A_i^{(j)}, A_1^{(j)}, \dots, A_{n_j}^{(j)} \in \mathfrak{C}$ pw. dj. A=$\bigcup_{i=1}^n A_i, A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{C}$ pw. dj.

Es gilt: $\underbrace{A_i}_{\in \mathfrak{C}} = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{k=1}^{n_j} \underbrace{(A_i \cap A_k^{(j)})}_{\in \mathfrak{C}}$

m'(A) := $\sum_{i=1}^n m(A_i) = (**) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j} m(A_i \cap A_k^{(j)})$ (Additivität von m auf $\mathfrak{C}$) $= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{i=1}^n m(A_i \cap A_k^{(j)}) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j} m(A_k^{(j)})$

$\Rightarrow m'(A) = \sum_{j=1}^m m'(A^{(j)})$

(3) m' σ-additiv auf $\mathfrak{A}$, falls m σ-additiv auf $\mathfrak{C}$

Beweis analog für den Fall, dass der Index $m = +\infty$ ist. ■

Definition 4/3
Ein Mengensystem $\mathcal{K} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt kompakte Klasse, falls für beliebige Folgen $K_n \in \mathcal{K}$ mit $\bigcap_{n=1}^\infty K_n = \emptyset$ bereits ein N existiert, so dass $\bigcap_{n=1}^N K_n = \emptyset$

Beispiel 4.0.0/2
(E, ρ) metr. Raum, $\mathcal{K} := \{K \subseteq E \colon K \text{kompakt}\} \Rightarrow \mathcal{K}$ kompakte Klasse

Lemma 4.0.0/5
Sei m ein endlicher Inhalt auf einer Algebra $\mathcal{A}$

m Prämaß $\Leftrightarrow$ m ist stetig in $\emptyset$

Beweis:
$\Rightarrow$ Beweis wie früher für Maße

$\Leftarrow$ $A_n \in \mathcal{A}, n \geq$ paarw. disj., A=$\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$

z. z.: m(A) $= \sum_{n=1}^\infty m(A_n)$

m(A) $= \mathrm{m}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = m(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}_{\in\mathcal{A}} \cup \underbrace{(A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)}_{\in\mathcal{A}}) =^{mInhalt} m(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) + m(\underbrace{A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k}_{=B_n}) =$ $\sum_{k=1}^{n} m(A_k) + m(B_k), B_n \in \mathcal{A}, B_{n+1} \subseteq B_n, \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset \Rightarrow m(B_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (m stetig in $\emptyset$ auf $\mathcal{A}$) $\xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) + 0 \to$ Beh. ∎

Satz 4/4
m endlicher Inhalt auf $(\Omega, \mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ Algebra. Es sei folgende Bedingung erfüllt:

$$\forall A \in \mathcal{A}, \varepsilon > 0 \exists A' \in \mathcal{A}, K \in \mathcal{K} : A' \subseteq K \subseteq A \wedge m(A) - m(A') < \varepsilon \tag{4.1}$$

Dabei ist $\mathcal{K} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine kompakte Klasse.

$\Rightarrow$ Dann ist m ein Prämaß

Beweis:
zeigen: m isst stetig in $\emptyset$ auf $\mathcal{A}$

$A_n \in \mathcal{A}, A_{n+1} \infty A_n, n \geq 1, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$

z. z.: $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = 0$

Benutzer Satz4/4 $\varepsilon > 0$ exist. $K_n \in \mathcal{K}, A'_n \in \mathcal{A}$ mit $A'_n \subseteq K_n \subseteq A_n, m(A_n) - m(A'_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset \Rightarrow \exists N : \bigcap_{n=1}^{N} K_n = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{N} A'_n = \emptyset$

$A_N = A_N \setminus \bigcap_{n=1}^{N} A'_n = A_n \cap \bigcup_{n=1}^{N} (A'_n)^{\complement} = \bigcup_{n=1}^{N} (A_N \cap (A'_n)^{\complement}) \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} (A_n \setminus A'_n)$

$\Rightarrow m(A_N) \leq m(\bigcup_{n=1}^{N} (A_n \setminus A'_n) \leq \sum_{n=1}^{N} \underbrace{m(A_n \setminus A'_n)}_{=m(A_n) - m(A'_n)} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} m(A_N) < \varepsilon \to$ Beh. ∎

Bemerkung 4.0.0/10

(1) Falls $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A} \to$ möglich: $A' = K$

(2) Satz 4/4 gilt entsprechend für Halbalgebren $\mathcal{C}$ (anstelle von $\mathcal{A}$). Aussage: m σ-additiv auf $\mathcal{C}$ (siehe Neven I.6.2)

5 Maße auf der reellen Achse

Betrachen Maße m auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Definition 5/1
Ein Maß m auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ heißt lokal endlich, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ eine offene Menge G_x existiert, für die gilt $x \in G_x$ und $m(G_x) < +\infty$.

Bemerkung 5.0.0/11

(1) m lokal endlich $\Rightarrow m([-n, n]) < +\infty, \forall\, n \geq 1$ (folgt aus Überdeckungssatz)

(2) m lokal endlich $\Rightarrow m$ ist σ-endlich (Umkehrung geht nicht!)

Satz 5/2
Sei m ein lokal endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Dann existiert eine Funktion $\mathcal{F}_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathcal{F}_m$ ist monoton wachsend

(2) $\mathcal{F}_m$ ist stetig von links

(3) $m([a, b)) = \mathcal{F}_m(b) - \mathcal{F}_m(a), a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

Beweis:

$$\mathcal{F}_m(x) = \begin{cases} m([0, x)) & x \geq 0 \\ -m([x, 0)) & x < 0 \end{cases}$$ ∎

Satz 5/3
Es sei $\mathcal{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und stetig von links. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Maß m auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, so dass sich

$$m([a, b)) = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \tag{5.1}$$

Das Maß m ist dann lokal endlich (und damit auch σ-endlich).

Beweis:
$\mathcal{C} = \{[a, b) \cap \mathbb{R}\colon -\infty \leq a \leq b \leq +\infty\}$ Halbalgebra, $x \in \mathbb{R} : x^{(N)} := (x \wedge N) \cup (-N), \mathcal{F}_N(x) := \mathcal{F}(x^{(N)}), x \in \mathbb{R}\ \mathcal{F}_N$ monoton wachsend, linksstetig, $-\infty < \mathcal{F}_N(+\infty) := \lim_{x-\infty} \mathcal{F}_N(x) (= \mathcal{F}(N)) < \infty\ \infty > \mathcal{F}_N(-\infty) := \lim_{x-v-\infty} \mathcal{F}_N(x) (= \mathcal{F}(-N)) > -\infty$

$m_N([a, b) \cap \mathbb{R}) := \mathcal{F}_N(b) - \mathcal{F}_N(a), [a, b) \cap \mathbb{R} \in \mathcal{C}$

(1) $m_N(\emptyset) = 0$

(2) m_N ist additiv auf $\mathcal{C}$ (leicht zu überprüfen)

(3) $m_N(\mathbb{R}) = \mathcal{F}(N) - \mathcal{F}(-N) < \infty$

Nach Satz 6.1.: Es existiert ein eindeutig bestimmter Inhalt (bezeichnet durch m_N) auf $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{C})$, welcher unser vorgegebenes m_N fortsetzt. $m_N(\mathbb{R}) < \infty$

Anwendung von Satz 6.2.: m_N ist sogar ein Prämaß auf $\mathcal{A}$

$\mathcal{K} := \{K \subseteq \mathbb{R} : K \text{ kompakt}\}$, überprüfen (*) $\varepsilon > 0, A \in \mathcal{A}$ fest forgegeben, A=$\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i), [a_1, b_1), \ldots, [a_n, b_n) paarw$
(Lemma 6.1)
$K_\delta := \bigcup_{i=1}^n [a_i^{(N)}, b_i^{(N)} - \delta] \subseteq A, K_\delta$ kompakt $A'_\delta := \bigcup_{n=1}^n [a_i^{(N)}, b_i(N) - \delta] \subseteq K_\delta, A'_\delta \mathcal{A}$
$m_N(A) = \sum_{i=1}^n m_N([a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^n [\mathcal{F}_N(b_i) - \mathcal{F}_N(a_i)] = \sum_{i=1}^n [\mathcal{F}(b_i^{(N)}) - \mathcal{F}(a_i^{(N)})]$

$m_N(A'_\delta) = \sum_{i=1}^n [\mathcal{F}(b_i^{(N)}) - \mathcal{F}(a_i^{(N)})]$

$\Rightarrow m_N(A) - m_N(A'_\delta) = \sum_{i=1}^n \underbrace{[\mathcal{F}(b_i^{(N)}) - \mathcal{F}(b_i^{(N)} - \delta)]}_{\leq \frac{\varepsilon}{n} \text{für } \delta \text{ hinreichend klein (Stetigkeit von links von } \mathcal{F}!)}$

Aufgrund des Fortsetzungssatz existiert eine Fortsetzung zu einem endlichen Maß m_N auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{A})$.
Es gilt: $m_N \leq m_{N+1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Setzen: $\mu_N(A) = m_{N+1}(A \cap [-N, N]), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mu_N$ Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, μ_N endlich
$\mu_N(A) \leq m_{N+1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
Beh.: $\mu_N = m_N$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$: $\mu_N([a, b) \cap \mathbb{R}) = m_{N+1}([a, b) \cap [-N, N)) = m_N([a, b) \cap \mathbb{R}) \Rightarrow$
$\mu_N = m_N auf \mathcal{C} \Rightarrow^{Eindeutigkeitssatzfürendl. Ma„e} \mu_N = m_N auf \mathcal{B}(\mathbb{R})$

aus Beispiel 1.8: m(A) = $\lim_{N \to \infty} m_N(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow mMa„$ m([a,b))=$\lim_{N \to \infty} m_N([a, b)) = \lim_{N \to \infty} [\mathcal{F}_N(b) - \mathcal{F}_N(a)] = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$

Eindeutigkeit von m: Seien m, m' entsprechende Maße, $\mathcal{C}' = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\} \Rightarrow m = m'$ auf $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}'$ π-System, $\sigma(\mathcal{C}') = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, m, m' σ-endlich auf $\mathcal{C}' \Rightarrow^{Satz 2.2} m = m'$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ■

Definition 5/4

(1) $\mathcal{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, monoton wachsend und linksstetig, heißt maßerzeugende Funktion

(2) sei m lokal endliches Maß. Dann heißt $\mathcal{F}_m$ (aus Satz 1) m-erzeugend

(3) Eine maßerzeugende Funktion $\mathcal{F}$ heißt Verteilungsfunktion, falls zusätzlich $\lim_{x \to -\infty} \mathcal{F}(x) = 0, \lim_{x \to \infty} \mathcal{F}(x) = 1$

Bemerkung 5.0.0/12
Eine Verteilungsfunktion erzeugt ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Definition 5/5
Das Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit $\lambda([a, b]) = b - a$ heißt Lebesgue-Maß.

Lemma 5.0.0/6
λ ist auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ verschiebungsinvariant:

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R} \Rightarrow x + A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \wedge \lambda(x + A) = \lambda(A) \tag{5.2}$$

Beweis:
als Übungsaufgabe: Anwendung von Satz 8.2 ■

Satz 5/6
Es existiert $V \subset \mathbb{R}$ mit $V \notin \mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$.

Beweis:
$a, b \in \mathbb{R}$: $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}_a$ Restklasse bzgl. $\sim$ mit $a \in \mathbb{Q}$, $(\mathbb{Q}_a)_{a\in\mathbb{R}}$ Zerlegung von $\mathbb{R}$: $\bigcup_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{Q}_a = \mathbb{R}$ $a \not\sim b \Rightarrow \mathbb{Q}_a \cap \mathbb{Q}_b = \emptyset$

V sei eine Auswahlmenge für $(Q_a)_{a\in\mathbb{R}}$, dann besteht $V \cap \mathbb{Q}_a$ aus genau einem Element.

$V_r := r + V, r \in \mathbb{Q}$

Eigenschaften

(1) $r_1 \neq r_2 \Rightarrow V_{r_1} \cap V_{r_2} = \emptyset, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$

Ann.: $x \in V_{r_1} \cap V_{r_2} \Rightarrow x = r_1 + a = r_2 + b, a, b \in V$ (a und b sind auswahlelemente)
$a - b = r_1 - r_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow a \sim b$

$\Rightarrow a = b \Rightarrow r_1 = r_2$

(2) $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} V_r = \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Q}_a$, o. B. d. A.: $a \in V$

$x \in a + \mathbb{Q} \Rightarrow x = a + r, r \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow r \in V_r$

Annahme: $V \in \mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$

1. Fall: $\lambda(V) = 0 \Rightarrow +\infty = \lambda(\mathbb{R}) = \lambda(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} V_r) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} \lambda(V_r) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} \lambda(r + v) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} \lambda(V) = 0$

   Widerspruch!

2. Fall: $\lambda(V) > 0$ $\lambda(V) = \lim_{n\to\infty} \lambda(V \cap [-n, +n]) \Rightarrow \exists n : \lambda(V \cap [-n, +n]) > 0$
   2n=λ([-n,n])$\geq \lambda(\bigcup_{k=1}^\infty V_{\frac{1}{2^k}} \cap [-n, n]) = \sum_{k=1}^\infty \lambda(V_{\frac{1}{2^k}} \cap [-n, n]) \geq \sum_{k=1}^\infty \lambda(V_{\frac{1}{2^k}} \cap [-n + \frac{1}{2^k}, n] = \sum_{k=1}^\infty [\lambda(V_{\frac{1}{2^k}} \cap [-n + \frac{1}{2^k}, n + \frac{1}{2^k}) - \underbrace{\lambda(V_{\frac{1}{2^k}} \cap (n, n + \frac{1}{2^k}])}_{\leq \frac{1}{2^k}} \geq$
   $\sum_{k=1}^\infty \lambda(\frac{1}{2^k} + V \cap [-n, n]) - 1 = \sum_{k=1}^\infty \underbrace{\lambda(V \cap [-n, n])}_{>0} - 1 = +\infty$ ■

Folgerung 5.0.0/1
$\operatorname{card}(\{A \in \mathbb{R} \colon A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})\}) = 2^{\complement}$

Beweis:
$M = \{V' \subseteq \mathbb{R} \colon V'$ Auswahlmenge von $(Q_a)_{a\in\mathbb{R}}\}$ $(V' \in M \Rightarrow V' \notin \mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R}))$

Mächtigkeit(M) = Mächtigkeit$(\times_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{Q}_a) = \prod_{a\in\mathbb{R}} \operatorname{card}(\mathbb{Q}_a)$
$= \prod_{a\in\mathbb{R}} \operatorname{card}(\mathbb{Q}) = \operatorname{card}(\mathbb{Q})^{\operatorname{card}(\mathbb{R})} \geq 2^{\complement}$ ∎

Satz 5/7
Es exitiere *kein* verschiebungsinvariante Maß m auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ mit $m([0,1]) = 1$ (bzw. $0 < m([0,1]) < \infty$).

todo: Satz muss überarbeitet werden!

6 Maße auf metrischen Räumen

Satz 6/1
$(\Omega, \mathcal{F})$ messbarer Raum, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}, \mathcal{M}' = \Updownarrow(\mathcal{K})$ (kleinste monotone Klasse $\supseteq \mathcal{K}$).

Es gilt:

(1) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{K}$

(2) $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{K}$

(3) $A \in \mathcal{K} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathcal{M}'$

$\Rightarrow \mathcal{M}' = \mathcal{F}$

Beweis:
Übungsaufgabe ∎

Satz 6/2
$\Updownarrow$ sei ein σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$ wie in Satz 1.

Dann gilt: (*) $\Updownarrow(A) = \sup_{\mathcal{F} \subseteq A, \mathcal{F} \in \mathcal{K}_\delta} \Updownarrow(\mathcal{F}), \mathcal{K}_\delta = \{A = \bigcap_{n=1}^\infty A_n : A_n \in \mathcal{K}, A_{n+1} \subseteq A_n, n \geq 1\}$

Beweis:
I $\Updownarrow$ sei endlich $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{F} : (*) erfüllt\}$ Dann gilt:

(a) $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$

(b) 2 $\mathcal{M}$ monotone Klasse

$\Rightarrow^{Satz 1} \mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$

Beiweis von 2:

(a) $A_n \subseteq A_{n+1}, A_n \in \mathcal{M}, A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$

$\Updownarrow(A) = \sup_{n \geq 1} \Updownarrow(A_n) = \sup_{n \geq 1} \sup_{\mathcal{F} \subseteq A_n, \mathcal{F} \in K_\delta} \Updownarrow(\mathcal{F}) \leq \sup_{n \geq 1} \sup_{\mathcal{F} \subseteq A, \mathcal{F} \in K_\delta} \Updownarrow(\mathcal{F}) \leq \Updownarrow(A)$

(b) $A_{n+1} \subseteq A_n \in \mathcal{M}, n \geq 1, A = \bigcap_{n=1}^\infty A_n \; \exists \mathcal{F}_n \in \mathcal{K}_\delta : \Updownarrow(A_n) - m(\mathcal{F}_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$
$\mathcal{F}_n \subseteq A_n \; \mathcal{F}'_n = \bigcap_{k=1}^n \mathcal{F}_k, \mathcal{F}'_n \subseteq A_n, \mathcal{F}'_n \in \mathcal{K}_\delta \Updownarrow(A_n \setminus \mathcal{F}'_n) = \Updownarrow(A_n \cap (\bigcap_{k=1}^n \mathcal{F}_k)^{\complement}) = m(\bigcup_{k=1}^n (A_n \setminus \mathcal{F}_k) \leq m(\bigcup_{k=1}^n (A_k \setminus \mathcal{F}_k) \leq \sum_{k=1}^n \underbrace{\Updownarrow(A_k \setminus \mathcal{F}_k)}_{\frac{\varepsilon}{2^k}} < \varepsilon$

Wählen $\mathcal{F} := \cap_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n = \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{F}'_n \Rightarrow \mathcal{F} \in \mathcal{K}_\delta = (\mathcal{K}_\delta)_\delta, \mathcal{F} \uparrow$

$\Updownarrow(A) - \Updownarrow(\mathcal{F}) = \lim_{n\to\infty}[\underbrace{m(A_n) - m(\mathcal{F}'_n)}_{<\varepsilon}] < \varepsilon$

II $\Updownarrow$ σ-endlich $\exists \Omega_n \in \mathcal{F}$, $\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1}$ $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n, \Updownarrow(\Omega_n) < \infty$

$\Updownarrow_n(A) := \Updownarrow(A \cap \Omega_n), A \in \mathcal{F}$

$\Updownarrow_n$ endliches Maß

$\Updownarrow(A) = \sup_{n\geq 1} \Updownarrow(A \cap \Omega_n) = \sup_{n\geq 1} \Updownarrow_n(A) =^{I} \sup_{n\geq 1} \sup_{\mathcal{F}\subseteq A, \mathcal{F}\in\mathcal{K}_\delta} \Updownarrow_n(\mathcal{F}) \leq \sup_{n\geq 1} \sup_{\mathcal{F}\subseteq A, \mathcal{F}\in\mathcal{K}_\delta} \Updownarrow(\mathcal{F}) \leq$ $m(A) \Rightarrow$ (*) ■

(E, ρ) metrischer Raum, $\mathcal{F} = \{\mathcal{F} \subseteq E \colon \mathcal{F} abgeschlossen\}$ $\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{F})$

Eigenschaften von $\mathcal{F}$:

(1) $\emptyset, E \in \mathcal{F}$

(2) $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \in \mathcal{F}$

(3) $\mathcal{F} \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}^\complement \in \Updownarrow(\mathcal{F}) : \mathcal{F} = \{x \in E : \rho(x, \mathcal{F}) = 0\}$

$$\mathcal{F}^\complement = \{x \in E : \rho(x, \mathcal{F}) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x \in E : \rho(x, \mathcal{F}) \geq \frac{1}{n}\}}_{abgeschlossen} \in \mathcal{F}_\sigma \subseteq \Updownarrow(\mathcal{F})$$

(4) $\mathcal{F}_\delta = \mathcal{F}$

Satz 6/3
Sei m ein σ-endliches Maß auf $(E, \mathcal{B}(E))$.

Dann folgt $\Updownarrow(A) = \sup_{\mathcal{F}\subseteq A, \mathcal{F}\in\mathcal{F}} \Updownarrow(\mathcal{F}), A \in B(E)$

Satz 6/4 (Approximation von Außen)
m beliebiges Maß auf $(E, B(E))$, $A \in B(E)$ fest gewählt

$\mathcal{G} = \{G \subseteq E : Gopffen\}$ (*) $\Updownarrow(A) = \inf_{A\subseteq G, G\in\mathcal{G}} m(G) \Leftrightarrow$ Falls $m(A) < \infty$, dann exist $G_0 \supseteq A$, offen mit $m(G_0) < \infty$

Folgerung 6.0.0/2
m endliches Maß auf $(E, B(E))$

Dann gilt: $m(A) = \inf_{A\subseteq G, G\in\mathcal{G}} m(G), A \in B(E)$

Folgerung 6.0.0/3
λ Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R})) \Rightarrow \lambda(A) = \inf_{A\subseteq G, G\in\mathcal{G}} \lambda(G), A \in B(\mathbb{R})$

Beweis:
$A \in B(\mathbb{R}),\ A \cap [n, n1),\ n \in \mathbb{Z}$

$\underbrace{A \cap [n, n+1)}_{erf\ddot{u}lltBedingunginSatz4}$ $\subseteq$(n-1,n+1) offen

Es exits. G_n offen, $A \cap [n, n+1) \subseteq G_n$ und $\lambda(G_n) - \lambda(A \cap [n, n-1)) < \frac{\varepsilon}{2^{|n|}}$

$\lambda(A) = \sum_{\text{nganzz.}} \lambda(A \cap [n, n-1)) \geq \sum_{\text{nganzz.}} [\lambda(G_n) - \frac{\varepsilon}{2^{|n|}}] \geq \lambda(\bigcup_{\text{nganzz.}} G_n) - 3\varepsilon = \lambda(G) - 3\varepsilon, G = \bigcup_{\text{nganzz.}} G_n$ offen, $G \supseteq A$ ∎

Beweis:
$\Updownarrow$ auf $(E, \mathcal{B}(E)),\ A \in \mathcal{B}(E)$

$m(A) = \inf_{A \subseteq G, G \text{ offen}} m(G) \Leftrightarrow$ Falls $m(A) < \infty$, so exist $G_0 \supseteq A, G_0$ offen, $m(G_0) < \infty$

$\Leftarrow\ m(A) < \infty$

$\Rightarrow$ Es exist $G_0 \supseteq A, G_0$ offen, $m(G_0) < +\infty$ $m_0(B) = m(B \cap G_0), B \in \mathcal{B}(E), m_0$ endliches Maß auf $(E, \lfloor(E))$ $m_0(A^{\complement}) = \sup_{\mathcal{F} \subseteq A^{\complement}, \mathcal{F} \text{ abgeschl.}} m_0(\mathcal{F})$ (Anwendung von Satz 3) $m(A) = m(G_0) - m(G_0 \cap A^{\complement}) = m(G_0) = -m_0(A^{\complement}) = m(G_0) - \sup_{\mathcal{F} \subseteq A^{\complement}, \mathcal{F}abg.} m_0(\mathcal{F}) = m(G_0) - \sup_{\mathcal{F} \subseteq A^{\complement}, \mathcal{F}abg.} [\underbrace{m_0(E)}_{=m(G_0)} - m_0(\mathcal{F}^{\complement})] = \inf_{\mathcal{F} \subseteq A^{\complement}, \mathcal{F}abg.} \Updownarrow(\mathcal{F}^{\complement} \cap G_0) = \inf_{A \subseteq G, Goffen} m(G \cap G_0) = \inf_{A \subseteq G, Goffen} m(G)$ ∎

Approximation durch kompakte Mengen

Satz 6/5
(E, ρ) sei ein vollständiger separabler metrischer Raum. m σ-endliches Maß auf $(E, B(E))$.

Dann gilt:

(6.1)
$$m(A) = \sup_{K \subseteq A, Kkompakt} m(K), A \in \mathcal{B}(E)$$

Beweis:
I. Reduktion auf dem Fall eines *endlichen* Maßes m :

m σ-endlich $\Rightarrow \exists E_n \uparrow E,\ E_n \in \mathcal{B}(E), m(E_n) < \infty, n \geq 1$

$m_n(A) := m(A \cap E_n), A \in \mathcal{B}(E)$ m_n endliches Maß $m(A) = \sup_{n \geq 1} m(A \cap E_n) = \sup_{n \geq 1} m_n(A) = \sup_{n \geq 1} \sup_{K \subseteq A, Kkompakt} m_n(K) \leq \sup_{K \subseteq A, Kkompakt} m(K) \leq m(A)$

II. Reduktion auf den Fall $A = \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ abgeschlossen): (Anwendung Satz 3)

III. Reduktion auf den Fall $A = E$: $(\mathcal{F}, \rho_{\mathcal{F} \times \mathcal{F}})$ metrischer Unterraum

Fakt: $(\mathcal{F}, \rho_{\mathcal{F} \times \mathcal{F}})$ ist vollständig und separabel ($\mathcal{F}$ abgeschlossen)

Setzen: $m_{\mathcal{F}}(B) := \Updownarrow(B), B \in \mathcal{B}(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(E) \cap \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(E)$

$m(\mathcal{F}) = m_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}) =_{vorraus.} \sup_{K \subseteq \mathcal{F}, Kkompaktin\mathcal{F}} m_{\mathcal{F}}(K) = \sup_{K \subseteq \mathcal{F}, Kkompakt(inE)} m(K)$

IV. m endlich, A=E: $\{x_1, x_2, \ldots\}$ abzählbar dichte Menge $S_{\frac{1}{n}}(x_k) abgeschlossenevollkugelvomRadium \frac{1}{n} undMitte$

$\mathcal{F}_{n,s} := \bigcup_{k=1}^{s} S_{\frac{1}{n}}(x_k) abgeschlossen, \bigcup_{s=1, \mathcal{F}_{n,s} \subseteq \mathcal{F}_{n,s+1}}^{\infty} \mathcal{F}_{n,s} = E$

$\exists s_n : m(E) \leq m(\mathcal{F}_{n,s}) + \frac{\varepsilon}{2^n}, \varepsilon > 0$

$K := \bigcap_{n=}^{\infty} \mathcal{F}_{n,s_n}$ Eigenschaften von K

(1) abgeschlossen

(2) präkompakt (Definition: K besitzt beliebige Teilfolge, die Konvergiert, muss aber nicht in K konvergieren)

$\Rightarrow K$ kompakt

Fakt
E vollständig

$$K \subseteq E \text{ präkompakt } \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists \text{ endl. } \delta\text{−Netz} N(\delta) \tag{6.2}$$

Definition 6/6
Ein δ-Netz ist: $\{z_1, \ldots, z_l\} = N(\delta)$ es gilt: $\forall x \in \mathcal{K}$ existiert ein $z_k \in N(\delta)$ so dass $\rho(x, z_k) < \delta$

$\delta = \frac{1}{n}$ $\{x_1, \ldots, x_{sn}\}$ ist $\frac{1}{n}$-Netz für K

$m(E) - m(K) = m(K^{\complement}) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{n,sn}^{\complement}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{m(\mathcal{F}_{n,sn}^{\complement})}_{=m(E)-m(\mathcal{F}_{n,sn}) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}} \leq \varepsilon$ ∎

7 Das Integral

7.1 Das Integral für nicht negative einfache Funktionen

$(\Omega, \mathcal{F}, m)$ beliebiger Maßraum

Erinnerung: f messbare (erweitert reelle) Funktion auf $(\Omega, \mathcal{F})$ $f\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (\hat{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\hat{\mathbb{R}}))$ messbar

Definition 7/1
Sei f eine messbare Funktion auf $(\Omega, \mathcal{F})$.

Dann heißt f *einfach*, falls f nur *endlich viele* Werte besitzt.

Eindeutige Darstellung: (D) f=$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot 1_{A_k}$ $x_1, \ldots, x_n \in \hat{\mathbb{R}}$, paarweise verschieden $\{ A_1, \ldots, A_n\}$ messbare Zerlegung von Ω

(1) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$

(2) $A_1, \ldots, A_n paarw.disj.$

(3) $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i$

Bemerkung 7.1.0/13
$A_i = \{f = x_i\} := \{\omega \in \Omega : f(\omega) = x_i\}(f^{-1}(\{x_i\})$

Definition 7/2
Sei f eine nichtnegative einfache Funktion, mit der Darstellung (D)

(7.1)
$$\int\limits_{\Omega} f\,\mathfrak{m} := \sum_{i=1}^{n} x_i m(A_i)$$

Notation

(7.2)
$$\int\limits_{\Omega} f\,\mathfrak{m} \int\limits_{\Omega} f(\omega)\,\mathfrak{m}(\omega), \int\limits_{\Omega} f(\omega) m(d\omega)$$

Eigenschaften:

E1 $f = 1_A, A \in \mathcal{F} \Rightarrow \int_\Omega f\, \mathfrak{m} = m(A)$ f= $1 \cdot 1_A + 0 \cdot_{A^\complement}$

E2 f=$\sum_{j=1}^m x'_j 1_{A'_j}, x'_1, \ldots, x'_m \in [0, \infty], \{A'_1, \ldots, A'_m\}$ messbare Zerlegung von Ω

f einfach, $f \geq 0 \Rightarrow$

(7.3) $$\int_\Omega f\, \mathfrak{m} = \sum_{j=1}^m x'_j m(A'_j)$$

Beweis:
$x_1, \ldots, x_n \in [0, \infty]$ seien die paarw. verschiedenen Werte von $f, A_i = \{f = x_i\}, i = 1, \ldots, n$

$$\sum_{j=1}^m x'_j m(A'_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, x'_j = x_i}^m x'_j m(A'_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, x'_j = x_i}^m m(A'_j) = \sum_{i=1}^n x_i m(A_i) = \int_\Omega f\, \mathfrak{m} \blacksquare$$

E3 (Positivität) f nicht negetiv und einfach

$\Rightarrow \int_\Omega f\, \mathfrak{m} \geq 0$

E4 (Linearität) f, g nichtnegative einfache Funktionen, $a, b \in \mathbb{R}$

$af + bg \geq 0 \Rightarrow af + bg$ nicht negativ und einfach und $\int_\Omega [af + bg]\, dm = a \int_\Omega f\, dm + b \int_\Omega g\, dm$

Beweis:
$f = \sum_{i=1}^n x_i 1_{A_i}, x_1, \ldots, x_n \in [0, \infty] paarw. verschiedene, \{A_1, \ldots, A_{n\}meb„barZerlegun}$
g=$\sum_{j=1}^m y_j 1_{B_j}, y_1, \ldots, y_m \in [0, \infty] \{B_1, \ldots\}$

$\Rightarrow af + bg = \sum_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m} [ax_i + by_j] 1_{A_i \cap B_j}$

$\Rightarrow^{E2} \int_\Omega [af + bg] dm = \sum_{i=..,j=..} [ax_i + by_j] m(A_i \cap B_j) = a \sum_{i,j} x_i m(A_i \cap B_j) + b \sum_{i,j} y_j m(A_i \cap B_j) = a \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{\sum_{j=1}^m m(A_i \cap B_j)}_{=m(A_i)} + b \sum_{j=1}^m y_j \underbrace{\sum_{i=1}^n (A_i \cap B_j)}$ $\blacksquare$

E5 $f \geq 0$ einfach

$\int_\Omega f dm = 0 \Leftrightarrow f = 0 m$ fast überall (d. h. m($\{\omega$:f(ω) $\neq$0$\}$)=0)

Beweis:
$\int_\Omega f dm = \sum_{i=1}^n x_i m(A_i) = 0 \Leftrightarrow m(A_i) = 0, \forall i : x_i > 0 \Leftrightarrow 0 = \sum_i m(A_i) = m(\underbrace{\bigcup_{i: x_i > 0} A_i}_{=\{f>0\}}) \Leftrightarrow m(\{f > 0\}) = 0$ $\blacksquare$

7.2 Das Integral nichtnegativer messbarer Funktionen

$(\Omega, \mathcal{F}, m)$ beliebiger Maßraum

Definition 7/3
Eine auf $(\Omega, \mathcal{F})$ messbare (erweitert reelee) Funktion f mit $f(\omega) \geq 0$, $\omega \in \Omega$, heißt nichtnegative messbare Funktion (auf $(\Omega, \mathcal{F})$)

Satz 7/4
f sei nichtnegativ messbar.

Dann existiert eine Folge (f_n) von nichtnegativen einfachen Funktionen mit $f_n \leq f_{n+1}$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega), \omega \in \Omega$

Beweis:

$$f_n(\Omega) := \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \frac{k}{2^n} \leq f(\omega) < \frac{k+1}{2^n}, k = 0, \dots, n2^n - 1 \\ n & f(\omega) \geq n \end{cases} \quad f_n(\omega) \uparrow_{n\to\infty} f(\omega), \forall \omega \in \Omega \tag{7.4}$$ ■

Definition 7/5
todo: Hier fehlt was!!!

Satz 7/6
$(f_n), (g_n)$ seien folgen von nichtnegativen einfachen Funktionen, $f_n \leq f_{n+1}, g_n \leq g_{n+1}, n \geq 1$. Es gelte:

$$\lim_{n\to\infty} f_n \leq \lim_{n\to\infty} g_n \tag{7.5}$$

Dann folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} f_n \mathfrak{m} \leq \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} g_n dm \tag{7.6}$$

Beweis:
g. z. z: $\int_\Omega f_m \mathfrak{m} \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \mathfrak{m}, \forall m \geq 1$

Es genügt zu beweisen: f beliebige nichtnegative einfache Funktion, f$\leq \lim_{n\to\infty} g_n \Rightarrow \int_\Omega f dm \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \mathfrak{m}$

Sei $\varepsilon > 0$ $\Omega_n := \{f - \varepsilon \leq g_n\} \Rightarrow \Omega_n \in \mathcal{F}$ (nach 3.9.E1), $\Omega_n \uparrow \Omega$ (f-ε)$1_{\Omega_n} \leq g_n 1_{\Omega_n} \leq g_n \Rightarrow \max\{f - \varepsilon, 0\} 1_{\Omega_n} \leq g_n$

Darstellung von f: f=$\sum_{i=1}^m x_i 1^{A_i}, x_1, \dots, x_n \in [0, \infty]$ paarw. verschieden $\{A_1, \dots, A_n\}$ messbare Zerlegung von Ω

$\Rightarrow$

$$\max\{f-\varepsilon,0\}1_{\Omega_n}=\sum_{i=1}^{m}\max\{x_i-\varepsilon,0\}1_{A_i\cap\Omega_n}+0\cdot 1_{\Omega_n^\complement}$$

$\int_\Omega \max\{f-\varepsilon,0\}1_{\Omega_n}\mathfrak{m} =^{E1.2} \sum_{i=1}^m \max\{x_i-\varepsilon,0\}m(A_i\cap\Omega_n \leq^{E1.5Monitonie} \int_\Omega g_n dm$

für n$\rightarrow\infty$ $\sum_{i=1}^m \max\{x_i-\varepsilon,0\}m(A_i)\leq \lim_{n\to\infty}\int_\Omega g_n\mathfrak{m}$

$\int_\Omega f dm=\sum_{i=1}^m x_i m(A_i)\leq \lim_{n\to\infty}\int_\Omega g_n\mathfrak{m}$ ■

Folgerung 7.2.0/4
Def. 2 ist korrekt

f=$\lim_{n\to\infty} f_n=\lim_{n\to\infty} g_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\mathfrak{m}=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g_n\mathfrak{m}$

Eigenschaften:

E1 $f=1_A, A\in\mathcal{F}\Rightarrow \int_\Omega f dm=m(A)$

E2 (Positivität)

E3 (Linearität) f,g nichtnegative messbare Funktionen, $a,b\in\mathbb{R}$ und $a,b\geq 0$

$\Rightarrow af+bg$ nichtnegative messbare Funktion und es gilt: $\int_\Omega(af+bg)dm=a\int_\Omega f dm+ b\int_\Omega g dm$

Beweis:
(f_n) und (g_n) Folgen von nichtnegativen einfachen Funktionen, $f_n\uparrow f$ und $g_n\uparrow g$

$\Rightarrow af_n+bg_n$ nichtneg. einfach, $af_n+bg_n\uparrow af+bg$
$\Rightarrow \int_\Omega(af+bg)\mathfrak{m}:=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega(af_n+bg_n)dm =^{E1.4.} \lim_{n\to\infty}(a\int_\Omega f_n\mathfrak{m}+b\int_\Omega g_n\mathfrak{m})$
$=a\int_\Omega f\mathfrak{m}+b\int_\Omega g dm$ ■

E4 (monotonie) f,g nichtnegativ messbar, f≤g $\Rightarrow \int_\Omega f dm\leq\int_\Omega g\mathfrak{m}$

Beweis:
Anwendung von Satz 2: $f_n\uparrow f, g_n\uparrow g, f_n, g_n$ nicht negativ und einfach $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n\leq \lim_{n\to\infty} g_n \Rightarrow^{Satz2} \lim_{n\to\infty}\int f_n dm\leq \lim_{n\to\infty}\int g_n\mathfrak{m}\Rightarrow \int_\Omega f dm\leq\int_\Omega g dm$ ■

E5 f ≥ 0 messbar

$\int_\Omega$ fdm $=0\Leftrightarrow f=0$ m-fast überall $(m(\{f>0\})=0)$

Beweis:
(a) „$\Rightarrow$“ (Kontraposition) Ann.: m({f>0})>0

Sei (f_n) Folge nichtneg. einfacher Funktionen, $f_n\uparrow f$ 0<m({f>0})=m($\bigcup_{n=1}^\infty\{f_n> 0\})=\lim_{n\to\infty} m(\{f_n>0\})\Rightarrow \exists n: m(\{f_n>0\})>0 \Rightarrow^{E1.6} \int_\Omega f_n\mathfrak{m}>0\Rightarrow \int_\Omega f dm\geq\int_\Omega f_n\mathfrak{m}>0$

(b) „$\Leftarrow$“

Es gelte: $f = 0$ m-fast überall Sei (f_n) Folge nichtneg. einfacher Funktionen, $f_n \uparrow f \Rightarrow f_n = 0$ m-fast überall $\Rightarrow^{E1.6} \int_\Omega f_n \mathfrak{m} = 0, \forall n \Rightarrow \int_\Omega f dm := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathfrak{m} = 0$ ∎

E6 f$\geq$0 messbar

(7.7)
$$\int\limits_\Omega f dm < \infty \Rightarrow f < \infty \text{m-fast überall}(d.\,h.m(\{f = \infty\}) = 0)$$

Beweis:
f$\geq \infty 1_{\{f=\infty\}} \Rightarrow^{E4} \infty > \int_\Omega f dm \geq \int_\Omega \infty 1_{\{f=\infty\}} \mathfrak{m} = \infty m(\{f = \infty\})$ ∎

7.3 Integrierbare Funktion

$(\Omega, \mathcal{F}, m)$ beliebieger Maßraum, f sei messbare Funktion auf $(\Omega, \mathcal{F})$, f=$f^+ - f^-$ $f^+ = \max\{f, 0\} positiverTeilvonf, f^- = \max\{0, -f\} negativerTeil$ $f^+, f^- nichtnegativemessbareFunktic$

Definition 7/7

(i) Wir sagen, dass das Integral $\int_\Omega f dm$ *existiert*, falls $\int_\Omega f^+ < \infty \vee \int_\Omega f^- < \infty$.

Wir setzen:

(7.8)
$$\int\limits_\Omega f dm := \int\limits_\Omega f^+ \mathfrak{m} - \int\limits_\Omega f^- dm$$

(ii) f heiß't integrierbar, falls f messbar ist und $\int_\Omega f dm$ existiert sowie endlich ist ($\Leftrightarrow$ $\int_\Omega f^+ \mathfrak{m}, \int_\Omega f^- \mathfrak{m} < \infty$

Eigenschaften:

E1 f=$1_A, A \in \mathcal{F} \Rightarrow \int_\Omega f dm = m(A)$

E2 Positivität f$\geq$0 messbar $\Rightarrow \int_\Omega f dm \geq 0$

E3 Lineariotät f, g messbare Funktionen, $\int_\Omega f\, dm, \int_\Omega g\, dm$ exitsieren, $a, b \in \mathbb{R}$

(7.9)
$$a \int\limits_\Omega f dm + b \int\limits_\Omega g\, dm$$

sinnvoll nach Rechenregeln mit ∞

Dann gilt: $\int_\Omega (af + bg)\mathfrak{m}$ exitsiert und es gilt: $\int_\Omega (af + bg)\mathfrak{m} = \int_\Omega f dm + b \int_\Omega g dm$

Berechnung: $\int_\Omega (f+g)^+ \mathfrak{m} = \int_\Omega (f+g) \cdot 1_{\{f+g\geq 0\}} \mathfrak{m} = \int_\Omega (f^+ - f^- + g^+ - g^-) \cdot 1_{\{f+g\geq 0\}} \mathfrak{m} =$
$\int_\Omega \underbrace{[(f^+ + g^+)1_{\{f+g\geq 0\}} - (f^- + g^-)1^{\{f+g\geq 0\}}]}_{\geq 0} \mathfrak{m}$

Zwischenschritt: $\int_\Omega (f^- + g^-)1_{\{f+g\geq 0\}} \mathfrak{m} < +\infty$

a. Fall Sei (3) erfüllt $\Rightarrow \int_\Omega (f^- + g^-)1_{\{f+g\geq 0\}} \mathfrak{m} \leq_{Monotonie} \int_\Omega (f^- + g^-) \mathfrak{m} < \infty$

b. Fbll Sei (2) erfüllt

(7.10)
$$\int\limits_\Omega (f^- + g^-)1_{\{f+g\geq 0\}} \mathfrak{m} \leq^{Monotonie} \int\limits_\Omega (f^+ + g^+)1_{\{f+g\geq 0\}} \mathfrak{m} \leq \int\limits_\Omega (f^+ + g^+) \mathfrak{m} < +\infty$$

Anwendung von II: $\Rightarrow \int_\Omega [f+g]^+ \mathfrak{m} = \int_\Omega (f^+ + g^+)1_{\{f+g\geq 0\}} \mathfrak{m} - \int_\Omega (f^- + g^-)1_{\{f+g\geq 0\}} \mathfrak{m} =$
$\int_\Omega f^+ 1_{\{f+g\geq 0\}} \mathfrak{m} + \int_\Omega g^+ 1_{\{f+g\geq 0\}} \mathfrak{m} - \int_\Omega f^- 1_{\{f+g\geq 0\}} \mathfrak{m} - \int_\Omega g^- 1_{\{f+g\geq 0\}} \mathfrak{m}$

Analog: $\int_\Omega (f+g)^- \mathfrak{m} = \int_\Omega (-f-g)1_{\{f+g\geq 0\}} \mathfrak{m} = \ldots = \int_\Omega f^- 1_{\{f+g\geq 0\}} dm + \int_\Omega g^- 1_{\{f+g\geq 0\}} dm -$
$\int_\Omega f^+ 1_{\{f+g\geq 0\}} \mathfrak{m} - \int_\Omega g^+ 1_{\{f+g\geq 0\}} \mathfrak{m}$

Es folgt aus Alternative (2) oder (3)

$$\int\limits_\Omega (f+g)^+ \mathfrak{m} < +\infty \text{oder} \int\limits_\Omega (f+g)^- \mathfrak{m} < +\infty \tag{7.11}$$

Daraus folgt:

$$\exists \int\limits_\Omega (f+g) \mathfrak{m} \text{und} \tag{7.12}$$

(7.13)
$$\int\limits_\Omega (f+g)\mathfrak{m} := \int\limits_\Omega (f+g)^+ \mathfrak{m} - \int\limits_\Omega (f+g)^- \mathfrak{m} = \int\limits_\Omega f^+ \mathfrak{m} + \int\limits_\Omega g^+ \mathfrak{m} - \int\limits_\Omega f^- dm - \int\limits_\Omega g^- \mathfrak{m} = \int\limits_\Omega f\, \mathfrak{m} + \int\limits_\Omega g\, dm$$

E4 (Monotonie) f,g messbar, f≤g, $\int_\Omega f\, \mathfrak{m}, \int_\Omega g\, \mathfrak{m}$ existieren.

Dann folgt:

$$\int\limits_\Omega f\, dm \leq \int\limits_\Omega g\, dm \tag{7.14}$$

Beweis:
o. B. d. A.:$\int_\Omega f\, \mathfrak{m} > -\infty, \int_\Omega g\, \mathfrak{m} < +\infty$

$\Rightarrow$ m({f=-∞}) $=$ m$(\{f^- = +\infty\}) = 0$ (da $\int_\Omega f^- \mathfrak{m} < +\infty$)

m({g=+∞})=m$(\{g^+ = +\infty\}) = 0$

Setzen:

$$h = \begin{cases} g - f & auf\{-\infty < f, g < +\infty\} \\ 0 & sonst \end{cases}, h \geq 0$$

$0 \leq_{Positiv.} \int_\Omega h \, \mathfrak{m} =_{Linearität} \int_\Omega g \, 1^{\{-\infty<f,g<+\infty\}} \mathfrak{m} - \int_\Omega f \, 1^{\{-\infty<f,g<+\infty\}} dm = \int_\Omega g \, \mathfrak{m} - \int_\Omega f \, \mathfrak{m}$ ■

E5 f, g integrierbar, $f \leq g$

$$\int\limits_\Omega f \, \mathfrak{m} = \int\limits_\Omega g \, \mathfrak{m} \Leftrightarrow f = g \quad m\text{-fast überall} \tag{7.15}$$

Beweis:
h sei wie in Beiweis von E4 definiert

$$\int\limits_\Omega h \, \mathfrak{m} = \int\limits_\Omega g \, \mathfrak{m} - \int\limits_\Omega f \, \mathfrak{m} = 0 \Leftrightarrow h = 0 \ m\text{-fast überall}(E2.5) \tag{7.16}$$

$$\Leftrightarrow f = g \ m\text{-fast überall} \tag{7.17}$$ ■

E6 f messbar

$$f\text{integrierbar} \Leftrightarrow \int\limits_\Omega |f| \, \mathfrak{m} < +\infty \tag{7.18}$$

Beweis:

$$\int\limits_\Omega |f| \, \mathfrak{m} = \int\limits_\Omega (f^+ + f^-) \mathfrak{m} = \int\limits_\Omega f^+ \mathfrak{m} + \int\limits_\Omega f^- dm \tag{7.19}$$ ■

E7 f messbar

f integrierbar $\Rightarrow |f| < +\infty$ m-fast überall

Beweis:

$$\int\limits_\Omega |f| \mathfrak{m} < +\infty \Rightarrow^{E2.6} |f| < +\infty \ m\text{-fast überall} \tag{7.20}$$ ■

E8 f messbar, f=0 m-fast überall

$\Rightarrow \exists \int_\Omega f\, \mathfrak{m}$ und $\int_\Omega f\, \mathfrak{m} = 0$

$$f = f^+ + f^- \Rightarrow f^+ = 0 \text{ } m\text{-fast überall}, f^- = 0 \text{ } m\text{-fast überall} \tag{7.21}$$

$$\Rightarrow \int\limits_\Omega f^+\, \mathfrak{m} = 0, \int\limits_\Omega f^-\, \mathfrak{m} = 0 (\text{nach E2.5}) \tag{7.22}$$

$$\Rightarrow \int\limits_\Omega f\, \mathfrak{m} = \int\limits_\Omega f^+\, \mathfrak{m} - \int\limits_\Omega f^-\, \mathfrak{m} = 0 \tag{7.23}$$

Folgerung 7.3.0/5
$A \in \mathcal{F}$, $\Updownarrow(A^\complement) = 0$, $\exists \int_\Omega f\, \mathfrak{m}$

$\Rightarrow \int_\Omega f \cdot 1^A\, \mathfrak{m} = \int_\Omega f\, \mathfrak{m}$

Beweis:
$\int_\Omega f \cdot 1_A\, \mathfrak{m} = \int_\Omega f\, \mathfrak{m} - \overbrace{\int\limits_\Omega \underbrace{f \cdot 1_{A^\complement}}_{=0}\, \mathfrak{m}}^{=0(E8)}$ ■

7.4 Stetigkeitseigenschaften der Integrals

Riemann-Integral: Stetigkeit bzw. gleichmäßiger Konvergenz der Integranden

$(\Omega, \mathcal{F}, \Updownarrow)$ beliebiger Maßraum

Satz 7/8 (Satz von B. Levi über monotone Konvergenz)
Sei (f_n) eine wachsende Folge nichtnegativer messbarer Funktionen, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n\, \mathfrak{m} = \int\limits_\Omega f\, dm \tag{7.24}$$

Beweis:

(1) „$f_n \leq f$“ $\Rightarrow^{Monotonie} \int_\Omega f_n\, \mathfrak{m} \leq \int_\Omega f\, \mathfrak{m} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, \mathfrak{m} \leq \int_\Omega f\, \mathfrak{m}$

(2) „$f_n \geq f$“ $\exists \lim_{m\to\infty} f_{n,m} \uparrow f_n, f_{n,m}$ nichtnegativ einfach

g:=$\max_{1\leq n\leq m} f_{n,m}$ einfache messbare Funktion

(a) g_m einfach

(b) $f_{n,m} \leq g_m \leq f_m, 1 \leq n \leq m$

(c) $g_m \leq g_{m+1}, \forall m \geq 1$

(d) $\lim_{m\to\infty} g_m = f$ (da über (b) eingeschachtelt)

$\Rightarrow \int_\Omega f\,\mathfrak{m} := \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \underbrace{g_m}_{\leq f_m} \mathfrak{m} \leq \lim_{m\to\infty} \int_\Omega f_m\,\mathfrak{m}$ ∎

Folgerung 7.4.0/6
Es sein (f_n) eine monoton wachsende Folge messbarer Funktionen, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Es gelte:

(1) g $\leq f_n$ m-fast überall

(2) $\int_\Omega g^- \mathfrak{m} < +\infty$

Dann folgt:

$$\int_\Omega f\,\mathfrak{m} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,dm \tag{7.25}$$

Beweis:
o. B. d. A. $g^+ = 0$ $h_n := (f_n - g) \cdot 1_{\{-\infty<g\leq f_n\}} \geq 0, \lim_{n\to\infty} h_n = (f-g)\cdot 1_{\{-\infty<g\leq f_n\}}$

$\Rightarrow^{BLevi}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n\,dm = \int_\Omega (f-g)\cdot 1_{\{-\infty<g\leq f_n\}}\,dm \tag{7.26}$$

$$= \int_\Omega (f-g)\,\mathfrak{m} = \int_\Omega f\,\mathfrak{m} - \int_\Omega g\,dm \tag{7.27}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_n - g)\,\mathfrak{m} = \lim_{n\to\infty} (\int_\Omega f_n\,\mathfrak{m} - \int_\Omega g\,\mathfrak{m}) \tag{7.28}$$

$\rightarrow$ ∎

Satz 7/9 (Lemma von Faton)
Sei (f_n) eine Folge *nichtnegativer* messbarer Funktionen.

Dann folgt:

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n\,\mathfrak{m} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,dm \tag{7.29}$$

Beweis:

(7.30) $$\int\limits_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \, dm = \int\limits_\Omega \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} f_k = \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega \int\limits_{k\geq n} f_k \, dm (B. \, Levi)$$

(7.31) $$[\int\limits_\Omega \inf_{k\geq n} f_k \, dm \leq^{Monotonie} \int\limits_\Omega f_j \, \mathfrak{m}, \forall j \geq n (\inf_{k\geq n} f_k \leq f_j, j \geq n)]$$

(7.32) $$\leq \lim_{n\to\infty} \inf_{j\geq n} \int\limits_\Omega f_j \, \mathfrak{m} = \liminf_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n \, dm \quad \blacksquare$$

Folgerung 7.4.0/7
(f_n) Folge messbarer Funktionen mit:

(1) g $\leq f_n$ m-fast überall für eine messbare Funktion g

(2) $\int_\Omega g^- \, \mathfrak{m} < +\infty$

Dann folgt: Es existieren $\int_\Omega f_n \, \mathfrak{m}$ und $\int_\Omega \liminf f_n \, \mathfrak{m}$ und es gilt:

(7.33) $$\int\limits_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathfrak{m} \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n \, dm$$

Beweis:

(1) g $\leq f_n$ m-fast überall $\Rightarrow f_n^- \leq g^-$ m-fast überall $\Rightarrow \int_\Omega f_n^- \, dm \leq +\infty$, $(\liminf_{n\to\infty} f_n)^- \leq g^- \Rightarrow \int_\Omega (\liminf_{n\to\infty} f_n)^- \, \mathfrak{m} < \infty$

(2) A=$\bigcap_{n=1}^\infty \{-\infty < g \leq f_n\}, m(A^\complement) = 0$ $h_n = (f_n - g) \cdot 1_A \Rightarrow h_n \geq 0$ messbar $\Rightarrow \int_\Omega \underbrace{\liminf_{n\to\infty} h_n}_{=(\liminf f_n - g)\cdot 1_A} dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega h_n \, dm = \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} \mathfrak{m} - \int_\Omega g \, dm \leq$ $\liminf_{n\to\infty} (\int_\Omega f_n \, dm - \int_\Omega g \, gm)$ $\blacksquare$

Folgerung 7.4.0/8
Sei (f_n) Folge messbarer Funktionen mit den Eigenschaften:

(1) $f_n \leq g$ m-fast überall, n$\geq$1, g messbar

(2) $\int_\Omega g^+ \, \mathfrak{m} < \infty$

Dann existieren: $\int_\Omega f_n \, \mathfrak{m}$ und $\int_\Omega \limsup_{n\to\infty} f_n \, \mathfrak{m}$ und es gilt:

(7.34) $$\limsup_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n \, \mathfrak{m} \leq \int\limits_\Omega \limsup_{n\to\infty} f_n \, dm$$

Beweis:
Anwendung von Folgerung 1 für die Folge (g_n) mit $g_n = -f_n$ $\limsup_{n\to\infty} f_n = -\liminf_{n\to\infty} g_n$ $\blacksquare$

7.4.1 Konvergenz m-fast überall

(f_n) Folge messbarer Funktionen, $\Omega_0 := \{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n\to\infty} f(\omega)(in\hat{\mathbb{R}})\} \in \mathcal{F}$

$(\lim_{n\to\infty} f_n)(\omega) = \{\begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) & \omega \in \Omega_0 \\ 0 & \omega \notin \Omega_0 \end{cases}$ $\lim_{n\to\infty} f_n$ messbar auf $(\Omega, \mathcal{F})$

Definition 7/10
(f_n) heißt m-fast überall konvergent, falls m$(\Omega_0^\complement) = 0$

Satz 7/11 (Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz)
Sei (f_n) einen Folge messbarer Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) (f_n) konvergiert m-fast überall

(2) Es existiert eine messbare Funktion g auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit

  (a) $|f_n| \leq g$ m-fast überall, n≥1

  (b) $\int_\Omega g \, \mathfrak{m} < \infty$

Dann folgt:

(1) f_n ist integrierbar, n≥1

(2) $\exists \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathfrak{m}$

(3) $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathfrak{m} = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathfrak{m}$

Beweis:
-g≤ $f_n \leq g$ m-fast überall, g,-g sind integrierbar $\to$ $\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, dm \leq^{Farton}$ $\int_\Omega \limsup_{n\to\infty} f_n \, \mathfrak{m} = \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathfrak{m}$ (wegen der m-fast überall Konvergenz von (f_n)) $= \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathfrak{m} \leq^{Faton} \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathfrak{m} \leq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathfrak{m}$ ∎

8 Das Lebesgue-Integral

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R}), \lambda)$, Maßraum, λ Lebesgue-Maß, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen ($\mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$ ist die Vervollständigung von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ bzgl. λ)

Definition 8/1
$\int_\mathbb{R} f\, d\lambda$ bzw. $\int_\mathbb{R} f(x)\, dx$ heißt *Lebesgue-Integral* von f (sofern das Integral existiert), $\int_A f\, d\lambda = \int_\mathbb{R} f \cdot 1_A\, d\lambda, A \in \mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R})$

Lemma 8.0.1/1
$f\colon \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}$

f ist *Lebesgue-messbar* $\Leftrightarrow$ Es existierten Borel-messbare Funktionen f_1, f_2 mit $f_1 \leq f \leq f_2$ und $\lambda(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$

(Übungsaufgabe)

Zielstellung: Vergleichen von Lebesgue-Integral und Riemann-Integral

Definition 8/2
$f\colon \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}$, f heißt *λ-f.ü. stetig* auf $[a, b]$, falls eine Menge $N \subseteq [a, b]$ existiert mit $N \in \mathcal{B}^\lambda(\mathbb{R}), \lambda(N) = 0$ und f ist stetig in allen Punkten $x \in [a, b] \cap N^\complement$

Satz 8/3
$f\colon \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}$ beschränk, $|f| \leq c$, $c > 0$, $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ endliches Intervall

f Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ $\Leftrightarrow$ f ist λ-f.ü. stetig auf $[a, b]$

Es gilt dann:

(1) f ist Lebesgue-integrierbar

(2) $\int_{[a,b]} f\, d\lambda = R - \int_a^b f(x)\, dx$

Beweis:
$f\colon \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}$ beschränkt $|f| \leq c$ o. B. d. A. $f(x) = 0, x \notin [a, b], bzw. f = f \cdot 1_{[a,b]}$

$f Z_n = \{t_0^{(n)}, \ldots, t_{m_n}^{(n)}\}$ Zerlegung von $[a, b], a = t_0^{(n)} < \ldots < t_{m_n}^n = b$

$f Z_{n+1}$ sei feiner als $f Z_n$

Darbouxsche Summen:

$$I_k^{(n)} := \begin{cases} [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}) & k = 0, \dots, m_n - 2 \\ [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)} & k = m_n - 1 \end{cases} \tag{8.1}$$

$\underline{S}_n := \sum_{k=0}^{m_n-1} \inf_{y \in I_k^{(n)}} f(y)(t_{k+1}^{(n)} - (t_k^{(n)})$ $\overline{S}_n := \sum_{k=0}^{m_n-1} \sup_{y \in I_k^{(n)}} f(y)(t_{k+1}^{(n)} - (t_k^{(n)})$ ■

todo: hier fehlt was

8.0.2 Produkte von Wahrscheinlichkeitsmaßen

$(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ Wahrscheinlichkeitsräume

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$

Projektionsabbildungen $X_1(\omega) = \omega_1, X_2(\omega) = \omega_2$

Lemma 8.0.2/1
$X_i : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ messbar, (i=1,2)

Beweis:
i=1 $B \in \mathcal{F}_1$: $X_1^{-1}(B) = B \times \Omega_2 \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}$

> p sei Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F}) \Rightarrow X_i : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ zufällige Variable, P_{X_i} : Verteilung von X bzgl. P (Bildmaß) ■

Satz 8/4

(1) $P_1 \otimes P_2$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$

(2) Es sei P irgendein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $P_{X_i} = P_i (i = 1, 2)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

  (a)

$$P = P_1 \otimes P_2 \tag{8.2}$$

  (b) X_1 und X_2 sind unabhängig bzgl. P

  (c) $X_1^{-1}(\mathcal{F}_1)$ und $X_2^{-1}(\mathcal{F}_2)$ unabhängig bzgl. P

Beweis:
(2b) $\Leftrightarrow$ (2c): klar

(a) $\Leftrightarrow$ (b)

(8.3)
$$P = P_1 \otimes P_2 \Leftrightarrow^{S.2} P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2), \forall A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$$
(8.4)
$$\Leftrightarrow P(\underbrace{\{X_1 \in A_1\}}_{=A_1\times\Omega_2} \cap \underbrace{\{X_2 \in A_2\}}_{=\Omega_1\times A_2}) = P_{X_1}(A_1)P_{X_2}(A_2) = P(\{X_1 \in A_1\})P(\{X_2 \in A_2\})$$
(8.5)
$$\Leftrightarrow X_1, X_2 unabh.bzgl.P$$

■

Bemerkung 8.0.2/1
2b bedeutet:

(8.6)
$$P(\{X_1 \in A_1\} \cap \{X_2 \in A_2\}) = P(\{X_1 \in A_1\}) \cdot P(\{X_2 \in A_2\}) \quad \forall A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$$

2c bedeutet:

(8.7)
$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2) \quad \forall B_1 \in X_1^{-1}(\mathcal{F}_1)(\Leftrightarrow B_1 = \{X_1 \in A_1\}, A_1 \in \mathcal{F}_1), B_2 \in X_2^{-1}(\mathcal{F}_2)(\Leftrightarrow B_1 = \{X_2 \in A_2\}$$

8.0.3 Schnittfunktion

(8.8)
$$f \colon \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \to \hat{\mathbb{R}}$$

Definition 8/5
$x \in \Omega_1, f_x(y) = f(x,y), y \in \Omega_2, f_x$ heißt *Schnitt* von f in $x \in \Omega_1$

$y \in \Omega_2, f^y(x) = f(x,y), x \in \Omega_1, f^y$ heißt *Schnitt* von f in $y \in \Omega_2$

Lemma 8.0.3/1
Sei $f : (\Omega, \mathcal{F}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \to (\hat{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\hat{\mathbb{R}}))$ messbar

Dann ist $f_x : (\Omega_2, \mathcal{F}_2) \to (\hat{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\hat{\mathbb{R}}))$ sowie $f^y : (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \to (\hat{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\hat{\mathbb{R}}))$ messbar

Beweis:

(8.9)
$$A = \{(x,y) \in \Omega : f(x,y) < r\}, r \in \mathbb{R} \Rightarrow A \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$$
(8.10)
$$\Rightarrow^{Lemma2} A_x \in \mathcal{F}_2, A^y \in \mathcal{F}_1, \text{es gilt: } A_x = \{y \in \Omega_2 : f_x(y) < r\} = f_x^{-1}([-\infty, r)) \in \mathcal{F}_2 \forall r \in \mathbb{R} \Rightarrow f_x messbar$$

analog: $\mathcal{F}_1 \ni A^y = (f^y)^{-1}([-\infty, r))$

■

Satz 8/6 (Satz von Fubini)
$(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \Updownarrow_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \Updownarrow_2)$ σ-endliche Maßräume, $(\Omega, \mathcal{F}, \Updownarrow) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \Updownarrow_1 \otimes \Updownarrow_2)$

f sei eine messbare Funktion auf $(\Omega, \mathcal{F})$, f nichtnegativ.

Dann folgt: Das Integral $\int_{\Omega_2} \underbrace{f(x,y)}_{f_x(y)} \Updownarrow_2(dy)$ ist eine messbare Funktion in x auf $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$

und es gilt:

(8.11)
$$\int\limits_{\Omega} f(x,y) \Updownarrow (d(x,y)) = \int\limits_{\Omega_1} (\int\limits_{\Omega_2} f(x,y) m_2(dy)) m_1(dx)$$

Beweis:

(1) f $= 1_A, A \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$

(8.12)
$$\int\limits_{\Omega} f(x,y) m(d(x,y)) = \int\limits_{\Omega} 1_A(x,y) \Updownarrow (d(x,y)) = \Updownarrow(A) = \int\limits_{\Omega_1} \underbrace{\Updownarrow_2(A_x)}_{messbar in x (Satz 1)} \Updownarrow_1(dx)$$

(8.13)
$$\int\limits_{\Omega_1} (\int\limits_{\Omega_2} 1_A(y) \Updownarrow_2(dy)) \Updownarrow(dx) = \int\limits_{\Omega_1} \underbrace{(\int\limits_{\Omega_2} f(x,y) m_2(dy))}_{messbar in x} \Updownarrow_1(dx)$$

(2) f sei nichtnegative einfache Funktion, d. h.

(8.14)
$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k 1_{A_k}, c_1, \ldots, c_n \geq 0, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$$

(8.15)
$$\int\limits_{\Omega} f(x,y) \Updownarrow (d(x,y)) = \sum_{k=1}^{n} c_k \int\limits_{\Omega} 1_A(x,y) m(d(x,y))$$

(8.16)
$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \int\limits_{\Omega_1} (\int\limits_{\Omega_2} 1_{A_k}(x,y) m_2(dy)) m_1(dx) = \int\limits_{\Omega_1} \underbrace{(\sum_{k=1}^{n} c_k \int\limits_{\Omega_2} 1_{A_k}(x,y) \Updownarrow_2(dy))}_{messbar in x} m_1(d$$

(8.17)
$$= \int\limits_{\Omega_1} \underbrace{(\int\limits_{\Omega_2} \sum_{k=1}^{n} c_k 1_{A_k}(x,y) m_2(dy))}_{messbar in x} m_1(dx)$$

(3) f messbar auf $(\Omega, \mathcal{F})$, f$\geq$0

$\exists f_n : f_n \geq 0$ und einfach, $f_n \uparrow_{n\to\infty} f$

$\Rightarrow$

$\blacksquare$

(8.18)
$$\int\limits_{\Omega} f(x,y)m(d(x,y)) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} f_n(x,y)m(d(x,y)) =^{2)} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_1} (\int\limits_{\Omega_2} f_n(x,y)m_2(dy))m_1(dx) =^{B.Levi} \int\limits_{\Omega_1} (\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_2} f$$

Satz 8/7
f sei messbar auf $(\Omega, \mathcal{F})$, $\exists \int_\Omega f(x,y)m(d(x,y))$

Dann existiert $\int_{\Omega_1}(\int_{\Omega_2} f(x,y)m_2(dy))m_1(dx)$ und es gilt:

(8.19)
$$\int\limits_{\Omega} f(x,y)m(d(x,y)) = \int\limits_{\Omega_1} (\int\limits_{\Omega_2} f(x,y)m_2(dy))m_1(dx)$$

Beweis:

(8.20)
$$\exists \int\limits_{\Omega} f(x,y)m(d(x,y)) \Leftrightarrow \int\limits_{\Omega} f^+(x,y)m(d(x,y)) < \infty oder \int\limits_{\Omega} f^-(x,y)m(d(x,y)) < \infty$$

Ann.: $\int_\Omega f^+(x,y)m(d(x,y)) < \infty$

(8.21)
$$\int\limits_{\Omega} f(x,y)m(d(x,y)) = \underbrace{\int\limits_{\Omega} f^+(x,y)m(d(x,y))}_{<\infty} - \int\limits_{\Omega} f^-(x,y)m(d(x,y))$$

(8.22)
$$=^{Satz5} \int\limits_{\Omega_1} \underbrace{(\int\limits_{\Omega_2} f^+(x,y)m_2(dy))}_{<\infty m_1 - f.\text{ü.}} m_1(dx) - \int\limits_{\Omega_1} (\int\limits_{\Omega_2} f^-(x,y)m_2(dy))m_1(dx)$$

N=$\{x \in \Omega_1 : \int_{\Omega_2} f^+(x,y)m_2(dy) = \infty\}, N \in \mathcal{F}_1, m_1(N) = 0$

$$(8.23) \quad = \int\limits_{\Omega_1} 1_{N^\complement}(x)(\int\limits_{\Omega_2} f^+(x,y)m_2(dy))m_1(dx) - \int\limits_{\Omega_1} 1_{N^\complement}(x)(\int\limits_{\Omega_2} f^-(x,y)m_2(dy))m_1(dx)$$

$$(8.24) \quad =^{Linearität} \int\limits_{\Omega_1} 1_{N^\complement}(x)(\int\limits_{\Omega_2} f^+(x,y)m_2(dy) - \int\limits_{\Omega_2} f^+(x,y)m_2(dy))m_1(dx)$$

$$(8.25) \quad = \int\limits_{\Omega_1} \underbrace{1_{N^\complement}(x)(\int\limits_{\Omega_2} f(x,y)m_2(dy))}_{g(x)ausBemerkung} m_1(dx)$$

$$(8.26) \quad = \int\limits_{\Omega_1} (\int\limits_{\Omega_2} f(x,y)m_2(dy))m_1(dx)(IteriertesIntegralexistiert) \qquad \blacksquare$$

Bemerkung 8.0.3/1
(Iterierte Integral und dessen Existenz)

Das iterierte Integral $\int_{\Omega_1}(\int_{\Omega_2} f(x,y)m_2(dy))m_1(dx)$ existiert (gemäß Definition), falls:

(1)

$$(8.27) \quad \exists \int\limits_{\Omega_2} f(x,y)m_2(dy)m_1 - f.\,\text{ü.}, d.\,h. es exist. N \in \mathcal{F}_1, m_1(N) = 0 und \int\limits_{\Omega_1} f(x,y)m_2(dy) exists \forall x \in N$$

(2)

$$g(x) = \begin{cases} \int_{\Omega_2} f(x,y)m_2(dy) & x \in N^\complement \\ 0 & x \in N \end{cases}$$

g messbar

(3) $\exists \int_{\Omega_1} g(x)m_1(dx)$

Folgerung 8.0.3/1
f messbar auf $(\Omega, \mathcal{F})$

Aus Satz 5 folgt:

$$(8.28) \quad \exists \int\limits_{\Omega} f(x,y)m(d(x,y)) \Leftrightarrow \int\limits_{\Omega_1}(\int\limits_{\Omega_2} f^+(x,y)m_2(dx))m_1(dx) < \infty oder \int\limits_{\Omega_1}(\int\limits_{\Omega_2} f^-(x,y)m_2(dx))m_1(dx) < \infty$$

todo: Hier fehlt was!

Ungleichung von Young

$$1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, r_1, r_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \tag{8.29}$$

$$\Rightarrow |r_1 t_1 + r_2 t_2| \leq (|r_1|^p + |r_2|^p)^{\frac{1}{p}} (|t_1|^q + |t_2|^q)^{\frac{1}{q}} \tag{8.30}$$

Beweis:
$f, g \in L_p = L_p(\Omega, \mathcal{F}, \Updownarrow)$

z. z.: $f + g \in L_p$ und $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

1.Fall $p = 1$

(8.31)
$$\|f + g\|_q = \int\limits_{\Omega} |f + g| \,\mathfrak{m} \leq \int\limits_{\Omega} (|f| + |g|) \,\mathfrak{m} = \underbrace{\int\limits_{\Omega} |f| \,\mathfrak{m}}_{<\infty} + \underbrace{\int\limits_{\Omega} |g| \,\mathfrak{m}}_{<\infty} = \|f\|_q + \|g\|_q < \infty$$

2.Fall $1 < p < \infty$ zeigen zunächst: $f + g \in L_p$

(8.32)
$$|f + g|^p \leq |f + g||f + g|^{p-1} \leq (|f| + |g|)|f + g|^{p-1} = |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}(r_1 = |f|, r_2 = |g|, t_1 = t_2 =$$

$$\leq^{Lemma2} (|f|^p + |g|^p)^{\frac{1}{p}} (2|f + g|^{(p-1)q})^{\frac{1}{q}} = (|f|^p + |g|^p)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}} |f + g|^{p-1} \tag{8.33}$$

Vorraussetzung: $|f + g| \neq 0$, Multiplikation mit $|f + g|^{1-p}$

$$\Rightarrow |f + g| \leq (|f|^p + |g|^p)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}} (auch gültig für |f + g| = 0) \tag{8.34}$$

$$= |f + g|^p \leq (|f|^p + |g|^p) 2^{\frac{p}{q}} \Rightarrow |f + g|^p integrierbar \Rightarrow f + g \in L_p \tag{8.35}$$

Dreiecksungleicheung:

(8.36)
$$\|f+g\|_p^p = \int\limits_\Omega |f+g|^p \,\mathfrak{m} = \int\limits_\Omega |f+g||f+g|^{p-1}\,dm$$

(8.37)
$$\leq \int\limits_\Omega |f||f+g|^{p-1}\,\mathfrak{m} + \int\limits_\Omega |g||f+g|^{p-1}\,dm$$

(8.38)
$$\leq (\int\limits_\Omega |f|^p\,\mathfrak{m})^{\frac{1}{p}}(\int\limits_\Omega |f+g|^{(p-1)q}\,\mathfrak{m})^{\frac{1}{q}} + (\int\limits_\Omega |g|^p\,\mathfrak{m})^{\frac{1}{q}}(\int\limits_\Omega |f+g|^{(p-1)q}\,\mathfrak{m})^{\frac{1}{q}}($$

(8.39)
$$= (\|f\|_p + \|g\|_p)(\int\limits_\Omega |f+g|^p\,\mathfrak{m})^{\frac{1}{q}}$$

(8.40)
$$Ann:.\int\limits_\Omega |f+g|^p\,dm \neq 0$$

(8.41)
$$= (\int\limits_\Omega |f+g|^p\,\mathfrak{m})^{1-\frac{1}{q}=1\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p \Rightarrow \|f\|_p + \|g\|_p \Rightarrow \|f+g\|_p \leq$$

■

Satz 8/8
$1 \leq p < \infty, (\Omega, \mathcal{F}, \Updownarrow)$ Maßraum

Dann istt $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \Updownarrow)$ ein Banachraum (vollständig nromierter linearer Raum)

BEWEIS:

(1) $L_p \subseteq L_0$ linearer Unterraum (Anwendung von Satz 2)

$$f \in L_p, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f \in L_p : \int_\Omega |\alpha f|^p\,\mathfrak{m} = |\alpha|^p \underbrace{\int\limits_\Omega |f|^p\,\mathfrak{m}}_{<\infty} < \infty$$

(2) $\|\cdot\|$ ist eine Norm

(a) $\|f\|_p \geq 0, \|f\|_p = \int_\Omega |f|^p\,\mathfrak{m} = 0 \Leftrightarrow |f| = 0m - f$ü $\Leftrightarrow f = 0$ (im Sinne der Äquivalenzklassenbildung)

(b) $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p, \alpha \in \mathbb{R}, f \in L_p$ klar

(c) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, f, g \in L_p$ (Satz 2)

(3) $(L_p, \|\cdot\|_p)$ vollständiger normierter Raum

Es sei (f_n) eine Cauchy-Folge in L_p: $\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_p = 0$

Es existiert (n_k): $\|f_n - f_m\|_p \leq \frac{1}{2^k}, \forall n, m \geq n_k$

$n_k \leq n_{k+1}$ Es folgt: $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}, k = 1, 2, \dots$ $g := \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$ messbare Funktion

zeigen: $g \in L_p$

(8.42)
$$\int\limits_\Omega |g|^p \, \mathfrak{m} = \int\limits_\Omega \lim_{m\to\infty} (\sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k-1}} - f_{n_k}|)^p \, \mathfrak{m} =^{B.\,Levi} \lim_{m\to\infty} \int\limits_\Omega (\sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k-1}} - f_{n_k})^p \, dm$$

(8.43)
$$= \lim_{n\to\infty} \| \sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k-1}} - f_{n_k}| \|_p^p \leq^{Dreiecksungl.} \lim_{m\to\infty} (\sum_{k=1}^{m} \underbrace{\|f_{n_{k-1}} - f_{n_k}\|_p}_{\leq \frac{1}{2^k}})^p \leq 1$$

$\Rightarrow 0 \leq g < \infty$ m-fü $\Rightarrow \Omega_0 \in \mathcal{F}, m(\Omega^{\complement}) = 0$ und $0 \leq g(x) < \infty \ \forall x \in \Omega_0$

$$f(x) = \begin{cases} f_{n_0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) & x \in \Omega_\Omega \\ 0 & x \in \Omega_0^{\complement} \end{cases}$$

Beh.: $f \in L_p$ und $\|f_n - f\|_p \to_{n\to\infty} 0$

(a) $f \in L_p$: |f|$\leq |f_m| + g \in L_p$

(b) $||f_n - f||_p \to^{n\to\infty} 0$

g. z. z: $||f_{n_m} - f||_p \to^{m\to\infty} 0$ (da (f_n) Cauchy-Folge) $||f_{n_m} - f||_p = (\int_\Omega |f_{n_m} - f| - f_{n_1} - \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})|^p \, \mathfrak{m})^{\frac{1}{p}}$ $=(\int_\Omega | \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k-1}} - f_k)|^p \, dm$ $=^{B.\,Levi}$ $\lim_{s\to\infty}(\int_\Omega \sum_{k=1}^{s}(f_{n_{k-1}} - f_{n_k})|^p \, \mathfrak{m})^{\frac{1}{p}} = \lim_{s\to\infty} \sum_{k=1}^{s} \underbrace{||f_{n_{k-1}} - f_{n_k}||_p}_{\leq \frac{1}{2^k}} \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} \to^{n\to\infty}$

0 ∎

9 Dichtefunktionen

$(\Omega, \mathcal{F}, m)$ beliebiger Maßraum, f≥0 messbarer Funktion auf $(\Omega, \mathcal{F})$, μ(A) $= \int_A f\,\mathfrak{m}(:= \int_\Omega f \cdot 1_A\,\mathfrak{m}, A \in \mathcal{F}$

Satz 9/1

(1) μ ist eine Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$

(2) $A \in \mathcal{F}$, $\Updownarrow(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$

Beweis:

(1) 2. μ(A)=$\int_A f \cdot 1_A\,\mathfrak{m} = 0$, da f·$1_A = 0$ m-fü, falls m(A)=0

(2) 1. $\mu(\emptyset)$=0 klar

(A_n) aus $\mathcal{F}$, p. d.: $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \int_\Omega f \cdot$ todo: hier fehlt was ■

todo: hier fehlt was

Satz 9/2

m σ-endlich

Dann ist die Dichte f von μ bzgl. $\Updownarrow$ $\Updownarrow$-fü. eindeutig bestimmt.

Beweis:

$\Omega_n \uparrow \Omega, \Omega_n \in \mathcal{F} \Updownarrow(\Omega_n) < \infty$

Seien f_1, f_2 Dichten von μ bzgl. $\Updownarrow$, $\Omega'_n = \{f_1 \leq n, f_2 \leq n\}$, $f_i \cdot 1_{\Omega_n \cap \Omega'_n}$ integrierbar: $0 \leq \int_\Omega f_i \cdot 1_{\Omega_n \cap \Omega'_n}\,dm \leq n \underbrace{m(\Omega_n \cap \Omega'_n)}_{<\infty} < \infty$

$\Rightarrow g := (f_1 - f_2) \cdot 1_{\Omega_n \cap \Omega'_n}$ integrierbar und $\int_{A \in \mathcal{F}} g\,\mathfrak{m} = \int_{A \cap \Omega_n \cap \Omega'_n} (f_1 - f_2)\,\mathfrak{m} = \int_{A \cap \Omega_n \cap \Omega'_n} f_1\,\mathfrak{m} - \int_{A \cap \Omega_n \cap \Omega'_n} f_2\,dm = \mu(A \cap \Omega_n \cap \Omega'_n) - \mu(A \cap \Omega_n \cap \Omega'_n) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$

setzen A=$\{f_1 > f_2\}$ $\Rightarrow 0 = \int_{A \cap \Omega_n \cap \Omega'_n} (f_1 - f_2)\,dm = \int_\Omega \underbrace{(f_1 - f_2) \cdot 1_{A \cap \Omega_n \cap \Omega'_n}}_{\geq 0}\,\mathfrak{m}$

$\Rightarrow (f_1 - f_2) \cdot 1_{A \cap \Omega_n \cap \Omega'_n} = 0$ $\Updownarrow$-fü $\Rightarrow m(A \cap \Omega_n \cap \Omega'_n) = 0$

$m(\{\infty > f_1 > f_2\}) = \lim_{n \to \infty} m(A \cap \Omega_n \cap \Omega'_n) = 0$

zeigen: $m(\{\infty = f1 > f_2\}) = 0$

m($\{\infty$=f_1>$f_2\}$)=$\lim_{n \to \infty} m(\{\infty = f_1, f_2 \leq n\} \cap \Omega_n)$

g. z. z: m($\{\infty$=$f_1, f_2 \leq n\} \cap \Omega_n) = 0, \forall n$

(1) $\mu(\{\infty = f_1, f_2 \leq n\} \cap \Omega_n) = \int_{\{\infty = f_1, f_2 \leq n\} \cap \Omega_n} f_1 \, \mathfrak{m} = \infty \cdot m(\{\infty = f_1, f_2 \leq n\} \cap \Omega_n)$

(2) $\mu(\{\infty = f_1, f_2 \leq n\} \cap \Omega_n) = \int_{\{\infty = f_1, f_2 \leq n\} \cap \Omega_n} f_2 \, \mathfrak{m} \leq n \cdot m(\{\infty = f_1, f_2 \leq n\} \cap \Omega_n) < \infty$

$\Rightarrow$ auch bei a) muss endlicher Wert stehen, geht nur für $m(\{\infty = f_1, f_2 \leq n\} \cap \Omega_n) = 0$

gezeigt: $m(\{f_1 > f_2\}) = 0 \Rightarrow f_1 \leq f_2$ m-fü

analog: $f_2 \leq f_2$ m-fü ■

Definition 9/3
$(\Omega, \mathcal{F})$ messbarer Raum, μ, m Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$

Dann heißt μ absolut stetig bzgl. $\Updownarrow$ $(\mu \ll \Updownarrow)$, falls $\mu(A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{F}$ mit $\Updownarrow(A) = 0$.

Lemma 9.0.3/2
$g \geq 0$ messbar

$$\int_\Omega g \, \mathfrak{m} = \int_\Omega g \cdot 1_{\Omega_n} \, dm \tag{9.1}$$

Lemma 9.0.3/3
ν, τ seien endliche Maße, $\nu(\Omega){<}\tau(\Omega)$

Dann existeier $\Omega' \in \mathcal{F}$ mit $\nu(\Omega') < \tau(\Omega')$ und $\nu(A) \leq \tau(A)$, $A \in \mathcal{F}, A \subseteq \Omega'$

Beweis:
Bauer, Lemma 17.9 ■

Satz 9/4 (Radon-Nicodym)
μ, $\Updownarrow$ maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$, $\Updownarrow$ sei σ-endlich.

Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(1) $\mu \ll m$

(2) es existiert eine Dichte f von μ bzgl. m

Beweis:
(b)$\rightarrow$(a): klar

Umkehrung: zusätzliche Vorraussetzung: μ σ-endlich

i. Schritt Reduktion auf den Fall, daß μ und $\Updownarrow$ endlich sind $\exists \Omega_n \in \mathcal{F}$, paarweise disjunkt, $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n$ mit m(Ω_n), $\mu(\Omega_n) < \infty$

$m_n(A) := m(A \cap \Omega_n), \mu_n(A) = \mu(A \cap \Omega_n), A \in \mathcal{F}, n \geq 1$ $\Updownarrow_n, \mu_n$ endliche Maße, $\mu_n \ll \Updownarrow_n$

Ann.: Satz gültig für endliche Maße $\Rightarrow$ $\exists$ Dichte f_n von μ_n bgzl. $\Updownarrow_n$

Ansatz: f:=$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot 1_{\Omega_n}$

f$\geq$0 messbar $\mu(A)$=$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap \Omega_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n \, \mathfrak{m} =^{Lemma1}= \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n \cdot 1_{\Omega_n} \, dm =^{B.\,Levi} \int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot 1_{\Omega_n} \, dm = \int_A \sum_{n=1}^{\infty} f \, \mathfrak{m}, A \in \mathcal{F}$

ii. Schriitt Seien μ, $\Updownarrow$ endlich $\mathcal{H} = \{h : h \geq 0 \text{messbar}, \int_A h \, dm \leq \mu(A), \forall A \in \mathcal{F}\}$

(a) $\mathcal{H} \not\emptyset : 0 \in \mathcal{H}$

(b) $f, g \in \mathcal{H} \Rightarrow f \cup g \in \mathcal{H} : \int_A (f \cup g) \, \mathfrak{m} = \int_{A \cap \{f \leq g\}} g \, \mathfrak{m} + \int_{A \cap \{g < f\}} f \, \mathfrak{m} \leq \mu(A \cap \{f \leq g\}) + \mu(A \cap \{g < f\}) = \mu(A), A \in \mathcal{F}$

c:= $\sup_{h \in \mathcal{H}} \int_\Omega h \, \mathfrak{m}, c \leq \mu(\Omega) < \infty$

$\exists f_n' \in \mathcal{H}$ mit c=$\sup_{n \geq 1} \int_\Omega f_n' \, \mathfrak{m}$, $f_n = \max\{f_1', \ldots, f_n'\} \in \mathcal{H}$ $f_n \leq f_{n+1}, f := \lim_{n \to \infty} f_n$

Beh.: $f \in \mathcal{H}$ und c=$\int_\Omega f \, \mathfrak{m}$ wiseen: $\int_A f_n \, \mathfrak{m} \leq \mu(A), A \in \mathcal{F} \to^{n-\infty} nach^{B.\,Levi} \int_A f \, \mathfrak{m} \leq \mu(A) \Rightarrow f \in \mathcal{H}$

$c = \sup_{n \geq 1} \int_\Omega f_n' \, d\Updownarrow \leq \sup_{n \geq 1} \int_\Omega f_n \, d\Updownarrow = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n \, d\Updownarrow =^{B.\,Levi} \int_\Omega d\Updownarrow \leq c$

Es gilt: f ist Dichte von μ bzgl. $\Updownarrow$ zeigen: $\mu \ll \Updownarrow \Rightarrow f$ Dichte $\tau(A) := \mu(A) - \int_A f \, d\Updownarrow, A \in \mathcal{F}, \tau$ Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$

z. z. $\mu \ll \Updownarrow \Rightarrow \tau \equiv 0$

Kontraposition: $\tau(\Omega) > 0 \Rightarrow \mu \not\ll \Updownarrow$ o. B. d. A.: $\Updownarrow(\Omega) > 0$

$\alpha\Updownarrow(\Omega) < \tau(\Omega), \alpha = \frac{\tau(\Omega)}{2\Updownarrow(\Omega)}$

Anwendung von Lemma 2 auf ν=$\alpha\Updownarrow, \tau : \exists \Omega' \in \mathcal{F}, \alpha\Updownarrow(\Omega') < \tau(\Omega'), \alpha\Updownarrow(A) \leq \tau(A), A \in \mathcal{F}, A \subseteq \Omega'$

Ansatz: $f' = f + \alpha \cdot 1_{\Omega'}$

i. $f' \in \mathcal{H}$: $\int_A f' \, d\Updownarrow = \int_A f \, d\Updownarrow + \int_A \alpha \cdot 1_{\Omega'} \, d\Updownarrow = \int_A f \, d\Updownarrow + \underbrace{\alpha\Updownarrow(A \cap \Omega')}_{\tau(A \cap \Omega')} \leq$

$\int_A f \, d\Updownarrow + \tau(A) = \mu(A)$

ii. $c = \int_\Omega f' \, d\Updownarrow$: $c = \int_\Omega f \, d\Updownarrow \leq \int_\Omega f' \, d\Updownarrow \leq^{f \in \mathcal{H}} c$

iii. $c = \int_\Omega f' \, d\Updownarrow = \int_\Omega f \, d\Updownarrow + \int_\Omega \alpha 1_{\Omega'} \, d\Updownarrow = c + \alpha\Updownarrow(\Omega') \Rightarrow \Updownarrow(\Omega') = 0$

iv. $0 < \tau(\Omega') = \mu(\Omega') - \int_{\Omega'} f \, d\Updownarrow = \mu(\Omega') \Rightarrow \mu(\Omega') > 0$

Somit gezeigt $\mu \not\ll \Updownarrow$ ■

Beispiel 9.0.3/1
m beliebiges maß auf $(\Omega, \mathcal{F}), \Updownarrow \neq 0, f \equiv \infty$: $\mu(A) = \int_A f\, \mathfrak{m}, A \in \mathcal{F}$ μ Maß:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \Updownarrow(A) = 0 \\ \infty & \Updownarrow(A) > 0 \end{cases}$$

$A \in \mathcal{F}$, μ ist nicht σ-endlich

Notation
$\frac{d\mu}{d\Updownarrow}$ Dichte von μ bgzl. $\Updownarrow$ (sofern Dichte existiert)

Satz 9/5
Es seien μ, $\Updownarrow$ Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und $\frac{d\mu}{d\Updownarrow}$ sei Dichte, $h \geq 0$ messbar.

Dann gilt:

$$\int_{\Omega} h\, d\mu = \int_{\Omega} h(fracd\mu d\Updownarrow) d\Updownarrow \tag{9.2}$$

Beweis:
(Standardbeweis)

(1) $h = 1_A$, $A \in \mathcal{F}$

(2) h einfach, $h \geq 0$

(3) $h \geq 0$ messbar: $\exists h_n \uparrow h, h_n \geq 0$ einfach ■

9.1 Singuläre Maße

μ, $\Updownarrow$ Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$

Definition 9/6
μ heißt singulär zu $\Updownarrow(\mu|_{\Updownarrow})$, falls $\exists$ $A \in \mathcal{F}$ mit μ(A)=$\Updownarrow(A^{\complement}) = 0$.

Beispiel 9.1.0/2
$(\Omega, \mathcal{F} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, λ Lebesgue-Maß, $\Updownarrow$ diskretes Maß $\Updownarrow = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \delta_{x_i}, x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}$ $\Updownarrow|_\lambda$

Satz 9/7 (Zerlegungssatz von Hahn-Lebesgue)
μ, $\Updownarrow$ σ-endlich

Dann existiert eine eindeutige Zerlegung $\mu = \nu + \lambda$

(1) $\nu \ll \Updownarrow$

(2) $\lambda \perp \Updownarrow$

Beweis:
$\Updownarrow + \mu$ σ-endlich, $\mu \ll \Updownarrow + \mu$

Satz von Radon-Nicodym:

(9.3) $$f = \frac{d\mu}{d(\Updownarrow + \mu)} \quad \text{Dichte}$$

Ansatz: $\nu(A) := \mu(A \cap \{f < 1\}), \lambda(A) := \mu(A \cap \{f \geq 1\}), A \in \mathcal{F}$ $\mu = \nu + \lambda, \nu, \lambda$ erfüllen die gewünschten Eigenschaften ∎

10 Transformation des Lebesgue-Maßes

Ziel: Verallgemeinerung der bekannten Substitutionsregel für das Riemann-Integral ($n = 1$).

(10.1) $$t : [a, b] \to t([a, b]) \quad \text{stetig diff'bar}$$

(10.2) $$f : t([a, b]) \to \mathbb{R} \quad \text{statig}$$

(10.3) $$\int\limits_a^b f(t(x))t'(x)\,dx = \int\limits_{t(a)}^{t(b)} f(y)\,dy, \quad y = t(x)$$

Sei t zusätzlich umkehrbar eindeutig:

(10.4) $$\int\limits_a^b f(t(x))|t'(x)|\,dx = \int\limits_{t(a)}^{t(b)} f(y)\,dy, \quad y = t(x)$$

Beweis:
a.Fall t streng monoton wachsend

b.Fbll t streng monoton fallend, da t'(x) < 0 und t(a) > t(b) ■

Satz 10/1

(1) Das Lebesgue-Maß λ^n auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ ist verschiebungsinvariant

(2) Es sei $\Updownarrow$ ein Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ mit den folgenden Eigenschaften:

   (a) $\Updownarrow$ ist verschiebungsinvariant

   (b) $\Updownarrow([0, 1]^n) = 1$

   Dann gilt: $\Updownarrow = \lambda^n$

Beweis:
vgl. Satz II.8.2+3, Übungsaufgabe (Serie 11) ■

Lemma 10.0.0/4
Es existiert eine Zerlegung

$$T = S \circ O \tag{10.5}$$

mit S selbstadjungierter lienarer Operator mit nichtnegativen Eigenwerten und einer orthogonalen Transformation O.

Beweis:
Übungsserie ■

Satz 10/2
λ^n sei das Lebesgue-maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, T lineare Abbildung des $\mathbb{R}^n$ in sich.

(1) $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow T(A) \in \mathcal{B}^{\lambda^n}(\mathbb{R}^n)$ (Vervollständigung von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$)

(2) $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \lambda^n(T(A)) = |detT|\, \lambda^n(A)$

Beweis:
(1) Es gelte zunächst $\mathrm{T}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$

T^{-1} Umkehrabbildung: T^{-1} ist linear und somit stetig

$$T(A) = (T^{-1})^{-1}(A) \tag{10.6}$$

(volle Urbild von A bzgl. T^{-1})

$\Rightarrow T(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

(2) $\dim(\mathrm{T}(\mathbb{R}^n)) <$ n:

$H = T(\mathbb{R}^n)$ abgeschlossener Unterraum $\Rightarrow H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

z. z.: $\lambda^n(H) = 0$ (Daraus folgt wegen $T(A) \subseteq H$: $T(A) \in \mathcal{B}^{\lambda^n}(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda^n(T(A)) = 0$)

$dim(H) = k < n$, sei $x_1, \dots, x_k$ orthonormierte Basis von H, $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ Ergänzung einer orthonormierten Basis des $\mathbb{R}^n$

setze $Ox_i := e_i, i = 1, \dots, n, e_1, \dots, e_n$ kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$, O definiert eine orthogonale Transformation des $\mathbb{R}^n$

$$O(H) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = (y_1, \dots, y_n)^T, y_{k+1} = \ldots = y_n = 0\} \tag{10.7}$$

Es gilt:

$$\lambda^n(O(H)) = \lambda^n(H)(vgl.kommender Punktc) \tag{10.8}$$

g. z. z.: $\lambda^n(O(H)) = 0$

(10.9) $$O(H) = \bigcup_{N=1}^{\infty} [-N, N]^k \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}$$

$\lambda^n([-N, N]^k \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}) = (2N)^k \bigcap_{i=k+1}^{n} \lambda(\{0\}) = 0$

(3) T sei orthogonal $\mu(\mathrm{A}) := \lambda^n(\underbrace{T(A)}_{\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

μ Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, μ verschiebungsinvariant, $0 < \mu([0,1]^n) < \infty$

(10.10) $$\frac{\mu}{\mu([0,1]^n)}$$

verschiedungsinvariant und geeicht

$\Rightarrow^{Satz 1}$

(10.11) $$\frac{\mu}{\mu([0,1]^n)} = \lambda^n$$

(10.12) $$\lambda^n(T(A)) = \mu([0,1]^n)\lambda^n(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

(10.13) $$B := \{x \in \mathbb{R}^n :< x, x >= \|x\|^2 < 1\}$$

$T(B) = B$ (T, T^{-1} orthogonal) $T(B) = \{T(x) : x \in B\} \subseteq B$

z. z. $T(x) \in B$, d. h. $< T(x), T(x) >=< x, x >< 1$

Einsetzen von B: $\lambda^n(T(B)) = \lambda^n(B) = \mu([0,1]^n)\lambda^n(B) \Rightarrow \mu([0,1]^n) = 1 \Rightarrow$ Beh.

(4) Sei T eine Diagonalmatrix

(10.14) $$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\mu(A) = \lambda^n(T(A))$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, μ verschiebungsinvariant, $0 < \mu([0,1]^n) < \infty$

$\Rightarrow^{Satz 1}$

(10.15) $$\frac{\mu}{\mu([0,1]^n)} = \lambda^n \Rightarrow \lambda^n(T(A)) = \mu([0,1]^n)\lambda^n(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

(10.16)
$$\mu([0,1]^n) = \lambda^n(T([0,1]^n)) = \lambda^n(Rechteckeder Seitenl\ddot{a}nge|\lambda_i|) = \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| = |\det T|$$

(5) T beliebige lineare Transformation

(a) $dim(T(\mathbb{R}^n)) < n : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow T(A) \in \mathcal{B}^{\lambda^n}(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda^n(T(A)) =^b 0 = |det(T)|\lambda^n(A)$

(b) $T(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ Lemma 1: $T = S \circ O$, S selbstadjungiert mit nichtnegativen Eigenwerten, O orthogonal

$S = U \circ D \circ U^T$, U orthogonal, D Diagonalmatrix (Hauptachsentransformation) $\Rightarrow$ Darstellung $T = U \circ D \circ \underbrace{U^T \circ O}_{=\widetilde{O}}$

$$\lambda^n(T(A)) = \lambda^n(U(\underbrace{D(\widetilde{O}(A))}_{\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)})) \tag{10.17}$$

$$=^c \lambda^n(D(\underbrace{\widetilde{O}(A)}_{\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)})) \tag{10.18}$$

$$=^d |detD|\lambda^n(\widetilde{O}(A)) =^c |detD|\lambda^n(A) \tag{10.19}$$

■

Folgerung 10.0.0/2
Das Lebesgue-maß λ^n auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ ist invariant bzgl. beliebiger Bewegungen (Drehungen, Spiegelung, Translationen)

10.1 Nichtlineare Transformationen

$G \subseteq \mathbb{R}^n$offen$, t : G \to \mathbb{R}^n$Abbildung$, G' := t(G), t = (t_1, \dots, t_n)$

Vorraussetzungen:

(1) t umkehrbar eindeutig

(2) t stetig diff'bar,

$$t'(x) = (\frac{\partial t_i(x)}{\partial x_i})_{i=1,\dots,n} \tag{10.20}$$

(3) $\mathcal{F}(x) = dett'(x) \neq 0, x \in G$

Bemerkung 10.1.0/2
Es gelten dann auch:

- Umkehrabbildung t^{-1} ist stetig diff'bar, $(t^{-1})'(t(x)) = (t'(x))^{-1,x\in G}$
- t^{-1} stetig
- $G' = t(G)$ offen

Folgerungen aus em Satz über impliziete Funktionen, Vorraussetzungen sind symetrisch in t und t^{-1}

Lemma 10.1.0/5
Sei r eine wachsende Funktion für die gilt:

(10.21) $$\lim_{a \downarrow 0} r(a) = 0$$

(10.22) $$|R_x(z) \leq n\, r(|z-x|)|z-x|, z \in S_a(x) \subseteq G$$

Beweis:

(10.23)
$$t_i(z) - t_i(x) = \sum_{k=1}^{n} [t_i(z_1, \dots, z_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - t(z_1, \dots, z_{k-1}, x_k, \dots, x_n)]$$
(10.24)
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial t_i}{\partial x_k}(z_1, \dots, z_{k-1}, x_k + \theta_k(z_k - x_k), x_{k+1}, \dots, x_n)(z_k - x_k), \quad \theta_k \in [0,1], k = 1, \dots, n(Mittelwe$$

Vergleich mit Taylorentwicklung in folgenden Satz:

(10.25)
$$R_x^i(z) = \sum_{k=1}^{n} [\frac{\partial t_i}{\partial x_k}(z_1, \dots, z_{k-1}, x_k + \theta_k(z_k - x_k), x_{k+1}, \dots, x_n) - \frac{\partial t_i}{\partial x_k}(x)](z_k - x_k)$$

(10.26) $$r(|z-x|) := \max_{i,k=1,\dots,n} \sup_{y \in G, |y-x| \leq |z-x|} |\frac{\partial t_i}{\partial x_k}(y) - \frac{\partial t_i}{\partial x_k}(x)|$$

(10.27) $$|R_x(z)| \leq n\, r(|z-x|)|z-x|$$

für $a \downarrow 0 : r(a) \downarrow 0$ (Gleichm. stetigkeit der pariellen Ableitungen), r wachsend ∎

Satz 10/3

(10.28) $$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), A \subseteq G \Rightarrow \lambda^n(t(A)) = \int_A |\mathcal{F}(x)| \lambda^n(dx)$$

Beweis:

I Zusätzliche Annahme:

(d) G beschränkt

(e) $dett'(x)$, $det(t^{-1})'(x)$ beschränkt

(f) partielle Ableitung von t bzw. t^{-1} sind gleichmäßig stetig und beschränkt auf G bzw. G'

Annahme: Sei Satz 3 gültig unter 1-6 Betrachten $t : G \to G' mit 1-3$ Es existiere $G_m \uparrow G : G_m$ offen, beschränkt, $\bar{G_m} \subseteq G (\Rightarrow \bar{G_m}$ kompakt) t: $G_m \to G'_m \to G'_m = t(G_m), \bar{G'_m}$ kompakt

$\Rightarrow t : G_m \to G'_m$ erfüllt 1-6

Anwendung von Satz 3 für G_m :

$$\lambda^n(t(A \cap G_m)) = \int_{A \cap G_m} |det t'(x)| \lambda^n(dx), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), A \subseteq G \tag{10.29}$$

$$\downarrow m \to \infty \downarrow m \to \infty \tag{10.30}$$

$$\lambda^n(t(A)) = \int_A |det t'(x)| \lambda^n(dx) \tag{10.31}$$

II $t : G \to G'$ erfülle 1-6

$x \in \mathbb{R}^n : |x| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|, x = (x_1, \dots, x_n)$ $|\cdot|$ Norm, $S_a(x) = \times_{i=1}^n (x_i - a, x_i + a)$ (Vollkugel mit Zentrum x und Radius $a > 0$)

Taylorentwicklung: wählen $a > 0$ so dass $z \in S_a(x) \subseteq G$

$$t(z) = t(x) + t'(x)(z - x) + R_x(z), x \in G \tag{10.32}$$

insert Lemma 2

III $I_m\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = \frac{k_i}{2^m}, k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n\}$

x$\in I_m : W_m(x) = \times_{i=1}^n [x_i, x_i + \frac{1}{2^m})$

Lemma 10.1.0/6
x$\in I_m, W_m(x) \subseteq G, x' = (x'_1, \dots, x'_n), x'_i = x_i + \frac{1}{2^m}, i = 1, \dots, n$ (x' Mittelpukt von $W_m(x)$)

b=$(b_1, \dots, b_n)^T := (t'(x))^{-1} t(x')$

$\Rightarrow$ Es existiert $\varepsilon_m \downarrow_{m \to \infty} 0 : t(W_m(x)) \subseteq t'(x')(\times_{i=1}^n [b_i - \frac{1+\varepsilon_m}{2^{m+1}}, b_i + \frac{1+\varepsilon_m}{2^{m+1}}]$

Beweis:
$z \in W_m(x)$ t(z)-t$(x') = t'(x')(z - x') + R_{x'}(z)$

$\Rightarrow (t'(x'))^{-1} t(z) - b = z - x' + (t'(x'))^{-1}(R_{x'}(z))$

A Matrix, $A = (a_{ij})$ $|Ax| \leq n \max_{i,j=1,\ldots,n} |a_j||x|$

(10.33)

$|(t'(x'))^{-1}(t(z)) - b| \leq |z - x'| + |(t'(x'))^{-1} R_{x'}(z)|$

$$\leq \underbrace{|z - x'|}_{\frac{1}{2^{m+1}}} + n \underbrace{\max_{i,j=1,\ldots,n} |\frac{\partial s_i}{\partial x_j}(t(x'))|}_{\leq M} |R_{x'}(z)| (s = (s_1, \ldots, s_n) = t^{-1}) \tag{10.34}$$

$$\leq \frac{1}{2^{m+1}} + n \cdot M \cdot n \cdot r(\underbrace{|z - x'|}_{\leq \frac{1}{2^{m+1}}}) \underbrace{|z - x'|}_{\leq \frac{1}{2^{m+1}}} \tag{10.35}$$

$$\frac{1}{2^{m+1}} + n^2 \cdot M \cdot r(\frac{1}{2^{m+1}}) \frac{1}{2^{m+1}} (Lemma 2) \tag{10.36}$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}} [1 + \varepsilon_m] \tag{10.37}$$

$\Rightarrow (t'(x'))^{-1}(t(z)) \in \times_{i=1}^n [b_i - \frac{1}{2^{m+1}}(1 + \varepsilon_m), b_i + \frac{1}{2^{m+1}}(1 + \varepsilon_m) \Rightarrow t(z \in W_m(z)) \in t'(x')(\times_{i=1}^n [b_i - \frac{1}{2^{m+1}}(1 + \varepsilon_m), b_i + \frac{1}{2^{m+1}}(1 + \varepsilon_m)$ ■

Setzen $\lambda = \lambda^n$

$\lambda(t(G)) = \lambda(t(\bigcup_{m=1}^\infty G_m)) = \lambda(\bigcup_{m=1}^\infty t(G_m)) = \lim_{m\to\infty} \lambda(t(G_m)) = \lim_{m\to\infty} \lambda(t(\bigcup_{x \in G, W_m(x) \subseteq G} W_m(G))) = \lim_{m\to\infty} \lambda(\bigcup_{x \in G, W_m(x) \subseteq G} t(W_m(x))) = \lim_{m\to\infty} \sum_{x \in G, W_m(x) \subseteq G} \lambda(t(W_m(x))) \leq^{Lemma 3} \liminf_{m\to\infty} \sum_{x \in G, W_m(x) \subseteq G} \lambda(t'(x')(\times_{i=1}^n [b_i - \frac{1+\varepsilon_m}{2^{m+1}}, b_i + \frac{1+\varepsilon_m}{2^{m+1}}])) = \lim_{m\to\infty} \sum_{x \in G, W_m(x) \subseteq G} |dett'(x'))|(\frac{1+\varepsilon_m}{2^{m+1}})^n = \liminf_{m\to\infty} \sum_{x \in G, W_m(x) \subseteq G} |dett'(x')| \lambda(W_m(x))(1+\varepsilon_m)^n = \liminf_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_m(z) \lambda(dz)(1+\varepsilon_m)^n$

$\mathcal{F}_m(z) = \sum_{x \in G, W_m(x) \subseteq G} |dett'(x')| 1_{W_m(x)}(z)$

$= \int_{\mathbb{R}^n} |dett'(z)| \cdot 1_G(z) \lambda(dz)$

(Anwendung des Satzes von Lebesgue:

(a) $\lim_{m\to\infty} \mathcal{F}_m(z) = |dett'(z)| \cdot 1_G(z), z \in \mathbb{R}^n$

(b) $0 \leq \mathcal{F}_m(z) \leq \sup_{y \in G} |dett'(y)| \cdot 1_G(z)$ integrierbar bzgl. λ

)

also: $(1) \lambda(t(G)) \leq \int_G |dett'(z) \lambda(dz)$

$U \subseteq G$ offen: $t_{|U} : U \to t(U)$ erfüllt alle Vorraussetzungen, folglich erhalten wir wie (1): (2) $\lambda(t(U)) \leq \int_U |dett'(z)| \lambda(dz)$

IV $A \subseteq G$, $A \in \mathcal{B}(G)$ $\lambda(A) = \inf_{A \subseteq U \subseteq G, U \text{offen}} \lambda(U)$ (Satz I.10.4, Folgerung 1)

$\varepsilon > 0$ Wählen U offen: $A \subseteq U \subseteq G$ mit $\lambda(U) \leq \lambda(A) + \varepsilon, \lambda(A) < \infty$

$\lambda(t(A)) \leq \lambda(t(U))\lambda^{(2)} \int_U |dett'(z)|\lambda(dz) = \int_A |dett'(z)|\lambda(z) + \underbrace{\int\limits_{U\setminus A} \underbrace{|dett'(z)|}_{\leq c} \lambda(dz)}_{c\,\lambda(U\setminus A)\leq c\,\varepsilon}$

(3) $\lambda(t(A)) \leq \int_A |dett'(z)|\lambda(dz), A \in \mathcal{B}(G), A \subseteq G$

V s=t^{-1} Umkehrabbildung, s: G'→ G mit 1)-6) λ_s Bildmaß auf (G, $\mathcal{B}(G)$) von $\lambda_{|G'}$ bzgl s $\lambda_s(A) = \lambda(t(A)), A \in \mathcal{B}(G), A \subseteq G$ $\lambda_s(A) = \lambda_{|G'}(s^{-1}(A)) = \lambda_{|G'}(t(A))$

Aus (3) folgt: $\lambda_s \ll \lambda_{|G}$ Sei $f(z) = \frac{d\lambda_s}{d\lambda_{|G}}(z)$ Dichte

$\Rightarrow \lambda(t(A)) = \int_A f(z)\lambda(dz) \leq^{(3)} \int_A |dett'(z)|\lambda(dz), A \in \mathcal{G} \Rightarrow \int_A [|dett'(z)| - f(z)]\lambda(dz) \geq 0, \forall A \in \mathcal{B}(G)$

$A_0 := \{z \in G : |dett'(z)| - f(z) < 0\} \Rightarrow \int_A [|dett'(z)| - f(z)]\lambda(dz) \leq 0 \Rightarrow = 0$

$\int_G [|dett'(z)| - f(z)]1_{A_z}(z)\lambda(dz) = 0 \Rightarrow [|dett'(z)| - f(z)]1_{A_z}(z) = 0$ λ fü. auf G

$\Rightarrow$ (4) f(z) $\leq$ |det t'(z)| λ-fü. auf G

VI (Vorraussetung der Rollen von s und t) λ_t Bildmaß auf (G', $\mathcal{B}(G)$) von $\lambda_{|G}$ bzgl. t

analog zu V: $\lambda_t \ll \lambda_{|G'}$ und $\frac{d\lambda_t}{d\lambda_{|G'}}(y) \leq |dets'(y)|$, $y \in G'$, λ-fü $s'(y) - (t^{-1})'(y) = (t'(t^{-1}(y)))^{-1}$

(5) $\frac{d\lambda_t}{d\lambda_{|G'}}(y)|dett'(t^{-1}(y))|^{-1}, y \in G'$, $\lambda-$fü.

VII Zusammenstellung $\lambda(t(A)) \leq^{(3)} \int_A |dett'(z)|\lambda(dz) =^{Transformationssatz 6.2} \int_{t(A)} |dett'(t^{-1}(y))|\lambda_t(dy$

$\int_{t(A)} |dett'(t^{-1}(y))| \underbrace{\frac{d\lambda_t(y)}{d\lambda_{|G'}}(y)}_{\leq^{(4)}|dett'(t^{-1}(y))|^{-1}} \lambda(dy) \leq \int_{t(A)} \lambda(dy) \leq \lambda(t(A))$

$\Rightarrow \lambda(t(A)) = \int_A |dett'(z)|\lambda(dz), A \in \mathcal{B}(G)$ ■

Bemerkung 10.1.0/3
$G \subseteq \mathbb{R}^n, t\colon G \to \mathbb{R}^n$

$G^{(0)}$ Kern von G (Menge der inneren Punkte von G)

(1) $t_{|G^{(0)}}$ erfüllt die Bedingungen 1)-3)

(2) $\lambda(G \setminus G^{(0)}) = 0, \lambda(t(G) \setminus t(G^{(0)}) = 0$

insbesondere: $\lambda(\partial G) = 0, \lambda(\partial t(G)) = 0$

t stetig $\Rightarrow$ $(t(G))^{(0)} = t(G^{(0)})$, $\partial t(G) = t(\bar{G}) - t(G^{(0)}$

$\Rightarrow$ Unter diesen Vorraussetzungen gelten sinngemäß die Sätze 3-5

Bemerkung 10.1.0/4

(1)

$$t(A) = (t^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \tag{10.38}$$

(2) t sei linear, $t(x) = Tx$, T $n \times n$-Matrix $t'(x) = T \Rightarrow \lambda^n(t(A)) = \int_A |detT|\lambda^n(dx) = |detT|\lambda^n(A)$ vgl. Satz 2

(3) $\lambda^n(t(A)) = \lambda^n_{t^{-1}}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$\lambda^n_{t^{-1}}$ Bildmaß des Maßes $\lambda^n_{|G'}$ (Einschränkung von λ^n auf G', Maß auf (G', $\mathcal{B}(G')$), $\lambda^n_{t^{-1}}$ Maß auf (G, $\mathcal{B}(G)$)

Satz 10/4
(Folgerung aus Satz 3)

Sei $\lambda^n_{t^{-1}}$ das Bildmaß von $\lambda^n_{|G'}$ auf $(G, \mathcal{B}(G))$.

Dann gilt:

$$\lambda^n_{t^{-1}} \ll \lambda^n_{|G} \tag{10.39}$$

und

$$\frac{d\lambda^n_{t^{-1}}}{d\lambda^n_{|G}} = |dett'(x)|(= |\mathcal{F}(x)|), x \in G \tag{10.40}$$

Satz 10/5 (Substitutionsregel für das Lebesgue-Integral)
Sei f messbar auf $(G', \mathcal{B}(G'))$.

Dann folgt:

$$\int_G f(y)\lambda^n(dy) = \int_G f(t(x))|dett'(x)\lambda^n(dx) \tag{10.41}$$

(falls eines der beiden Integrale existiert, so existiert auch das zweite und es gilt die Gleichheit)

Beweis:
o. B. d. A. $f \geq 0$

(10.42)

$$\int_{G'} f(y)\lambda^n(dy) = \int_{G'} f(t(t^{-1}(y)))\lambda^n(dy) = \int_G f(t(x))\lambda^n_{t^{-1}}(dx) =^{Satz 11.4} \int_G f(t(x))\frac{d\lambda^n_{t^{-1}}}{d\lambda^n_{|G}}(x)\, d\lambda^n_{|G} = \int_G f(t(x))|\mathcal{F}(x)|\lambda$$

■

10.2 Polarkoordinaten ($n = 2$)

t= (t_1, t_2), G=[0,∞)×[0,2π) x $= t_1(\rho, \varphi) = \rho\cos\varphi, (\rho, \varphi) \in G$ y $= t_2(\rho, \varphi) = \rho\sin\varphi$ $G^{(0)} = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ G$\setminus G^{(0)} = \underbrace{\{0\}}_{\lambda^1-Nullmenge} \times [0, 2\pi) \times \cup (0, \infty) \times \underbrace{\{0\}}_{\lambda^1-Nullmenge} \Rightarrow$ $\lambda^2(G, G^{(0)}) = 0$

$t(G) \setminus t(G^{(0)}) = \{\underbrace{0}_{Nullvector}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = 0, x > 0\} \Rightarrow \lambda^2(t(G) \setminus t(G^{(0)})) = 0$

(1) t umkehrbar eindeutig auf $G^{(0)}$

(2) t stetig diff'bar

(3)

$$t'(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial \rho} & \frac{\partial t_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial t_2}{\partial \rho} & \frac{\partial t_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{10.43}$$

$$det(t'(\rho, \varphi)) = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \varphi > 0, (\rho, \varphi) \in G^{(0)} \tag{10.44}$$

10.3 Zylinderkoordinaten ($n = 3$)

$G = [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$

todo: hier fehlt was

(1)

(2) t stetig diff'bar

(3)

$$t'(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.45}$$

$$dett'(\rho, \varphi, z) = \rho > 0, (\rho, \varphi, z) \in G^{(0)} \tag{10.46}$$

10.4 Kugelkoordinaten ($n = 3$)

$(\rho, \varphi, \theta) \in G = [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi)$

$$\rho' = \rho \sin\theta \tag{10.47}$$
$$x = \rho' \cos\varphi = \rho \cos\varphi \sin\theta \tag{10.48}$$
$$y = \rho' \sin\varphi = \rho \sin\varphi \sin\theta \tag{10.49}$$
$$z = \rho \cos\theta \tag{10.50}$$

$\lambda^3(G \setminus G^{(0)}) = 0, \lambda^3(t(G) \setminus t(G^{(0)})) = 0$

$$t'(\rho, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{pmatrix} \tag{10.51}$$
$$|dett'(\rho, \varphi, \theta)| = \rho^2 \sin\theta \tag{10.52}$$

11 Der Satz von Daniell

Problem Zusammenhang zwischen linearen Funktionalen und Maßen

$(\Omega, \mathcal{F})$ messbarer Raum, $\mathbb{B}(\Omega, \mathcal{F})$ linearer Raum der beschränkten messbaren Funktionen
$H \subseteq \mathbb{B}(\Omega, \mathcal{F})$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) H linearer Raum

(2) $1_\Omega \in H$

(3) H abgeschlossen gegenüber $\wedge, \vee$ (Minimum, Maximum)

(4) $\sigma(H) = \mathcal{F}$, $\sigma(H)$ kleinste σ-Algebra ($\subseteq \mathcal{F}$), daß $f\colon (\Omega, \sigma(H)) \to \mathbb{R}$ messbar ist $\forall f \in H$

Satz 11/1 (Daniell)
$I\colon H \to R$ Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(1) I ist linear

(2) I ist positiv, $f \in H$, $f \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq 0$

(3) I ist stetig bzgl. monotoner Konvergenz: $f_n \in H, f_n \downarrow 0 (n \to \infty)$ punktweise $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} I(f_n) = 0$

Dann existiert ein endlichen Maß $\Updownarrow$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit

(11.1) $$I(f) = \int\limits_\Omega f \, d\Updownarrow, f \in H$$

Insbesondere:

(11.2) $$\Updownarrow(\Omega) = I(1_\Omega)$$

Das Maß $\Updownarrow$ ist eindeutig bestimmt

Beweis:
siehe Neven II.7.1 oder P. A. Meyer: Probability and Potentials, T II.2.4 ■

Folgerung 11.0.0/3 (Fortsetzungssatz von Caratheodory)
$\Updownarrow$ Prämaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ $\mathcal{A}$ Algebra, $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$

H=$\mathcal{L}(\{1_A : A \in \mathcal{A}\})$ (lineare Hülle) Eigenschaften 1-4 erfüllt

$$I(f) = \sum_{k=1}^{n} c_k \Updownarrow(A_k), f \in H, f = \sum_{k=1}^{n} c_k 1_{A_k} \tag{11.3}$$

I erfüllt (i)-(iii) von Satz Daniell

$\xrightarrow{Satz1}$ Es existiert ein Maß $\bar{\Updownarrow}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit:

$$I(f) = \int_{\Omega} f \, d\bar{\Updownarrow} \tag{11.4}$$

insbesondere:

$$f = 1_A, A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Updownarrow(A) = \bar{\Updownarrow}(A) \tag{11.5}$$

Satz 11/2 (Rieszscher Darstellungssatz (1909) von F. Riesz)
K kompakt, hausdorffsch $(\forall x, y \in K \exists \varepsilon_x, \varepsilon_y : K_{\varepsilon_x}(x) \cap K_{\varepsilon_y}(y) = \emptyset)$

$C(K)$ Raum aller stetigen (beschränkten!) Funktionen auf K, $\mathcal{B}_0(K) = \sigma(C(K))$ σ-Algebra der Bairschen Mengen $I \colon C(K) \to \mathbb{R}$ Abbildung mit:

(1) I lineares Funktional

(2) I ist positiv

Dann existiert genau ein (endliches) Maß auf $\Updownarrow$ auf $(K, \mathcal{B}_0(K))$ mit $I(f) = \int_K f \, d\Updownarrow, f \in C(K)$

Beweis:
$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|, f \in C(K)$ ist eine Norm

(1) I positiv $\Rightarrow$ I stetig (=beschränkt) bzgl. $\|\cdot\|$

   (a) I positiv $\Rightarrow$ I monoton: $f, g \in C(K), f \geq g \Rightarrow f - g \in C(K), f - g \geq 0 \Rightarrow I(f - g) \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq I(g)$

   (b) $f \leq \|f\| \cdot 1_K \Rightarrow^{Monotonie} I(f) \leq I(\|f\| 1_K) = \|f\| \underbrace{I(1_K)}_{|\cdot|<\infty}$

   $-f \leq \|f\| \cdot 1_K \Rightarrow^{Monotonie} I(-f) \leq I(\|f\| 1_K) = \|f\| \underbrace{I(1_K)}_{|\cdot|<\infty}$

   $|I(f)| = \max\{I(f), -I(f)\} = \max\{I(f), I(-f)\} \leq \|f\| I(1_K), f \in C(K) \Rightarrow I$ beschränkt $\Rightarrow I$ stetig

(2) I stetig bzgl. $\|\cdot\| \to I$ stetig bzgl. monotoner Konvergenz $f_n \in C(K), f_n(x) \downarrow 0(n \to \infty) \xrightarrow{SatzvonDini} \|f_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \xrightarrow{nachI} I(f_n) \to n \to \infty 0$

$\mathcal{F}_n = \{f_n \geq \varepsilon\}$ abgeschlossen, $\mathcal{F}_n \supseteq \mathcal{F}_{n+1}, \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n = \emptyset$

$\Rightarrow^{Kbeschränkt} \exists n \colon \mathcal{F}_n = \emptyset$

Alle Vorraussetzungen für den Satz von Daniell sind erfüllt $\Rightarrow$ Beh. ∎

12 Die Sätze von Egoroff und Lusin

Satz 12/1 (D. F. Egoroff)
$(\Omega, \mathcal{F}, \Updownarrow)$, endlicher Maßraum, f_n, f messbare Funktionen, $f_n \to^{x\to\infty} f$ $\Updownarrow$-fü

Dann folgt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon \in \mathcal{F} : \Updownarrow(A_\varepsilon) < \varepsilon, f_n \to f \text{gleichmäßig auf } A_\varepsilon \tag{12.1}$$

.

Beweis:

$$N^\complement = \{\omega \in \Omega : f_n(\omega) \to^{n\to\infty} f(\omega)\}, N \in \mathcal{F}, \Updownarrow(N) = 0 \tag{12.2}$$

$$\mathcal{F}_{nk} = \bigcup_{j=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega : |f_j(\omega) - f(\omega)| \geq 2^{-k}\} \cap N^\complement, \mathcal{F}_{nk} \downarrow \emptyset (n \to \infty) \tag{12.3}$$

$\varepsilon > 0$ Es existiert ein $n(k)$ mit $\Updownarrow(\mathcal{F}_{n(k)\,k}) < \varepsilon 2^{-k}$

$$A_\varepsilon = N \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{n(k)\,k}, A_\varepsilon \in \mathcal{F} \tag{12.4}$$

$$\Updownarrow(A_\varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Updownarrow(\mathcal{F}_{n(k)\,k}) < \varepsilon \tag{12.5}$$

$$A_\varepsilon^\complement = N^\complement \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{n(k)\,k}^\complement \subseteq N^\complement \cap \mathcal{F}_{n(k)\,k}^\complement \tag{12.6}$$

$$\omega \in A_\varepsilon^\complement \Rightarrow |f_j(\omega) - f(\omega)| < 2^{-k}, j \geq n(k) \tag{12.7}$$

■

Satz 12/2 (N. Lusin)
$(\Omega, \rho), (E, d)$ metrische Räume, E separabel, $\Updownarrow$ endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$, $f\colon (\Omega, \mathcal{B}(\Omega)) \to (E, \mathcal{B}(E))$.

Dann folgt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine abgeschlossene Menge $\mathcal{F} \subseteq \Omega$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $f\big|_{\mathcal{F}}$ (Einschränkung von f auf $\mathcal{F}$) ist stetig

(2) $\Updownarrow(\mathcal{F}^{\complement}) < \varepsilon$

Beweis:
Sei $\{a_1, a_2, \ldots\}$ eine abzählbare dichte Menge in E.

$$B_{nk} = f^{-1}(S_{2^{-k}}(a_n)) \qquad n, k = 1, 2, \ldots$$
$$D_{nk} = B_{nk} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{nk} \qquad n, k = 1, 2, \ldots$$

Die D_{nk} sind paarw. disj. für $n = 1, 2, \ldots,$ und k fest

$$A_{nk} = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{jk} = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{jk} \uparrow \Omega \qquad n \to \infty$$

Beweis für letzte Gleichung:

(12.8)
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{nk} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{nk} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(S_{2^{-k}}(a_n)) = f^{-1}(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{2^{-k}}(a_n)}_{=E}) = \Omega$$

Es existiert mit $\Updownarrow(A^{\complement}_{n(k)\,k}) < \varepsilon \cdot 2^{-k-1}, k = 1, 2, \ldots$

Es existiert $\mathcal{F}_{jk} \subseteq D_{jk}, \mathcal{F}_{jk}$ abgeschlossen, $\Updownarrow(D_{jk} \supset \mathcal{F}_{jk}) < \varepsilon 2^{k-j-1}$. Nach Satz I.10.3

(12.9)
$$\mathcal{F} := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n(k)} \mathcal{F}_{jk}$$

abgeschlossen

I. zeigen: $\Updownarrow(\mathcal{F}^{\complement}) < \varepsilon$

(12.10)
$$\Updownarrow(\mathcal{F}^{\complement}) = \Updownarrow(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{n(k)} \mathcal{F}^{\complement}_{jk}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Updownarrow(\bigcap_{j=1}^{n(k)} \mathcal{F}^{\complement}_{jk}) = \sum_{k=1}^{\infty} \Updownarrow((\bigcup_{j=1}^{n(k)} \mathcal{F}_{jk})^{\complement}) = \sum_{k=1}^{\infty} [\Updownarrow(\bigcup_{j=1}^{n(k)} D_{jk} \cap (\bigcup_{j=1}^{n(k)} \mathcal{F}_{jk})^{\complement}) + \Updownarrow$$

(12.11)
$$= \sum_{k=1}^{\infty} [\sum_{j=1}^{n(k)} \underbrace{\Updownarrow(D_{jk} \setminus \mathcal{F}_{jk})}_{<\varepsilon 2^{-k-j-1}} + \varepsilon + 2^{-k-1}] < \varepsilon$$

II. zeigen $f_{|\mathcal{F}}$ stetig

$\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_{1k}, \dots, \mathcal{F} \cap \mathcal{F}_{n(k)k}$ Zerlegung von $\mathcal{F}$ $f_k := \sum_{j=1}^{n(k)} a_j \cdot 1_{\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_{jk}}$ auf $\mathcal{F}$

Beh.: f_k stetig (auf $\mathcal{F}$)

(12.12) $$x, x_l \in \mathcal{F}, x_l \to^{l \to \infty} x \Rightarrow \exists j, \exists l_0 l \geq l_0 : x_l \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}_{jk}$$

(12.13) $$\Rightarrow f_k(x) = a_j (j so bestimmt, da „x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}_{jk})$$

(12.14) $$f_k(x_l) = a_j, l \geq l_0 \Rightarrow \lim_{l \to \infty} f_k(x_l) = f_k(x)$$

beh.: $d(f_k(x), f(x)) \leq 2^{-k}, x \in \mathcal{F}$

(12.15) $$x \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists j = 1, \dots, n(k) : x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}_{jk} \Rightarrow f_k(x) = a_j$$

(12.16)
$$x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}_{jk} \subseteq D_{jk} \subseteq B_{jk} = f^{-1}(S_{2^{-k}}(a_j)) \Rightarrow f(x) \in S_{2^{-k}}(a_j) \Rightarrow d(f(x), a_j) < 2^{-k}$$

Es folgt $f_k \to^{k \to \infty} f_{|\mathcal{F}}$ gleichmäßig $\Rightarrow f_{|\mathcal{F}}$ stetig ■

Beispiel 12.0.0/3

(12.17) $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx (= \frac{\pi}{2})$$

Das Integral existiert nicht als Lebesgue-Integral:

(12.18) $$f(x) = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \int_0^\infty f^+(x) \lambda(dx) = \infty, \int_0^\infty f^-(x) \lambda(dx) = \infty$$

(12.19)
$$\int_0^\infty f^+(x) \lambda(dx) = \sum_{k=0}^\infty \int_{2\pi k}^{2\pi k + \pi} f(x) \, dx \geq \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2\pi k + \pi} \int_0^\pi \sin x \, dx \geq \int_0^\pi \sin x \, dx \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2\pi k + \pi} (Harmonische Reihe)$$

Analog: $\int_0^\infty f^-(x) \lambda(dx) = \infty$

- Integral existiert als uneigentliches Riemann-Integral

  zu zeigen: $\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx$ ist Cauchy-Folge

$$\int\limits_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx = [-\frac{\cos x}{x}]_a^b - \int\limits_a^b (-\cos x)(\frac{1}{x^2}\,dx = \frac{\cos a}{a} - \frac{\cos b}{b} - \int\limits_a^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx \tag{12.20}$$

$$|\int\limits_a^b \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \int\limits_a^b \frac{1}{x^2}\,dx \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \to^{a,b\to\infty} 0 \tag{12.21}$$

$\Rightarrow$ obiges Integral $\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx$ ist CF.