Fourieranalysis

PD Dr. Aicke Hinrichs

Semester: SSS 2007, SSS 2009

Vorwort

Dieses Dokument wurde als Skript für die auf der Titelseite genannte Vorlesung erstellt und wird jetzt im Rahmen des Projekts „Vorlesungsskripte der Fakultät für Mathematik und Informatik“ weiter betreut. Das Dokument wurde nach bestem Wissen und Gewissen angefertigt. Dennoch garantiert weder der auf der Titelseite genannte Dozent, die Personen, die an dem Dokument mitgewirkt haben, noch die Mitglieder des Projekts für dessen Fehlerfreiheit. Für etwaige Fehler und dessen Folgen wird von keiner der genannten Personen eine Haftung übernommen. Es steht jeder Person frei, dieses Dokument zu lesen, zu verändern oder auf anderen Medien verfügbar zu machen, solange ein Verweis auf die Internetadresse des Projekts `http://uni-skripte.lug-jena.de/` *enthalten ist.*

Diese Ausgabe trägt die Versionsnummer 2939 und ist vom 27. März 2010. Eine neue Ausgabe könnte auf der Webseite des Projekts verfügbar sein.

Jeder ist dazu aufgerufen, Verbesserungen, Erweiterungen und Fehlerkorrekturen für das Skript einzureichen bzw. zu melden oder diese selbst einzupflegen – einfach eine E-Mail an die Mailingliste `<uni-skripte@lug-jena.de>` *senden. Weitere Informationen sind unter der oben genannten Internetadresse verfügbar.*

Hiermit möchten wir allen Personen, die an diesem Skript mitgewirkt haben, vielmals danken:

- *Jens Kubieziel* `<jens@kubieziel.de>` *(2007,2009)*

Inhaltsverzeichnis

Auflistung der Theoreme

Sätze

Definitionen und Festlegungen

0. Einführung

Die Fourieranalysis entwickelte sich aus dem Studium der Fourierreihen. Damals untersuchte man die Möglichkeit, Funktionen durch trigonometrische Funktionen zu repräsentieren. Der Mathematiker Joseph Fourier veröffentlichte im Jahr 1807 seine Arbeit „Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides“. Dort beschrieb er, dass sich jede Funktion durch eine Serie von Vielfachen der Sinusfunktion schreiben lässt. Später stellte sich heraus, dass dieses Resultat nicht vollständig korrekt ist. Jedoch war die Grunderkenntnis ein großer Durchbruch. Der deutsche Mathematiker Johann Dirichlet zeigte 1829 die Behauptung Fouriers für Lipschitz-stetige Funktionen. Die Weiterentwicklung der Erkenntnisse nahmen über ein Jahrhundert in Anspruch und führten zur Definition des Dirichlet- sowie des Lebesgue-Integrals.

Für die Fourieranalysis existiert auch das Synonym der harmonischen Analysis. Immer geht es darum, Funktionen in einfache Funktionen umzustellen. Wozu ist das gut? Anfangs (zu Zeiten Fouriers) war man der Meinung, dass das nichts bringt. Jedoch war Fourier von seinem Ansatz überzeugt und stellte das in seinem Artikel dar. Im Laufe der Jahre hat sich die Fourieranalysis durchgesetzt. Denn Fouriers Prinzip funktioniert.

Wir behandeln die folgenden Punkte:

1. Fourierreihen (Entwicklung, Konvergenz, Summierbarkeit etc.) im Kapitel 1
2. Fouriertransformation im Kapitel 3
3. harmonische Analyse auf lokalkompakten abelschen Gruppen im Kapitel 7
4. Wavelets
5. Anwendungen

Ende des 18. Jahrhunderts wurden hauptsächlich zwei Differentialgleichungen studiert. Zum einen war das die Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ und zum anderen die Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$. Der Lösungsansatz ist die Separation der Variablen und Superposition, d. h. die Linearität der Lösungen. In der Vorlesung wird die Frage untersucht werden, welche Funktionen $f(x)$ sich als Summen elementarer harmonischer Schwingungen darstellen lassen.

1. Fourierreihen

1.1. Die schwingende Saite

Eine Saite ist an zwei Enden $(0, \pi)$ eingespannt und wird gezupft. Sie bewegt sich und versucht, wieder in Ruhestellung zu kommen. Die Funktion $u(x,t)$ hängt von Ort und Zeit ab. Woher kommt nun die Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$? Man macht Infinitesimalrechnung. An den Enden wirkt die Spannung $S(x,t)$ in Tangentialrichtung und hängt von Ort und Zeit ab. Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass die Masseteilchen sich nur vertikal bewegen. Die horizontale Komponente von S nennen wir $H(x,t) = S(x,t)\cos\Theta(x,t)$. Dabei ist $\Theta(x,t)$ der Winkel von S zur Horizontalen. Es gilt $H(x+\Delta x,t) - H(x,t) = 0 = S(x+\Delta x,t)\cos(\Theta+\Delta\Theta) - S(x,t)\cos\Theta$. Die vertikale Komponente heißt $V(x,t) = S(x,t)\sin\Theta$. Nach Newton gilt, dass die externe Kraft gleich der Masse mal Beschleunigung ist. Das bedeutet, $V(x+\Delta x,t) - V(x,t) = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\overline{x},t)$. Dabei ist ρ die Massendichte der Saite und $\overline{x}$ der Masseschwerpunkt des Saitenstücks von x bis $x+\Delta x$. Für $\Delta x \to 0$ folgt $\frac{\partial V}{\partial x}(x,t) = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$. Weiter stellen wir fest, dass $H(x,t) = H(t) = S(x,t)\cos\Theta$, d. h. H hängt nicht von x ab. Ferner ist $V(x,t) = H(x,t)\tan\Theta$. Wie kann man $\tan\Theta$ durch u ausdrücken? Es gilt $\tan\Theta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ und es folgt $\frac{\partial V}{\partial x} = H(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Eine weitere Annahme zur Vereinfachung ist, dass wir nur kleine Auslenkungen betrachten. Damit ist $\cos\Theta$ nahe bei 1 und $H(t)$ ist fast gleich zu $S(t)$.

Nun sei noch die Spannung an den Enden der Saiten zeitlich konstant. Damit ist auch S konstant. Es bleibt also übrig:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = S\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Zur weiteren Vereinfachung setzt man $a^2 = S/\rho$.

Der französische Mathematiker d'Alembert bestimmte die allgemeine Lösung durch $u(x,t) = 1/2(f(x+t) + g(x-t))$. Dabei sind f, g beliebig und zweimal stetig differenzierbar.

Zu einem vernünftig gestellten physikalischen Problem gehört noch die Anfangsbedingung: $u(x,0) = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$ und die Randbedingung $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. Es ist $u(x,0) = \varphi(x) = 1/2(f(x) + g(x))$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(t,0) = \psi(x) = 1/2(f'(x) - g'(x))$. Aus der Tatsache $\varphi'(x) = 1/2(f'(x) + g'(x))$ folgt insgesamt: $f'(x) = \psi(x) + \varphi'(x)$ und $g'(x) = -\psi(x) + \varphi'(x)$.

Bernoulli hat ebenfalls Lösungen gesucht: $u_j(x,t) = \sin jx \cos jt$ mit der Superposition: $u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin jx \cos jt$. Nach dem Einsetzen der Randbedingungen ergibt sich: $u(x,0) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin jx =: \varphi(x)$. Der Mathematiker fragte sich, für welche φ das funktioniert. Eine Lösung lieferten Fourier und Dirichlet.

1. Integrierbare Funktionen lassen sich so darstellen.
2. Erklärung, was die Konvergenz einer Reihe ist (Konvergenz von Partialsummen)

Fouriers Idee war die Funktion durch eine Reihe darzustellen: $\int_0^{\pi} \varphi(x) \sin kx \, dx = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \int_0^{\pi} \sin jx \sin kx \, dx = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \frac{\pi}{2} & j = k \end{cases} = \pi/2 b_k$. Damit muss man eher das Problem, wann die Reihe gegen $\varphi(x)$ konvergiert, betrachten. Insgesamt ergibt sich als Fourierformel:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

Klassische Fourierreihen

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos jx \qquad \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin jx$$
$$\sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

Besser ist der moderne Ansatz, das im Komplexen zu betrachten:

$$\cos jx = \frac{e^{ijx} + e^{-ijx}}{2} \qquad \sin jx = \frac{e^{ijx} - e^{-ijx}}{2} \Rightarrow \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ijx}$$

1.2. Fourierreihen – eine Einführung

Im $\mathbb{R}^n$ gibt es Gruppen, die natürlich darauf operieren.

- Translation
- Rotation
- Dilatation

Interessant sind Funktionen, die sich bezüglich dieser Operationen gut verhalten. Diese wollen wir im folgenden studieren.

Für Fourierreihen muss man sich ein anderes Objekt besorgen, den **Torus** $\mathbb{T} = \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$. Als einfaches Modell kann man das Intervall $[0, 2\pi)$ nehmen. Addition und Subtraktion machen wir modulo 2π. Funktionen auf dem Torus entsprechen 2π-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$.

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x+y)\,dx$$

Ein zweites Modell für den Torus ist der Einheitskreis in $\mathbb{C}$. Es ist $x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow e^{ix} \in \mathbb{C}$. Der Torus addiert auf sich selbst als Gruppe. Sei $x \in \mathbb{T}$. Die Translation $\tau\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ bildet $x \mapsto x + y \mod 2\pi$ ab (Modell 1) bzw. $e^{ix} \mapsto e^{i(x+y)}$ (Modell 2).

Frage: Welche Funktionen verhalten sich gut gegenüber dieser Aktion? Der erste Ansatz wäre: $\tau_y f(x) = f(x) = f(x+y) \Rightarrow f$ ist konstant. Der zweite Ansatz ist $|\tau_y f(x)| = |f(x)| = |f(x+y)|$. Wir können schreiben $f(x+y) = f(x)\varphi(y)$ mit $|\varphi(y)| = 1$ Für $f \neq 0 \Rightarrow f(y) = f(0)\varphi(y)$, d. h. f ist bis auf eine Konstante durch φ bestimmt. Somit folgt $\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$. Also φ ist ein Homomorphismus von $\mathbb{T}$ in Modell 1 nach $\mathbb{T}$ in Modell 2. Wir verlangen zusätzlich, dass φ stetig ist.

Definition (Charakter)
Ein stetiger Homomorphismus $\varphi\colon G \to \mathbb{T}$ heißt **Charakter** auf dem Torus. Dabei ist G eine lokalkompakte abelsche Gruppe.

Wir studieren eine lokalkompakte abelsche Gruppe G. Dabei heißt **Lokalkompaktheit**, dass wir auf G eine Topologie haben und jedes Element eine kompakte Umgebung hat[1]. Diese Topologie verträgt sich mit der Gruppenoperation. Wichtig ist: Sei $O \subseteq G$ offen, dann ist $xO = \{xy\colon y \in O\}$ wieder offen. Wegen der Eigenschaft muss man zur Prüfung auf Lokalkompaktheit nur das Einselement kontrollieren.

Beispiel
Beispiel sind $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^n, +), \mathbb{C}, \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der Multiplikation. Weiterhin ist auch $\mathbb{T}$ eine kompakte abelsche Gruppe. Fourieranalysis funktioniert auf allen diesen Gruppen. Der Charakter auf einer solchen Gruppe ist ein stetiger Homomorphismus $\varphi\colon G \to \mathbb{C}^*$ ($\mathbb{C}^*$ ist multiplikativ).

Bemerkung
Die Charaktere bilden selbst eine abelsche Gruppe. Es gilt: $(\varphi\psi)(x) := \varphi(x)\psi(x)$ mit dem Einselement $\varphi(x) = 1$, dem inversen Element $\varphi^{-1}(x) = \varphi(x)^{-1}$. Die Gruppeneigenschaften rechnet man leicht nach. (Übung) Man bezeichnet die Gruppe der Charaktere als **duale Gruppe**.

Falls G kompakt ist, folgt, dass jeder Charakter nach $\mathbb{T}$ abbildet, d. h. $\varphi\colon G \to \mathbb{T}$.

[1] Genauer muss G ein Hausdorff-Raum sein, d. h. alle Punkte in G haben disjunkte offene Umgebunden.

Suche der Charaktere Die erste Aufgabenstellung ist immer, die Charaktere zu suchen (finden der dualen Gruppe). Jetzt ist $G = \mathbb{T}$. Sei $\varphi\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ stetig mit $\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y)$.

Man kann für $a \in [0, 2\pi)$ ein $b = \int_0^a \varphi(x)\, dx \neq 0$ finden. Wir gehen das folgendermaßen an: $b\varphi(y) = \int_0^a \varphi(x)\varphi(y)\, dx = \int_0^a \varphi(x + y)\, dx = \int_y^{a+y} \varphi(x)\, dx$ (Integralgrenzen evtl. noch modulo 2π rechnen, um nicht über die Grenzen zu rutschen).

$$\varphi(y) = \frac{1}{b} \int\limits_y^{a+y} \varphi(x)\, dx$$

Somit folgt, dass φ stetig differenzierbar ist und für die Ableitung können wir folgern. $\varphi'(y) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(y+h)-\varphi(y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(y)\varphi(h)-\varphi(y)\varphi(0)}{h} = \varphi(y)\varphi'(0)$. Damit ergibt sich $\varphi' = K\varphi$ mit $K = \varphi'(0)$ und wir erhalten $\varphi(x) = ce^{Kx}$ für $x \in [0, 2\pi)$. Im Fall $\varphi(0) = 1$ ergibt sich dann $1 = c$ und $\varphi(x) = e^{Kx}$. Weiter ist $\varphi(x + 2\pi) = e^{Kx+K2\pi} = \varphi(x)$ und es folgt, $e^{K2\pi} = 1$ genau dann, wenn $K = ij$ mit $j \in \mathbb{Z}$. Somit ist der Charakter $\varphi(x) = e^{ijx}$.

Satz 1.2.1
Die Charaktere auf dem Torus $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$ sind genau die Funktionen $\varphi(x) = e^{ijx}$ mit $j \in \mathbb{Z}$. Die duale Gruppe des Torus ist die diskrete Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$

Berechnung der Fourierkoeffizienten Entwickle in Fourierreihe $f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j e^{ijx}$. Dabei sind die c_j die Fourierkoeffizienten. Die Frage ist, wann die Fourierreihe konvergiert.

Sei f ein trigonometrisches Polynom, d. h. wir haben eine endliche Summe: $f(x) = \sum_{j=-N}^{N} c_j e^{ijx}$. Wie rechnet man die Koeffizienten c_j aus? Wir integrieren gegen einen Charakter[2]

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\, dx &= \sum_{j=-N}^{N} c_j \int\limits_0^{2\pi} e^{ijx}e^{-ikx}\, dx = \sum_{j=-N}^{N} c_j \int\limits_0^{2\pi} e^{i(j-k)x}\, dx \\ &= \sum_{j=-N}^{N} c_j \begin{cases} 2\pi & j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = 2\pi c_k\end{aligned}$$

Definition (Fourierkoeffizient)
Für eine ganze Zahl k ist der k-te **Fourierkoeffizient** einer absolut integrierbaren Funktion $f\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$c_k = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\, dx$$

[2] Die Begründung hierfür liegt in der Hilbertraumtheorie. Das stellt eine Art Basiswechsel im Hilbertraum dar (Falls ich das richtig verstanden habe.).

Die fundamentale Frage der Fourierreihen ist, für welche f und in welchem Sinn die Reihe $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{f}(j)e^{ijx}$ gegen f konvergiert.

Wir betrachten im folgenden L_p-Räume $L_p([0,2\pi))$. Der Raum $L_p([0,2\pi))$ ist ein vollständiger normierter Raum (Banachraum). Es ist $f \in L_1(\mathbb{T}) \rightsquigarrow (\hat{f}(k))$.

Satz 1.2.2
Für $f \in L_1(\mathbb{T})$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt,

$$|\hat{f}(k)| \leq \|f|L_1\|$$

Beweis:
$|\hat{f}(k)| = |\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx = \|f|L_1\|$. ∎

Satz 1.2.3 (Satz von Riemann-Lebesgue)
Für $f \in L_1(\mathbb{T})$ gilt

$$\lim_{k\to\pm\infty} \hat{f}(k) = 0$$

Beweis:
Wir brauchen zum Beweis eine Vorbemerkung: Trigonometrische Polynome sind dicht in jedem $L_p(\mathbb{T})$ für $0 < p < \infty$, d. h. für alle Funktionen $f \in L_p(\mathbb{T})$ gibt es ein trigonometrisches Polynom P mit $\|f - P|L_p\| < \varepsilon$. Die Beweisidee zu der Aussage ist:

1. Zuerst überlegt man sich, dass der Raum der stetigen Funktionen $C(\mathbb{T})$ dicht ist in $L_p(\mathbb{T})$. Starte mit $f \in L_p(\mathbb{T})$ und falte diese mit einer differenzierbaren Funktion, die fast eine Deltadistribution ist. Diese Funktion ist fast überall 0, außer in einer kleinen Umgebung um 0. Das Integral ist 1.

$$f * g_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)g_\varepsilon(x-y)\,dy \approx f(x)$$

   Das ergibt $(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x) - f * g_\varepsilon(x)|^p\,dx)^{1/p}$.

2. Im zweiten Schritt zeigen wir, dass die trigonometrischen Polynome dicht in der L_p-Norm liegen (siehe Satz von Stone-Weierstrass).

Damit können wir nun den Satz recht schnell beweisen:

1. Schritt $f(x) = \sum_{j=-N}^{N} c_j e^{-ijx}$. Wir wissen $c_j = \hat{f}(j) \Rightarrow \hat{f}(k) = 0$ für $|k| > N$.

2. Schritt Sei $f \in L_1(\mathbb{T})$ und $\varepsilon > 0$. Wähle ein trigonometrisches Polynom $P(x) = \sum_{j=-N}^{N} c_j e^{ijx}$ mit $\|f - P|L_1\| < \varepsilon$. Nach dem Satz 1.2.1 folgt: $\widehat{f+g}(k) = \hat{f}(k) + \hat{g}(k)$. Weiter ist $|\hat{f}(k)| = |\widehat{f-P}(k) + \hat{P}(k)| \leq |\widehat{f-P}(k)| + |\hat{P}(k)| \leq \|f - P|L_1\| + |\hat{P}(k)| \leq \|f - P|L_1\| < \varepsilon$ für $|k| > N$. ∎

Satz 1.2.4
Ist $f \in C^k(\mathbb{T})$, dann gilt

$$|\hat{f}(j)| \leq \frac{c}{(1+|j|)^k}$$

mit c unabhängig von j.

Beweis:
Betrachten $j \neq 0$. Wir haben:

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(j)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ijx}\, dx \right| = \left| \frac{1}{2\pi i j} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-ijx}\, dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{ij} \widehat{f'}(j) \right| = \cdots = \left| \frac{1}{(ij)^k} \widehat{f^{(k)}}(j) \right| \\
&\leq \frac{1}{|j|^k} \| f^{(k)} | L_1 \| \leq \frac{c}{(1+|j|)^k}
\end{aligned}$$

Die Randterme oben verschwinden, da es sich um 2π-periodische Funktionen handelt. ∎

Bemerkung
Je glatter also die Funktion f, desto schneller konvergieren die Fourierkoeffizienten gegen 0. Es gibt auch „Umkehrungen" des obigen Satzes.

1.3. Summierbarkeit von Fourierreihen

Sei $f \in L_1(\mathbb{T}), c_j = \hat{f}(j) = {}^1\!/_{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ijx}\, dx$. Dann ist $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}(j) e^{ijx}$ die formale Fourierreihe. Die Partialsummen haben die Darstellung:

$$S_N f(x) = \sum_{j=-N}^{N} \hat{f}(j) e^{ijx}$$

Die Fourierreihe konvergiert gegen f im Punkt x, falls gilt

$$S_N f(x) \xrightarrow{N \to \infty} f(x)$$

Zum Studium der Konvergenz ist es günstig, eine **Integraldarstellung** für $S_N f(x)$ zu finden:

$$\begin{aligned}
S_N f(x) &= \sum_{j=-N}^{N} \hat{f}(j) e^{ijx} = \sum_{j=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-ijy}\, dy e^{ijx} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=-N}^{N} e^{ij(x-y)} f(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(x-y) f(y)\, dy
\end{aligned}$$

Dabei ist $D_N(x) = \sum_{j=-N}^{N} e^{ijx}$ der **Dirichletkern** und wir versuchen durch geschicktes Umstellen eine explizite Darstellung zu gewinnen:

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \sum_{j=-N}^{N} e^{ijx} = e^{-iNx} \sum_{j=0}^{2N} e^{ijx} \\ &= e^{-iNx} \frac{e^{i(2N+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{i(N+1/2)x} - e^{-i(N+1/2)x}}{e^{i1/2x} - e^{-i1/2x}} \frac{2i}{2i} = \frac{\sin(N+1/2)x}{\sin x/2} \end{aligned}$$

Satz 1.3.1
Die Partialsummen der Fourierreihen von $f \in L_1(\mathbb{T})$ lassen sich darstellen als

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(x-y) f(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(y) f(x-y)\, dy$$

mit dem Dirichletkern

$$D_N(x) = \frac{\sin(N+1/2)x}{\sin x/2}$$

Bemerkung
Der Dirichletkern ist fundamental für das Studium der Konvergenz von Fourierreihen.

Beispiel
Sei $f(x) = 1$. Dann ist $\hat{f}(j) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} e^{-ijx}\, dx = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ 0 & j \neq 0 \end{cases}$. Weiter gilt $S_N f(x) = 1 = 1/2\pi \int_0^{2\pi} D_N(x-y)\, dy = 1/2\pi \int_0^{2\pi} D_N(y)\, dy$.

Satz 1.3.2
Sei $f \in L_1(\mathbb{T})$ und f differenzierbar in x. Dann gilt:

$$S_N f(x) \to f(x)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} |S_N f(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(y) f(x-y)\, dy - f(x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(y)(f(x-y) - f(x))\, dy \right| \end{aligned}$$

Wir betrachten $x = 0$ und integrieren von $-\pi$ bis π:

$$\begin{aligned}
|S_N f(0) - f(0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y)(f(y) - f(0))\, dy \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\varepsilon} D_N(y)(f(y) - f(0))\, dy \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} D_N(y)(f(y) - f(0))\, dy \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} D_N(y)(f(y) - f(0))\, dy \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\varepsilon} D_N(y)(f(y) - f(0))\, dy \right| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\varepsilon} \frac{\sin(N + 1/2)y}{\sin y/2} (f(y) - f(0))\, dy \right| \\
&= \Bigg| \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\varepsilon} \sin Ny \frac{\cos y/2}{\sin y/2} (f(y) - f(0))\, dy}_{I_{a1}} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\varepsilon} \cos Ny (f(y) - f(0))\, dy}_{I_{a2}} \Bigg| \\
&\leq I_{a1} + I_{a2}
\end{aligned}$$

$$I_{a1} = \left| \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{-\varepsilon} (e^{iNy} - e^{-iNy}) \frac{\cos y/2}{\sin y/2} (f(y) - f(0))\, dy \right| = \left| \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{iNy} - e^{-iNy}) g(y)\, dy \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\text{mit } g(y) = \frac{\cos y/2}{\sin y/2}(f(y) - f(0))1_{[-\pi,-\varepsilon)}(y) \\
&\leq \frac{1}{2}\Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{iNy}\,dy\Big| + \frac{1}{2}\Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iNy}g(y)\,dy\Big| \\
&= \frac{1}{2}|\hat{g}(N)| + \frac{1}{2}|\hat{g}(-N)| \\
&\Rightarrow \hat{g}(N), \hat{g}(-N) \to 0 \text{ mit } N \to \infty \\
&\Rightarrow I_{a1} \xrightarrow{N\to\infty} 0 \Rightarrow I_a, I_b \xrightarrow{N\to\infty} 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} D_N(y)(f(y)-f(0))\,dy\Big| &= \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} D_N(y)(f(y)-f(0))\,dy\Big| \\
&\quad f \text{ ist differenzierbar in } 0 \\
&\quad \Rightarrow |f(y) - f(0)| \leq G|y| \text{ für } |y| \leq \varepsilon
\end{aligned}
$$

Nun kann man analog zu der anderen Funktion schliessen, dass diese auch gegen 0 geht für $N \to \infty$. Damit folgt, $|S_N f(0) - f(0)| \to 0$ für $N \to \infty$. ∎

Bemerkung
Vergleiche auch mit Taylorreihen.

Folgerung
Ist f eine differenzierbare Funktion, so konvergiert die Fourierreihe von f gegen f in jedem Punkt.

Bemerkung

1. Wir haben mehrmals den folgenden Fakt verwendet: Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar, so gilt $\lim_{j\to\infty} \int_a^b f(t)\sin jt\,dt = \lim_{j\to\infty} \int_a^b f(t)\cos jt\,dt = 0$.
2. Analog folgt das **Lokalisationsprinzip** von Riemann: Das Verstehen der Fourierreihe der Funktion f in einem Punkt x hängt ausschließlich von den Werten von f in einem beliebig kleinen Intervall um x ab.
3. Ebenso beweist man das etwas allgemeinere **Kriterium von Dini**: Sei f eine Funktion, die in x_0 sowohl einen links- wie auch rechtsseitigen Grenzwert hat:
$$f(x_0 + 0) = \lim_{h\downarrow 0} f(x_0 + h) \text{ existiert}$$
$$f(x_0 - 0) = \lim_{h\downarrow 0} f(x_0 - h) \text{ existiert}$$
Setze $S_0 = 1/2(f(x_0+0) + f(x_0-0))$ und $\varphi(h) = f(x_0+h) + f(x_0-h) + 2S_0$. Falls für ein $h > 0$ das Integral
$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t}\,dt$$
existiert, so konvergiert die Fourierreihe von f im Punkt x_0 gegen f.

1.4. Summationsmethoden für Fourierreihen

Es gibt die drei Summationsverfahren:

1. Partialsummen: $S_N = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$
2. Cesàro-Mittel: $S = \lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k$ (arithmetisches Mittel der Partialsummen)
3. Abel-Summation: $S = \lim_{r \uparrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k r^k$

Mittels der Methoden kann man gewissen divergenten Reihen auf sinnvolle Art die Summe zuordnen.

Die Methoden aus dem vorigen Kapitel reichen für die „meisten“ praktisch auftretenden Funktionen aus, z. B. für stückweise differenzierbare Funktionen. Manchmal möchte man aber ganze Räume von Funktionen betrachten.

Satz 1.4.1 (Carleson-Hunt-Theorem)
Die Fourierreihe einer Funktion $f \in L_p(\mathbb{T})$ für $1 < p < \infty$ konvergiert fast überall gegen die Funktion f.

Bemerkung
Das Carleson-Hunt-Theorem ist immer noch eines der am schwierigsten zu beweisenden Resultate der Analysis. Der Beweis wird daher hier auch nicht erbracht.

1.4.1. Fourier-Multiplikator

Definition (Fourier-Multiplikator)
Der **Fourier-Multiplikator** ist definiert durch $M_\lambda \colon f \to \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_j \hat{f}(j) e^{ijx}$ und stellt einen linearen Operator dar. Es wird der Fourierkoeffizient einer Funktion mit der angegebenen Funktion multipliziert. Daher resultiert der Name.

Bemerkung
Als Fourier-Multiplikator gehen einfache Funktionen, wie Dilatation oder Translation, aber auch Faltungen, Hilbert-Transformationen und ähnliches.

Man kann sagen, dass jeder translationsinvariante Operator auf einer Gruppe (mit leichten Einschränkungen) als Fourier-Multiplikator geschrieben werden kann.

Der Fourier-Multiplikator zu S_N ist $\lambda_j = \begin{cases} 1 & |j| \leq N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Der scharfe Knick bei $-N, N$ schafft Probleme bei der Konvergenz. Die Summierbarkeitmethoden beheben diesen Effekt.

1.4.2. Fejér-Summation

Diese ist eine Anwendung der CESÀRO-Summationsmethode. Wir bilden dazu das $(N+1)$-te CESÀRO-Mittel der Fourierreihe:

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} S_j f(x)$$

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=-j}^{j} \hat{f}(k) e^{ikt} = \sum_{k=-N}^{N} \frac{N+1-|k|}{N+1} \hat{f}(k) e^{ikt}$$

Der Fourier-Multiplikator ist:

$$\lambda_j = \begin{cases} \frac{N+1-|k|}{N+1} & |j| \leq N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der FEJÉR-Kern ist:

$$\begin{aligned} K_N(x) &= \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} D_j(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} \frac{\sin(j + {}^1\!/_2)x}{\sin {}^x\!/_2} \\ &= \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} \frac{\cos jx - \cos(j+1)x}{2\sin^2 {}^x\!/_2} = \frac{1}{N+1} \frac{1 - \cos(N+1)x}{2\sin^2 {}^x\!/_2} \\ &= \frac{1}{N+1} \frac{1 - \cos^2 \frac{N+1}{2}x + \sin^2 \frac{N+1}{2}x}{2\sin^2 {}^x\!/_2} \\ &= \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2 \frac{N+1}{2}x}{\sin^2 {}^x\!/_2} = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin \frac{N+1}{2}x}{\sin {}^x\!/_2} \right)^2 \end{aligned}$$

Satz 1.4.2
Die FEJÉRschen Summen der Fourierreihen lassen sich darstellen als

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_N(x-y) f(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_N(y) f(x-y)\, dy$$

mit dem FEJÉR-Kern

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin \frac{N+1}{2}x}{\sin {}^x\!/_2} \right)^2$$

Bevor wir nun herausarbeiten, dass der FEJÉR-Kern nützlicher als der Dirichletkern ist, wollen wir ein zweite Summationsmethode einführen.

1.4.3. Poissonsummation

Diese entspricht der Abelschen Summationsmethode:

$$\pi_r f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|} \hat{f}(j) e^{ijx}$$

Der Fourier-Multiplikator ist:

$$\lambda_j = r^{|j|}$$

Der Poissonkern ist:

$$\begin{aligned} P_r(x) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|} e^{ijx} = \sum_{j=0}^{\infty} ((re^{ix})^j + (re^{-ix})^j) - 1 \\ &= \frac{1}{1-re^{ix}} + \frac{1}{1-re^{-ix}} - 1 = \frac{2-r(e^{ix}-e^{-ix})}{|1-re^{ix}|^2} - 1 \\ &= \frac{2-2r\cos x}{1-2r\cos x + r^2} - 1 = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} \end{aligned}$$

Satz 1.4.3
Die Poissonschen Summen lassen sich darstellen als:

$$\pi_r f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(x-y) f(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(x) f(x-y)\, dy$$

mit dem Poissonkern

$$\pi_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}$$

Im Zusammenhang mit der Konvergenz von Fourierreihen betrachten wir asymptotische Eigenschaften solcher Kerne K_N für $N \to \infty$.

Definition (Standardfamilie)
Eine Familie von Summationskernen k_N heißt **Standardfamilie**, falls folgende drei Eigenschaften gelten:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_N(x)\, dx = 1 \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |k_N(x)\, dx| = \|k_N\|_1 \leq G \tag{1.2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \lim_{N\to\infty} k_N(x) = 0 \text{ gleichmäßig für } \varepsilon \leq |x| \leq \pi \tag{1.3}$$

Bemerkung

1. Ist k_N positiv, so impliziert die erste Eigenschaft in der Definition auch die zweite mit $G = 1$.

2. Die Familie der Dirichletkerne erfüllt die zweite Eigenschaft nicht

Satz 1.4.4
Die Familien der Fejér-Kerne (K_N) und der Poissonkerne (P_r) sind Standardfamilien von Summationskernen.

Beweis:
Da beide positiv sind, genügt es, die Eigenschaft 1 und 3 zu zeigen. ■

Satz 1.4.5
Sei k_N eine Standardfamilie von Kernen, $f \in C(\mathit{\Pi})$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_N(y) f(x-y)\,dy \xrightarrow{N\to\infty} f(x)$$

gleichmäßig für alle $x \in \mathit{\Pi}$.

Beweis:
Wir wissen $f \in C(\mathit{\Pi})$ ist gleichmäßig stetig, d. h. $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon |f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$ für $|y| < \delta$. Wir müssen nun den Betrag des Integrals abschätzen:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_N(y) f(x-y)\,dy - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_N(y)(f(x-y) - f(x))\,dy\right| \\ &\le {}^1\!/\!_{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |k_N(y)||f(x-y) - f(x)|\,dy \\ &= {}^1\!/\!_{2\pi}\int_{\{|y|<\delta\}} \ldots + {}^1\!/\!_{2\pi}\int_{\{|y|>\delta\}} \ldots\end{aligned}$$

für das Teilintegral 1:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\{|y|<\delta\}} |k_N(y)||f(x-y) - f(x)|\,dy \le \frac{1}{2\pi}\int_{\{|y|<\delta\}} |k_N(y)|\varepsilon\,dy \le G\varepsilon$$

für das Teilintegral 2:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\{|y|>\delta\}} |k_N(y)||f(x-y)-f(x)|\,dy \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\{|y|<\delta\}} |k_N(y)| 2\max_{z\in\Pi}|f(z)|\,dy$$
$$\leq \varepsilon \text{ für } N \geq N_0(\delta) = N_0(\varepsilon) \qquad \blacksquare$$

Folgerung
Für $f \in C(\Pi)$ konvergieren die Fejér-Summen und die Poisson-Summen gleichmäßig gegen f.

Satz 1.4.6
Sei $1 \leq p < \infty$ und (k_N) eine Standardfamilie von Kernen. Weiterhin sei $f \in L_p(\Pi)$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} k_N(y)f(.-y)\,dy \xrightarrow{N\to\infty} f(.)$$
$$k_N * f \xrightarrow{L_p} f$$

d. h. $\|{}^1/_{2\pi}\int_0^{2\pi} k_N(y)f(.-y)\,dy - f(.)|L_p\| \to 0$.

Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$ fest und machen die folgende Vorbetrachtung: Es existiert ein $\delta > 0$ mit $\|f(.-y)-f(.)|L_p\| < \varepsilon$ für $|y| < \delta$.

1. Sei f stetig. Dann ist die Funktion auch gleichmäßig stetig, d. h. $|f(x-y)-f(x)| < \varepsilon$, falls $|y| < \delta$. Denn wir betrachten sie auf einem kompakten Intervall:

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(x-y)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = \|f(x-y)-f(y)\|_p < \varepsilon$$

2. Sei $f \in L_p, C(\Pi)$ dicht in $L_p(\Pi)$. Es existiert also ein $g \in C(\Pi)$ mit $\|f-g|L_p\| < \varepsilon$.

$$\|f(.-y)-f(.)|L_p\| \leq \underbrace{\|f(.-y)-g(.-y)\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|g(.-y)-g(.)\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|g(.)-f(.)\|}_{<\varepsilon}$$
$$< 3\varepsilon$$

Dies können wir nun nutzen und kommen zu folgendem Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)-k_N*f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k_N(y)f(x-y)\,dy\right|^p dx\right)^{1/p}\\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k_N(y)f(x-y)\,dy-f(x)\right|^p dx\right)^{1/p}\\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k_N(y)(f(x-y)-f(x))\,dy\right|^p dx\right)^{1/p}\\
&\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|k_N(y)||f(x-y)-f(x)|\,dy\right)^p dx\right)^{1/p}\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|k_N(y)|^p|f(x-y)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|k_N(y)|\underbrace{\|f(.-y)-f(.)|L_p\|\,dy}_{<\varepsilon \text{ für } |y|<\delta}
\end{aligned}$$

Für die letzte Ungleichung wurde die Minkowskische Ungleichung benutzt. Weiter muss das Integral wie im Beweis von Satz 1.4.5 aufgeteilt werden. Damit ist der Satz bewiesen.∎

Folgerung
Für $f \in L_p(\Pi)$ und $1 \leq p < \infty$ konvergieren die Fejér-Summen $\delta_N f = F_N * f$ für $N \to \infty$ und die Poisson-Summen $\pi_r f = P_r * f$ für $r \to 1$ in L_p gegen f.

1.5. Normkonvergenz von Partialsummen in L_2

Man stellt sich die allgemeine Frage: Wenn $1 \leq p \leq \infty, f \in L_p(\mathbb{T})$, folgt dann $S_N f \xrightarrow{L_p} f$, d. h. $\|S_N f - f|L_p\| \to 0$?. Die Antwort lautet, ja für $1 < p < \infty$ und nein für $p = 1, \infty$.

Jetzt betrachten wir den Hilbertraum $p = 2, L_2(\mathbb{T})$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$. Das Skalarprodukt macht $L_2(\mathbb{T})$ zu einem Hilbertraum, d. h. man hat Vollständigkeit. Das System $(e_j)_{j=-\infty}^{\infty}$ mit $e_j(x) = e^{ijx}$ ist in $L_2(\mathbb{T})$ ein vollständiges Orthonormalsystem. Insbesondere heißt das, $\langle e_j, e_k\rangle = \begin{cases}1 & j=k\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$. Für die Vollständigkeit muss man zeigen, wenn $\langle f, e_j\rangle = 0$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ ist, folgt, $f = 0$. Für $\langle f, e_j\rangle = 0 \Rightarrow \langle f, p\rangle = 0$ für alle trigonometrischen Polynome. Diese sind aber dicht in $C(\mathbb{T})$. Damit folgt weiter $\langle f,g\rangle = 0$ für alle $g \in C(\mathbb{T})$. Aber es gilt weiter, $C(\mathbb{T})$ dicht in L_p, also insbesondere auch in $L_2(\mathbb{T}) \Rightarrow \langle f,g\rangle = 0$ für alle g$\in L_2(\mathbb{T}) \Rightarrow \|f\|^2 = \langle f,f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0$.

Die Fourierkoeffizienten sind $\hat{f}(j) = \langle f, e_j\rangle$.

Folgerung

- **Bessel-Ungleichung**: Sei $f \in L_2(\mathbb{T})$. Dann gilt:

$$\sum_{j=-N}^{N} |\hat{f}(j)|^2 \leq \|f|L_2(\mathbb{T})\|^2$$

Beweis:
Sei H ein Hilbertraum und $e_1, \ldots, e_N$ orthonormal. Dann gilt $\sum_{j=1}^{N} |\langle x, e_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.
Wir müssen betrachten:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\| x - \sum_{j=1}^{N} \langle x, e_j\rangle \right\|^2 = \left\langle x - \sum_{j=1}^{N}\langle x, e_j\rangle e_j, x - \sum_{j=1}^{N}\langle x, e_j\rangle e_j \right\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \left\langle x, \sum_{j=1}^{N}\langle x, e_j\rangle e_j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \sum_{j=1}^{N}\langle x, e_j\rangle e_j, x \right\rangle + \left\langle \sum_{j=1}^{N}\langle x, e_j\rangle e_j, \sum_{j=1}^{N}\langle x, e_j\rangle e_j \right\rangle \\
&= \|x\|^2 - 2\sum_{j=1}^{N}\langle x, e_j\rangle \overline{\langle x, e_j\rangle} + \sum_{j=1}^{N}\langle x, e_j\rangle \overline{\langle x, e_j\rangle} \\
&= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{N}|\langle x, e_j\rangle|^2 \Rightarrow \sum_{j=1}^{N}|\langle x, e_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2
\end{aligned}$$

■

- **Satz von Riesz-Fischer** Sei $(a_j)_{j=-\infty}^{\infty}$ mit $a_j \in \mathbb{C}$ eine quadratsummierbare Folge komplexer Zahlen, d. h. $\sum_{j=-\infty}^{\infty}|a_j|^2 < \infty$. Dann ist die Reihe

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e_j(x) = \sum a_j e^{ijx}$$

konvergent in $L_2(\mathbb{T})$ und definiert eine Funktion $f \in L_2$ mit $\hat{f}(j) = a_j$ für $j \in \mathbb{Z}$.

- **Parseval-Gleichung**: Sei $f \in L_2(\mathbb{T})$. Dann ist $(\hat{f}(j))$ quadratsummierbar und

$$\|f|L_2\|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(j)|^2 \tag{1.4}$$

Bemerkung
Die PARSEVALsche Gleichung gilt nur für vollständige Orthonormalsysteme in einem (separablem) Hilbertraum.

Satz 1.5.1
Sei $f \in L_2(\mathbb{T})$. Dann gilt

$$S_N f \xrightarrow{N \to \infty} f$$

BEWEIS:
Sei $f \in L_2(\mathbb{T})$. Dann folgt aus der Parsevalschen Gleichung $(\hat{f}(j))_{j \in \mathbb{Z}}$ ist quadratsummierbar. Weiter folgt aus dem Satz von Riesz-Fischer, $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}(j) e_j = f$. Das bedeutet aber gerade Konvergenz der Partialsummen in L_2:

$$\underbrace{\sum_{j=-N}^{N} \hat{f}(j) e_j}_{=S_N f} \xrightarrow{N \to \infty} f \qquad \blacksquare$$

Bemerkung
Sei (e_j) eine Orthonormalbasis in einem Hilbertraum H. Dann gilt für $f \in H$:

$$\sum_{j=1}^{N} \langle f, e_j \rangle e_j \to f$$

2. Anwendungen von Fourierreihen

Im folgenden Kapitel wollen wir drei Anwendungen betrachten:

I *Isoperimetrische Probleme in der Ebene* Die phönizische Prinzessin Dido landete nach einer Flucht an der Küste des heutigen Tunesiens. Dort herrschte Jarbas, der ihr soviel Land versprach, wie sie mit einer Kuhhaut umspannen kann. Dido schnitt die Kuhhaut in dünne Streifen, legte diese aneinander und markierte auf diese Weise an großes Stück Land. So wurde die Stadt Karthago gegründet.

Im Allgemeinen stellt man sich hier die Frage, wie groß der größte Flächeninhalt ist, den eine geschlossene einfache Kurve γ im $\mathbb{R}^2$ umschließen kann.

II *Gleichverteilung von Folgen* Wir bezeichnen mit $\langle x \rangle$ den Rest von x modulo 1 und betrachten dann $\langle \gamma \rangle, \langle 2\gamma \rangle, \langle 3\gamma \rangle$ usw. Für positive $\gamma \notin \mathbb{Q}$ sind $(\langle \gamma \rangle)$ im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilt, d. h.

$$\lim_{N \to \infty} = \frac{\#\{1 \leq n \leq N \colon \langle n\gamma \rangle \in [a, b]\}}{N} = b - a$$

mit $0 \leq a < b \leq 1$. Der Mathematiker Hermann Weyl hat 1916 ein Kriterium zur Prüfung der Gleichverteilung nachgewiesen.

III *Konstruktion von stetigen nirgends differenzierbaren Funktionen*

2.1. Isoperimetrische Ungleichungen

Sei $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ stetig und eine geschlossene Kurve, d. h. $\gamma(a) = \gamma(b)$. Weiterhin sei γ einfach, also $\gamma(s) = \gamma(t)$ nur für $s, t \in \{a, b\}$. Schließlich fordern wir, dass γ differenzierbar ist. Die Bogenlänge der Kurve ist $l = \int_a^b |\gamma'(s)|\, ds$.

Sei nun $\gamma \colon [c, d] \to [a, b]$ eine bijektive C^1-Funktion. Dann lässt sich eine neue Kurve $\eta(s) = \gamma(\varphi(s))$ finden. Die Länge ist unabhängig von der Parametrisierung. Es gibt eine spezielle Parametrisierung nach der Bogenlänge. Diese hat die Eigenschaft, dass $|\gamma'(s)| = 1$ für alle $s \in [0, l]$ gilt. Mit dieser rechnen wir weiter.

Für $\gamma(s) = (x(s), y(s)) \in \mathbb{R}^2$ ist $|\gamma'(s)| = \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2}$ und für die Fläche ergibt sich: $A = 1/2 |\int_\Gamma (x\, dy - y\, dx)| = 1/2 |\int_a^b (x(s)y'(s) - y(s)x'(s))\, ds|$. Wir wollen zeigen, dass $A \leq 1/4\pi l^2$ gilt.

Satz 2.1.1
Ist γ eine einfach geschlossene Kurve der Länge l in $\mathbb{R}^2$, so gilt:

$$A \leq \frac{1}{4\pi} l^2$$

Die Gleicheit gilt genau dann, wenn die γ ein Kreis ist.

Beweis:
Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Parametrisierung durch die Bogenlänge $|\gamma'(s)|^2 = |x'(s)|^2 + |y'(s)|^2 = 1$ und es ergibt sich $a = 0$ sowie $b = l = 2\pi$. Nun ist zu zeigen, dass $A \leq \pi$ und es gilt:

$$A = 1/2 \left| \int_a^b (x(s)y'(s) - y(s)x'(s))\, ds \right| \Leftrightarrow \left| 1/2\pi \int_0^{2\pi} (x(s)y'(s) - y(s)x'(s))\, ds \right| \leq 1$$

Somit haben wir Fourierreihen, denn x und y sind 2π-periodisch.

$$x(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-ins} \qquad y(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{ins}$$
$$x'(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n ine^{-ins} \qquad y'(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n ine^{ins}$$

Durch die Anwendung der Parsevalschen Ungleichung (Gleichung 1.4) erhalten wir:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x'(s))^2\, ds = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 |n|^2$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (y'(s))^2\, ds = \sum_{-\infty}^{\infty} |b_n|^2 |n|^2$$

Insgesamt haben wir somit

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x'(s))^2 + (y'(s))^2\, ds = \sum_{-\infty}^{\infty} |n|^2 (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

Also ist $\hat{}: L_2([0, 2\pi)) \to \ell_2$ ein Isometrie, d. h. das Skalarprodukt wird erhalten: $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)\overline{g(s)}\, ds = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$. Mit den beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s)y'(s)\, ds = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \overline{inb_n}$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x'(s)y(s)\, ds = \sum_{-\infty}^{\infty} \overline{ina_n} b_n$$

kommen wir zur Abschätzung:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(x(s)y'(s)-y(s)x'(s))\,ds\right| &= \left|\sum_{-\infty}^{\infty} a_n\overline{inb_n}-\overline{ina_n}b_n\right| = \left|\sum_{-\infty}^{\infty} in\overline{a_n}b_n - in\overline{b_n}a_n\right| \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty}|n||\overline{a_n}b_n-\overline{b_n}a_n| \leq \sum_{-\infty}^{\infty}|n|2|a_n||b_n| \\ &\leq \sum_{-\infty}^{\infty}|n|(|a_n|^2+|b_n|^2) \leq \sum_{-\infty}^{\infty}|n|^2(|a_n|^2+|b_n|^2) = 1\end{aligned}$$

Im Falle der Gleichheit der Formel im Satz gilt, $|n| > 1$ und damit ist $|n^2| > |n|$. Also sind $|a_n| = |b_n| = 0$. Für die $x(s)$ und $y(s)$ folgt: $x(s) = a_{-1}e^{-is} + a_0 + a_1e^{-is} = a_0 + 2\Re(a_1e^{is})$, da x reell ist und $y(s) = b_0 + 2\Re(b_1e^{is})$. Weiterhin ergibt sich aus $1 = 4|a_1||b_1| = 2(|a_1|^2 + |b_1|^2)$, dass $|a_1| = |b_1| = 1/2$. Somit haben wir $a_1 = 1/2e^{i\alpha}$ und $b_1 = 1/2e^{i\beta}$. Der Fakt, dass $1 = 2|a_1\overline{b_1} - \overline{a_1}b_1| = 2|1/2e^{i\alpha}1/2e^{-i\beta} - 1/2e^{-i\alpha}1/2e^{i\beta}|$ impliziert, dass $|\sin(\alpha-\beta)| = 1$ und somit $\alpha - \beta = \frac{k\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Eingesetzt ergibt sich für $x(s) = a_0 + \cos(\alpha + s)$ und für $y(s) = b_0 \pm \sin(\alpha + s)$. Das Plus oder Minus hängt vom Vorzeichen des k ab. Also ist die Kurve in jedem Fall ein Kreis. ■

2.2. Gleichverteilung von Folgen

Wir bezeichnen mit $\langle x\rangle$ den Rest von x modulo 1. Sei $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann ist $\langle\gamma\rangle := \gamma \bmod 1 = \gamma - [\gamma] \Rightarrow \gamma - \langle\gamma\rangle \in \mathbb{N}$. Unser Ziel ist es, für $\gamma \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ zu zeigen, dass die Folge der $(\langle n\gamma\rangle)$ das Intervall gleichmäßig füllt. Vom Mathematiker Kronecker stammt die Feststellung, das $\{\langle n\gamma\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $[0,1]$ liegen.

Definition
Eine Folge $(x_n)_n \subseteq [0,1]$ heißt **gleichverteilt** im Intervall $[0,1]$, falls für die Intervalle $[a,b] \subseteq [0,1]$ gilt:

$$\frac{1}{N}\#\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq N, x_n \in [a,b]\} \xrightarrow{N\to\infty} b-a$$

Für den Beweis der Hauptaussage benötigen wir zunächst eine Vorbereitung. Dazu dient der folgende Satz:

Satz 2.2.1
Sei f stetig und einperiodisch sowie $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Dann gilt:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) \xrightarrow{N\to\infty} \int\limits_0^1 f(x)dx$$

Beweis:
Der Beweis wird in mehreren Schritten ausgeführt:

1. Schritt Für die Funktion, die identisch 1 ist, ist die Aussage klar.

2. Schritt Nun betrachten wir die Funktion $f(x) = e^{2\pi ikx}$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Für das Integral wissen wir: $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi ik}[e^{2\pi ikx}]_0^1 = 0$. Nun betrachten wir die Summe:

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ik\gamma n} &= \frac{1}{N}\frac{1 - e^{2\pi ik\gamma(N+1)}}{1 - e^{2\pi ik\gamma}} \\ &= \frac{e^{2\pi ik\gamma}}{N}\frac{1 - e^{2\pi ik\gamma N}}{1 - e^{2\pi ik\gamma}} \xrightarrow{N\to\infty} 0\end{aligned}$$

3. Schritt Wenn die Funktionen f und g den Satz erfüllen, dann ist klar, dass auch die Funktion $Af + Bg$ mit $A, B \in \mathbb{C}$ den Satz erfüllt. Somit gilt die Aussage nach dem obigen Schritt für alle trigonometrischen Polynome.

4. Schritt Schließlich sei die Funktion f stetig und einperiodisch. Für ein $\varepsilon > 0$ gibt es ein trigonometrisches Polynom P und für alle s gilt: $|f(s) - P(s)| \leq \varepsilon$. Also haben wir insgesamt:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) - \int_0^1 f(x)\,dx\right| &\leq \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(n\gamma)\right| \\ &\quad + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(n\gamma) - \int_0^1 P(x)\,dx\right| \\ &\quad + \left|\int_0^1 P(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\right| \\ &\leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|f(n\gamma) - P(n\gamma)| + \varepsilon + \int_0^1 |P(x) - f(x)|\,dx \\ &\leq 3\varepsilon\end{aligned}$$

■

Satz 2.2.2 (Satz von Weyl)
Für beliebige $\gamma \notin \mathbb{Q}$ ist $(\langle n\gamma\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichverteilt.

Beweis:
Sei $1_{[a,b]}$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[a, b]$. Die wird einperiodisch auf $\mathbb{R}$

fortgesetzt. Es folgt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\#\{n \in \mathbb{N}\colon 1 \leq n \leq N, x_n \in [a,b]\} &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{[a,b]}(x_n) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{[a,b]}(n\gamma) \\ &\xrightarrow[\text{Satz 2.2.1}]{N\to\infty} \int\limits_0^1 \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,dx = b-a\end{aligned}$$

■

2.3. Stetige und nirgends differenzierbare Funktionen

Satz 2.3.1
Die Funktionen

$$f_\alpha(x) = f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} e^{i2^n x}$$

sind für $0 < \alpha < 1$ stetig, aber nirgends differenzierbar.

Beweis:
Wir nehmen an, dass $f = f_\alpha$ differenzierbar in x_0 ist. Dann ist $|\Delta'_N f(x)| = \mathcal{O}(\log N)$ und es folgt: $|\Delta_{2N} f'(x_0) - \Delta_N f'(x_0)| = 2^{-n\alpha}2^n = 2^{n(1-\alpha)} = (2N)^{1-\alpha}$. Dies steht aber im Widerspruch zu $\Delta'_N f = \mathcal{O}(\log N)$, denn $\mathcal{O}(N^\alpha) > \mathcal{O}(\log N)$. ■

Bemerkung

1. lakunäre Fourierreihen
2. Der Beweis beruht auf drei Summationsmethoden.
   a) Allgemeine Summe: $S_N(g) = g * D_N$
   b) Fejér-Summe: $\sigma_N(g) = g * F_N$
   c) Verschobene Mittelwerte: $\Delta_N(g) = g * (2F_{2N} - F_N)$

Satz 2.3.2
Sei g stetig, 2π-periodisch und differenzierbar in x_0. Dann gilt

$$\begin{aligned}|(\sigma_N g)'(x_0)| &= \mathcal{O}(\log N) \\ |(\Delta_N g)'(x_0)| &= \mathcal{O}(\log N)\end{aligned}$$

Beweis:
Wir wissen, dass $\Delta_N = 2\sigma_{2N} - \sigma_N$ gilt. Daher reicht es, die Aussage für σ_N zu beweisen.

$$(\sigma_N g)(x_0) = (g * F_N)(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x_0 - t)g(t)\,dt$$

$$\begin{aligned}(\sigma_N g)'(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N'(x_0 - t)g(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N'(t)g(x_0 - t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N'(t)(g(x_0 - t) - g(x_0))\,dt\end{aligned}$$

Da $\int_{-\pi}^{\pi} F_N' = 0$ ist F_N eine 2π-periodische Funktion. Weiter ist g differenzierbar in x_0 und es folgt, $|g(x_0 - t) - g(x_0)| \leq C|t|$ für $t \in [-\pi, \pi)$. Insgesamt haben wir dann die Abschätzung $|\sigma_N g'(x_0)| \leq \frac{C}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F_N'(t)||t|\,dt$. Nunmehr sehen wir, dass F_N' die Abschätzungen $|F_N'(t)| \leq AN^2$ und $|F_N'(t)| \leq \frac{A}{|t|^2}$ erfüllt. Da F_N ein trigonometrisches Polynom vom Grad N mit durch 1 beschränkten Koeffizienten ist, folgt, dass F_N' vom Grad N mit maximalen Koeffizienten N ist. Daher folgt: $|F_N'(t)| \leq (2N+1)N \leq AN^2$. Für die zweite Abschätzung müssen wir uns die explizite Darstellung des Fejér-Kerns in Erinnerung rufen und diese differenzieren:

$$F_N'(t) = \frac{\sin(Nt/2)\cos(Nt/2)}{\sin^2(t/2)} - \frac{1}{N}\frac{\cos(t/2)\sin^2(Nt/2)}{\sin^3(t/2)}$$

Die Abschätzung erhalten wir unter Berücksichtigung von $|\sin(Nt/2)| \leq CN|t|$ und $|\sin(t/2)| \geq c|t|$. Insgesamt ist dann:

$$\begin{aligned}|\sigma_N(g)'(x_0)| &\leq C\int_{|t|\geq 1/N} |F_N'(t)||t|\,dt + C\int_{|t|\leq 1/N} +|F_N'(t)||t|\,dt \\ &\leq CA\int_{|t|\geq 1/N}\frac{dt}{|t|^2} + CAN\int_{|t|\leq 1/N} dt = \mathcal{O}(\log N) + \mathcal{O}(1) \\ &= \mathcal{O}(\log N)\end{aligned}$$

■

Satz 2.3.3
Für $f = f_\alpha$ und $2N = 2^n$ gilt:

$$\Delta_{2N} f - \Delta_N f = 2^{-n\alpha}e^{i2^n x}$$

Beweis:
Der Beweis ergibt sich aus den Tatsachen $f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha}e^{i2^n x}$ und $S_N = \Delta_N, S_{2N} = \Delta_{2N}$ sowie der Bemerkung zu Beginn des Abschnitts. ■

Bemerkung

1. Die Funktion f ist komplexwertig. Eine einfache Modifizierung liefert, dass die Summen $\sum 2^{-n\alpha}\cos(2^n x)$ und $\sum 2^{-n\alpha}\sin(2^n x)$ nirgends differenzierbar sind.
2. Für $\alpha > 1$ folgt, dass $f_\alpha, \sum \cdots \cos(2^n x), \sum \cdots \sin(2^n x)$ einmal stetig differenzierbar sind. Für $\alpha = 1$ sind sie nirgends differenzierbar.

3. Die Fouriertransformation auf $\mathbb{R}^n$

Das geht parallel zu der Entwicklung von Fourierreihen. Das soll dann die weitere Verallgemeinerung auf die abstrakte harmonische Analysis vorbereiten.

Seien $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ aus $\mathbb{R}^n$. Das Produkt von x und ξ definieren wir durch $x\xi = \sum_{i=1}^n x_i\xi_i$ und der Betrag ist definiert durch $|x| = \sqrt{xx} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

3.1. Definition und grundlegende Eigenschaften

Die Gruppe $(\mathbb{R}^n, +)$ ist lokalkompakt und abelsch. Die Kommutativität ist aus anderen Vorlesungen bekannt, genau wie die allgemeinen Gruppeneigenschaften. Lokalkompaktheit bedeutet, dass $\mathbb{R}^n$ ein Hausdorff-Raum ist und jedes Element bezüglich der Topologie eine kompakte Umgebung besitzt. Ein Hausdorff-Raum heißt lokalkompakt, wenn es zu jedem Punkt eine offene Umgebung gibt, deren Abschluss kompakt ist bzw. wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.

Wir wollen nun die Charaktere der Gruppe bestimmen. Charaktere sind stetige Homomorphismen $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, d. h. $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$, wie wir bereits in der ersten Definition in Abschnitt 1.2 gesehen haben. Wir setzen:

$$\varphi(0, \dots, 0, x_k, 0, \dots, 0) =: \varphi_k(x) \Rightarrow \varphi_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^* \text{ stetig}$$

Damit lässt sich die Funktion auch schreiben als:

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, \dots, x_n) &= \varphi((x_1, 0, \dots) + \dots + (0, \dots, 0, x_n)) \\ &= \varphi(x_1, 0, \dots, 0)\varphi(0, x_2, 0, \dots, 0)\dots\varphi(0, \dots, 0, x_n) \\ &= \varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2) \cdot \ldots \cdot \varphi_n(x_n)\end{aligned}$$

Dies ist eine Analogie zu den Fourierreihen: $\varphi_k(x_k) = e^{irx_k}$ mit einem $r \in \mathbb{R}$. Damit ist jedes φ_k dieser Form ein Charakter auf $\mathbb{R}$. Wir setzen $r =: \xi_k$. Dann ist $\varphi_k(x_k) = e^{ix_k\xi_k}$ und es folgt:

$$\varphi(x) = \prod_{k=1}^n \varphi_k(x_k) = \prod_{k=1}^n e^{ix_k\xi_k} = \exp\left(i\sum_{k=1}^n x_k\xi_k\right) = e^{ix\xi}$$

Satz 3.1.1
Die Charaktere auf $\mathbb{R}^n$ sind gegeben durch die Funktionen $e_\xi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}$ mit $e_\xi(x) = e^{ix\xi}$ mit $\xi \in \mathbb{R}^n$. Die duale Gruppe von $\mathbb{R}^n$ ist isomorph zu $(\mathbb{R}^n, +)$.

Wir werfen zur Wiederholung einen Blick auf die Fourierreihen: Das ist eine Abbildung $\hat{}\colon L_1(\mathbb{T}) \to \ell_\infty(\mathbb{Z})$ mit $\ell_\infty(\mathbb{Z}) = \{\alpha = (\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}}\colon \|\alpha\|_\infty = \sup|\alpha_j| < \infty\}$. Es ist $f \mapsto (\hat{f}(j))_{j\in\mathbb{Z}}$. Das soll nun eine Fouriertransformation werden: Wir sollten daher einem ξ ein $\hat{f}(\xi)$ für $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ zuordnen:

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi}\, dx$$

Das liefert eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$, die wir als **Fouriertransformierte** von f bezeichnen. Manchmal verwenden wir auch die Bezeichnung: $\mathfrak{F}f = \hat{f}$.

Satz 3.1.2
Die Fouriertransformation ist ein beschränkter linearer Operator von $L_1(\mathbb{R}^n) \to L_\infty(\mathbb{R}^n)$, genauer:

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| \le (2\pi)^{-n/2} \|f|L_1\|$$

Beweis:
Anwendung der Dreiecksungleichung für Integrale, siehe auch Satz 1.2.2 ■

Satz 3.1.3
Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ differenzierbar in der j-ten Komponente, d. h. die j-te partielle Ableitung existiert und weiter $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$\widehat{\frac{\partial}{\partial x_j} f}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)$$

Beweis:
Vorbetrachtung: $C^k(\mathbb{R}^n)$ sind die k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ und $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sind die beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Weiterhin sind $C_c^k(\mathbb{R}^n)$ und $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ die entsprechenden Funktionen mit kompaktem Träger. Die erste Frage ist, ob es solche Funktionen überhaupt gibt. Eine spezielle Funktion kann man folgendermaßen konstruieren:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \varphi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$$

Funktion zeichnen

Diese Funktion hat noch keinen kompakten Träger. Aber wir bilden nun $\psi(x) = \varphi(x+1)\varphi(1-x)$. Diese Funktion ist sogar aus $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Es gilt $\psi_n(x) = \psi(x_1)\dots\psi(x_n)$ und es ist $\psi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Es gilt, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $L_p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \le p < \infty$. Genauer: Ist $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ und existieren die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ für eine endliche Menge von Multiindizies[1] $\alpha \in A$. Dann

[1] $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\frac{\partial^{28939} f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ mit $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

existiert eine Folge $g_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $g_k \xrightarrow{L_p} f$ und $\frac{\partial g_k}{\partial x^\alpha} \to \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ für $\alpha \in A$. Beweisidee: Für $a > 0$ betrachten wir $\psi_{n,a}(x) = \frac{1}{a^n}\psi_n(\frac{x}{a})$ mit $\psi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_n \, dx = 1$. Wenn wir $g_a = f * \psi_{n,a}$ bilden, dann bekommen wir für $a \to 0$ die gewünschte Folge. Genauer findet man den Beweis in [3].

Mit den Erkenntnissen können wir den obigen Satz nun beweisen:

1. Schritt Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt mit $c = (2\pi)^{-n/2}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) &= c \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-ix\xi} \, dx \\
&= c \int\limits_{\mathbb{R}} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \exp\left(-i \sum_{k=1}^n \xi_k x_k \right) dx_j \right) dx_1 \dots dx_n \text{ ohne } dx_j \\
&= c \int \cdots \int \left(- \int f(x) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(e^{-ix\xi})}_{-i\xi_j e^{-ix\xi}} \, dx_j \right) dx_1 \dots dx_n \text{ ohne } dx_j \\
&= i\xi_j \hat{f}(\xi)
\end{aligned}$$

Die Randterme bei plus und minus unendlich in der vorletzten Gleichung verschwinden, da die Funktionen kompakten Träger haben.

2. Schritt Wir brauchen eine Folge $g_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $g_k \xrightarrow{L_1} f$, $\frac{\partial g_k}{\partial x_j} \to \frac{\partial f}{\partial x_j}$. Wir wissen:

$$\widehat{\frac{\partial g_k}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j \hat{g_k}(\xi)$$

$$\begin{aligned}
\left| \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) - i\xi_j \hat{f}(\xi) \right| &\leq \left| \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) - \widehat{\frac{\partial g_k}{\partial x_j}}(\xi) \right| + \left| i\xi_j \hat{g_k}(\xi) - i\xi_j \hat{f}(\xi) \right| \\
&= \left| \widehat{\frac{\partial}{\partial x_j}(f - g_k)}(\xi) \right| + |i\xi_j \widehat{(g_k - f)}(\xi)| \\
&\leq^{\text{Satz 3.1.2}} c \| \frac{\partial}{\partial x_j}(f - g_k) | L_1 \| + c|\xi_j| \| f - g_k | L_{-1} \| \xrightarrow{k \to \infty} 0 \\
&\Rightarrow \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) - i\xi_j \hat{f}(\xi) = 0
\end{aligned}$$

■

Satz 3.1.4
Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ mit $x_j f(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\widehat{-ix_j f}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \hat{f}(\xi)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\hat{f}(\xi) &= c\frac{\partial}{\partial \xi_j}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\xi}\,dx = c\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{\partial}{\partial \xi_j}e^{-ix\xi}\,dx \\ &= c\int\limits_{\mathbb{R}^n} -ix_j f(x)e^{-ix\xi}\,dx = \widehat{-ix_j f}(\xi)\end{aligned}$$ ■

Satz 3.1.5 (Satz von Riemann-Lebesgue)
Ist $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt:

$$\lim_{|\xi|\to\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$$

Beweis:

1. Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}|\xi_j^2\hat{f}(\xi)| &=^{\text{Satz 3.1.3}} \left|\widehat{\frac{\partial^2 f}{\partial {x_j}^2}}(\xi)\right| \leq^{\text{Satz 3.1.2}} (2\pi)^{-n/2}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial {x_j}^2}\middle|L_1\right\| \\ &= (2\pi)^{-n/2}C_j|\hat{f}(\xi)| \leq c\|f|L_1\| \leq C \\ \Rightarrow |(1+|\xi|^2)\hat{f}(\xi)| &\leq C + \sum C_j = C' \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow |\hat{f}(\xi)| &\leq \frac{C'}{1+|\xi|^2} \xrightarrow{|\xi|\to\infty} 0\end{aligned}$$

2. Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Wähle $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f-g|L_1\| < \varepsilon$. Damit folgt, $|\hat{f}(\xi)| \leq |\widehat{f-g}(\xi)| + |\hat{g}(\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2}\|f-g|L_1\| + |\hat{g}(\xi)| < (2\pi)^{-n/2}\varepsilon + \varepsilon$ für $|\xi| \geq M(\xi)$ nach dem obigen, ersten Punkt. ■

Bemerkung
Für $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ folgt damit, $|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{c'}{1+|\xi|^k}$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Speziell heißt das für $f \in C^{n+1}(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$, dass das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{1+|\xi|^{n+1}} < \infty$ existiert und $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Also existiert $\hat{\hat{f}}$ mit $\hat{\hat{f}} \in L_1$.

Folgerung
Die Fouriertransformation bildet $L_1(\mathbb{R}^n)$ linear und stetig in den Raum $C_0(\mathbb{R}^n)$ der im unendlichen verschwindenden Funktionen, d. h. $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, ab. Insbesondere ist mit $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ auch $\hat{f}$ gleichmäßig stetig:

$$\hat{}: L_1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$$

Bemerkung
Die Fouriertransformation auf dem Torus, also die Entwicklung der Fourierreihen ist:

$$\begin{aligned}\hat{}: L_1(\mathbb{T}) &\to C_0(\mathbb{Z}) \\ f &\mapsto (\hat{f}(j))_{j=-\infty}^{\infty}\end{aligned}$$

3.2. Invarianz und Symmetrie der Fouriertransformation

Wir betrachten die Invarianz gegenüber Transformationen des $\mathbb{R}^n$:

- Rotationen
- Dilatationen
- Translationen

3.2.1. Rotationen

Die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n)$ ist die Gruppe der orthogonalen $n \times n$-Matrizen. Die Zeilen der reellen Matrix ρ bilden genau dann ein Orthogonalsystem im $\mathbb{R}^n$, wenn $\rho \in \mathrm{O}(n)$ ist. Weiter ist $\mathrm{SO}(n) = \{\rho \in \mathrm{O}(n) \colon \det \rho = 1\}$ die spezielle orthogonale Gruppe. Man bezeichnet $M \in \mathrm{SO}(n)$ als **Rotation**. Es gilt, $\rho^{-1} = \rho^T$.

Satz 3.2.1
Sei $\rho \in \mathrm{O}(n)$. Für $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ definieren wir $\rho f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ durch $(\rho f)(x) = f(\rho(x))$, d. h. $\rho f = f \circ \rho$. Dann gilt:

$$\widehat{\rho f} = \rho \hat{f}$$

Beweis:
Für $\rho \in \mathrm{O}(N)$ gilt $\rho^{-1} = \rho^T$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho f}(\xi) &= c \int (\rho f)(x) e^{-ix\xi}\, dx = c \int f(\rho(x)) e^{-ix\xi}\, dx \\
&= c \int f(y) e^{-i\rho^{-1}(y)\xi}\, dy \quad \text{Substitution} \\
&= c \int f(y) e^{-iy\rho(\xi)}\, dy \quad \rho^T(y)\xi = y\rho(\xi) \text{ und } \rho^{-1} = \rho^T \\
&= \hat{f}(\rho(\xi)) = (\rho \hat{f})(\xi)
\end{aligned}$$

Anmerkung zu $\rho^T(y)\xi = y\rho(\xi)$:

$$\begin{aligned}
\rho &= (\rho_{hk})_{h,k=1}^n & \rho^T &= (\rho_{kh})_{h,k=1}^n \\
\rho(\xi) &= \left(\sum_{k=1}^n \rho_{hk}\xi_k \right)_{h=1}^n & \rho^T y &= (\sum_{k=1}^n \rho_{kh} y_k)_{h=1}^n \\
y\rho(\xi) &= \sum_{h=1}^n y_h \sum_{k=1}^n \rho_{hk}\xi_k = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \rho_{hk} y_h \xi_k \\
\rho^T y \xi &= \sum_{h=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \rho_{kh} y_k \right) \xi_h = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n \rho_{kh} y_k \xi_h
\end{aligned}$$

■

3.2.2. Dilatationen

Für $\delta > 0$ gilt $x \mapsto \delta x$. Dann haben wir $(a_\delta f)(x) := f(\delta x)$ und $(a^\delta f)(x) := \delta^{-n} f(x/\delta)$ für $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Satz 3.2.2
Sei $\delta > 0$ und $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$\widehat{a_\delta f} = a^\delta \hat{f} \qquad\qquad \widehat{a^\delta f} = a_\delta \hat{f}$$

Beweis:
Wir zeigen nur die zweite Behauptung. Die erste folgt analog:

$$\begin{aligned}\widehat{a^\delta f}(\xi) &= c \int (a^\delta f)(x) e^{-ix\xi}\, dx = c \int \delta^{-n} f(x/\delta) e^{-ix\xi}\, dx \\ &= c \int f(x/\delta) e^{-ix/\delta(\delta\xi)}\, dx/\delta = c \int f(y) e^{-iy(\delta\xi)}\, dy \\ &= \hat{f}(\delta\xi) = (a_\delta \hat{f})(\xi)\end{aligned}$$

■

3.2.3. Translationen

Für $a \in \mathbb{R}^n$ ist $(\tau_a f)(x) := f(x-a)$.

Satz 3.2.3
Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\widehat{\tau_a f}(\xi) = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi) \qquad\qquad (\tau_a \hat{f})(\xi) = \widehat{e^{ia} f(.)}(\xi)$$

Beweis:
Wir beweisen wieder nur die zweite Gleichung. Die erste Gleichung verbleibt als Übung.

$$\begin{aligned}(\tau_a \hat{f})(\xi) &= \hat{f}(\xi - a) = c \int f(x) e^{-ix(\xi-a)}\, dx = c \int e^{ixa} f(x) e^{-ix\xi}\, dx \\ &= \widehat{e^{ia} f(.)}(\xi)\end{aligned}$$

■

3.2.4. Symmetrieeigenschaften

Wir definieren, $\tilde{f}(x) := f(-x)$ und $\overline{f}(x) := \overline{f(x)}$ und wollen zeigen, wie die Fouriertransformation hier wirkt.

Satz 3.2.4
Seien $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

1. $\hat{\tilde{f}} = \tilde{\hat{f}}$

2. $\hat{\overline{f}} = \overline{\tilde{\hat{f}}}$

3. $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g = \int_{\mathbb{R}^n} f \hat{g}$

Beweis:

(Erste Behauptung)

$$\hat{\tilde{f}}(\xi) = c \int \tilde{f}(x) e^{-ix\xi}\, dx = c \int f(-x) e^{-ix\xi}\, dx = c \int f(y) e^{iy\xi}\, dy = \hat{f}(-\xi) = \tilde{\hat{f}}(\xi)$$

(Zweite Behauptung)

$$\hat{\overline{f}}(\xi) = c \int \overline{f(x)} e^{-ix\xi}\, dx = \overline{c \int f(x) e^{+ix\xi}\, dx} = \overline{\hat{f}(-\xi)} = \overline{\tilde{\hat{f}}}$$

(Dritte Behauptung)

$$\int \hat{f} g = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} c \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi}\, dx g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} c \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{-ix\xi}\, d\xi f(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(x) f(x)\, dx = \int f \hat{g}$$

■

3.3. Faltung und inverse Fouriertransformation

Frage: Kann man aus den Fourierreihen $\hat{f}$ einer Funktion $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ die Funktion f zurückgewinnen? Ist die Fouriertransformation $\hat{}: L_1 \to C_0$ eine bijektive Abbildung? Vergleiche hierzu die Konvergenz der Fourierreihen!

Wir nutzen zur weiteren Betrachtung als Hilfsmittel die Faltung. Für $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ gilt $f * g = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy$. Weiterhin ergibt der Satz von Fubini, dass $f * g$ fast überall endlich und $f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ist.

Satz 3.3.1
Seien $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \hat{g}$$

Beweis:

$$\widehat{f*g}(\xi) = c\int\limits_{\mathbb{R}^n} f*g(x)e^{-ix\xi}\,dx = c\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy e^{-ix\xi}\,dx$$
$$=^{\text{Fubini}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} c\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)e^{-i(x-y)\xi}\,dx g(y)e^{-iy\xi}\,dy$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(y)e^{-iy\xi}\,dy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)\frac{1}{c} \qquad \blacksquare$$

Definition (Gauss-Weierstraß-Kern)

$$G(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

Satz 3.3.2
Der Gauß-Weierstraß-Kern G ist eine Eigenfunktion der Fouriertransformation, genauer $\hat{G} = G$.
Beweis:
Wegen $G(x) = \prod_{i=1}^n e^{-x_i^2/2}$ genügt es, den eindimensionalen Fall $n = 1$ zu betrachten. Dazu:

$$\frac{\partial \hat{G}}{\partial \xi}(\xi) =^{\text{Satz 3.1.4}} \widehat{-ixG}(\xi) = -ic\int\limits_{-\infty}^{\infty} xG(x)e^{-ix\xi}\,dx$$

Partielle Integration mit $dv = xG(x)\,dx$ und $u = e^{-ix\xi}$ liefert:

$$v = -e^{-x^2/2} = -G(x) \qquad du = -i\xi e^{-ix\xi}$$
$$\frac{\partial \hat{G}}{\partial \xi}(\xi) = +ic\int\limits_{-\infty}^{\infty} v\,du = -c\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x)e^{-ix\xi}\,dx = -\xi\hat{G}(\xi)$$

Also erfüllt $\hat{G}$ die gewöhnliche Differentialgleichung $\hat{G}'(\xi) = -\xi\hat{G}(\xi)$, deren Lösung $\hat{G}(\xi) = \hat{G}(0)e^{-\xi^2/2}$ ist.

Außerdem gilt:

$$\hat{G}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx$$
$$\hat{G}(0)^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dxdy$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-r^2/2}r\,drd\varphi = \int\limits_0^{\infty} re^{-r^2/2}\,dr = \left[-e^{-r^2/2}\right]_0^{\infty} = 1$$

Folglich ist $\hat{G}(0) = 1$ und somit $\hat{G}(\xi) = e^{-\xi^2/2} = G(\xi)$. ■

Satz 3.3.3 (Gauß-Weierstraß-Summation)
Sei $f \in C_c^{n+1}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$f(0) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} e^{-\varepsilon|\xi|^2/2} \, d\xi = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \, d\xi$$

Beweis:
Setze

$$G_\varepsilon(x) = [a^{\sqrt{\varepsilon}}(G)](x) = \varepsilon^{-n/2} e^{-|x|^2/2\varepsilon}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\hat{G}_\varepsilon(\xi) &= \widehat{a^{\sqrt{\varepsilon}} G}(\xi) \overset{\text{Satz 3.2.2}}{=} [a_{\sqrt{\varepsilon}} \hat{G}](\xi) = [a_{\sqrt{\varepsilon}} G](\xi) = G(\sqrt{\xi}\xi) = e^{-\varepsilon|\xi|^2/2} \\
\hat{\hat{G}}_\varepsilon(x) &= \widehat{a_{\sqrt{\varepsilon}} G}(x) \overset{\text{Satz 3.2.2}}{=} a^{\sqrt{\varepsilon}} \hat{G}(x) = a^{\sqrt{\varepsilon}} G(x) = G_\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Sei nun $f \in C_c^{n+1}(\mathbb{R}^n)$. Aus der Bemerkung nach Satz 3.1.5 folgt $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Außerdem ist $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ insbesondere stetig. Der dritte Punkt von Satz 3.2.4 liefert:

$$\int f G_\varepsilon = \int f \hat{\hat{G}}_\varepsilon = \int \hat{f} \hat{G}_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{-\varepsilon|\xi|^2/2} \, d\xi \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \int \hat{f}(\xi) \, d\xi$$

da $e^{-\varepsilon|\xi|^2/2} \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 1$ gleichmäßig auf kompakten Mengen (Lebesgue-majorisierte Konvergenz). Weiter ist

$$\int G_\varepsilon(x) \, dx = \int G_\varepsilon(x) e^{-ix0} \, dx = (2\pi)^{n/2} \hat{G}_\varepsilon(0) = (2\pi)^{n/2}$$

für alle $\varepsilon > 0$. Also ist

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{-n/2} \int f(x) G_\varepsilon(x) \, dx &= (2\pi)^{-n/2} \int f(0) G_\varepsilon(x) \, dx + (2\pi)^{-n/2} \int (f(x) - f(0)) G_\varepsilon(x) \, dx \\
&= f(0) + \underbrace{(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(0)) G_\varepsilon(x) \, dx}_{\xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0 \text{ wegen Stetigkeit von } f} = f(0)
\end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir

$$f(0) = (2\pi)^{-n/2} \int f G_\varepsilon \, dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (2\pi)^{-n/2} \int \hat{f}(\xi) e^{-\varepsilon|\xi|^2/2} \, d\xi = (2\pi)^{-n/2} \int \hat{f}(\xi) \, d\xi \quad ■$$

Man kann also $f(0)$ zurückgewinnen aus $\hat{f}$. Die Translationseigenschaften der Fouriertransformation liefert dann auch $f(x)$.

Satz 3.3.4 (Fourierinversion)
Seien $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und f stetig. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi = \hat{\hat{f}}(-x)$$
$$f = \tilde{\hat{\hat{f}}}$$

Beweis:
Für $f \in C_c^{n+1}(\mathbb{R}^n)$ haben wir:

$$f(x) = (\tau_{-x} f)(0) \overset{\text{Satz 3.3.3}}{=} (2\pi)^{-n/2} \int \widehat{\tau_{-x} f}(\xi)\, d\xi$$
$$\overset{\text{Satz 3.2.3}}{=} (2\pi)^{-n/2} \int \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi = \hat{\hat{f}}(-x)$$

Der allgemeine Fall folgt durch Approximation von $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ mit einer Folge aus $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. ∎

Bemerkung
Sind also $f, \hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, so kann f auf einer Nullmenge so abgeändert werden, dass f stetig wird.

Folgerung 3.3.5
Die Fouriertransformation ist injektiv, d. h. sind $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} = \hat{g}$, dann ist $f = g$ fast überall.
Beweis:

$$\widehat{f-g} = \hat{f} - \hat{g} = 0 \in L_1 \text{ und } f - g \in L_1$$
$$\Rightarrow (\widehat{f-g) * G}_\varepsilon = \widehat{f-g}\hat{G}_\varepsilon = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$
$$\overset{\text{Satz 3.3.4}}{\Rightarrow} (f-g) * G_\varepsilon = 0 \overset{\varepsilon \searrow 0}{\Rightarrow} f - g \overset{L_1}{=} 0$$ ∎

Definition (Inverse Fouriertransformation)
Die **inverse Fouriertransformation** einer Funktion $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ wird durch die Formel

$$\check{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi = \tilde{\hat{f}}(x)$$

bestimmt

Sind also $f, \hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, so haben wir:

$$f = \check{\hat{f}} = \hat{\check{f}}$$

Es gilt aber:

Satz 3.3.6
Die Fouriertransformation $\hat{}: L_1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$ ist *nicht* surjektiv.

3.4. Die Fouriertransformation in $L_p(\mathbb{R}^n)$

Bemerkung
Auf dem Torus haben wir $L_p(\mathbb{T}) \subseteq L_q(\mathbb{T})$ für $1 \leq p \leq q \leq \infty$ betrachtet, $\|f|L_q\| \leq \|f|L_p\|$. Insbesondere gilt, $L_p(\mathbb{T}) \subseteq L_1(\mathbb{T})$ für $p \geq 1$, d. h. die Fourierreihenentwicklung ist wohldefiniert für $f \in L_p$ mit $1 \leq p \leq \infty$. Anders sieht es im $\mathbb{R}^n$ aus. Man hat $L_p(\mathbb{R}^n) \subseteq L_q(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow p = q$. (Übung: Beispiele hierfür finden.)

Das Problem ist, die Fouriertransformation für $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ mit $p > 1$ zu finden.

Wir wählen zunächst den Ansatz: Fouriertransformation definiert für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Diese sind dicht in $L_p(\mathbb{R}^n)$. Es ist $f \in L_p \rightsquigarrow f_j \xrightarrow{L_p} f$ mit $f_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f}_j \overset{?}{\to} \hat{f}$. Das gibt Probleme: Konvergenz in welchem Sinne, in welchem Funktionenraum liegt $\hat{f}$? Der zweite Ansatz ist eine Interpolation mit Hilfe des Riesz-Thorin-Theorems.

Mit der Interpolation kann man die folgende Frage lösen: Man hat einen linearen und beschränkten Operator $T\colon L_1 \to L_1$ und $T\colon L_2 \to L_2$. Folgt daraus $T\colon L_p \to L_p$ linear und beschränkt für $1 < p < 2$? Eine Antwort gibt eine Aussage, die mit allgemeinen Maßräumen arbeitet, das Riesz-Thorin-Theorem.

Satz 3.4.1 (Riesz-Thorin-Theorem)
Sei $(M, \mu), (N, \nu)$ Maßräume, die σ-endlich sind. Weiter sei T ein linearer Operator, der wie folgt definiert ist:

$$T\colon L_{p_0}(M, \mu) \cap L_{p_1}(M, \mu) \to L_{q_0}(N, \nu) \cap L_{q_1}(N, \nu)$$

für gewisse $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ mit $\|Tf|L_{q_i}\| \leq c_i \|f|L_{p_i}\|$ für $i = 0, 1$. Seien p, q gegeben durch:

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\Theta}{p_0} + \frac{\Theta}{p_1} \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\Theta}{q_0} + \frac{\Theta}{q_1}$$

für ein $\Theta \in (0, 1)$. Dann gilt

$$\|Tf|L_q\| \leq C\|f|L_p\| \quad \forall f \text{ mit } C = C_0^{1-\Theta} - C_1^{\Theta}$$

Praktisch heißt das: Ist T ein linearer beschränkter Operator von $L_{p_0}(M, \mu) \to L_{q_0}(N, \nu)$ und $L_{p_1}(M, \mu) \to L_{q_1}(N, \nu)$. Dann ist $T\colon L_p(M, \mu) \to L_q(N, \nu)$ beschränkt.

Beispiel

1. Sei $T\colon L_1 \to L_1$ und $T\colon L_2 \to L_2$ beschränkt linear. Dann ist $p_0 = 1 = q_0$ und $p_1 = 2 = q_1$. Weiter ist $1/p = \frac{1-\Theta}{1} + \frac{\Theta}{2} = 1 - \Theta/2 = 1/q$ mit $p \in (1, 2)$. Das Riesz-Thorin-Theorem liefert $T\colon L_p \to L_p$ beschränkt und $\|T\colon L_p \to L_q\| \leq \|T\colon L_{p_0} \to L_{q_0}\|^{1-\Theta} \times \|T\colon L_{p_1} \to L_{q_1}\|$.

2. Fourierreihen: $\hat{}\colon L_1(\mathbb{T}) \to \ell_\infty(\mathbb{Z})$ folgt aus der Definition. Weiter hatten wir $\hat{}\colon L_2 \to \ell_2(\mathbb{Z})$ (Parsevalsche Gleichung). Somit ist $p_0 = 1, q_0 = \infty, p_1 = 2, q_1 = 2$ und $1/p = \frac{1-\Theta}{1} + \Theta/2 = 1 - \Theta/2$ sowie $1/q = \frac{1-\Theta}{\infty} + \Theta/2 = \Theta/2$. Also gilt $1/p + 1/q = 1 \rightsquigarrow q = p'$ (konjugierter Index zu p). Das Theorem liefert nun, $\hat{}\colon L_p(\mathbb{T}) \to \ell_{p'}(\mathbb{Z})$, d. h.

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(j)^{p'}|\right)^{1/p'} \leq \|f|L_p\| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

Die obige Gleichung heißt **Hausdorff-Young-Ungleichung** für $1 \leq p \leq 2$

3.4.1. Fouriertransformation im Hilbertraum

Für $f, g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ gilt $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f\overline{g} = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx$ und weiter $\|f|L_2\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int \|f\|^2}$. Dann gilt folgender Satz.

Satz 3.4.2
Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\|\hat{f}|L_2\| = \|f|L_2\| \qquad \int |\hat{f}^2| = \int |f|^2$$

Die Gleichung heißt **Plancherel-Gleichung**.

Beweis:
Wir betrachten $g = f * \overline{\tilde{f}} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und es ergibt sich:

$$\hat{g} = (2\pi)^{n/2}\hat{f}\hat{\overline{\tilde{f}}} = (2\pi)^{n/2}\hat{f}\overline{\hat{f}} = (2\pi)^{n/2}|\hat{f}|^2$$

Der Satz von Gauß-Weierstraß liefert nun:

$$\begin{aligned} g(0) &= (2\pi)^{-n/2}\int \hat{g} \\ f * \overline{\tilde{f}}(0) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(-x)\overline{\tilde{f}}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(-x)\overline{f(-x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x)}\,dx \\ &= \int |f|^2 \\ &\Rightarrow \int |\hat{f}|^2 = (2\pi)^{-n/2}\int \hat{g} = g(0) = (f * \overline{\tilde{f}})(0) = \int |f|^2 \end{aligned}$$

■

Damit können wir die Fouriertransformation auf L_2 definieren:

Definition
Sei $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Dann definieren wir die Fouriertransformation $\hat{f}$ folgendermaßen: Wähle Folge

$$f_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ mit } f_j \xrightarrow{L_2} f$$

und setzen

$$\hat{f} = \lim_{j\to\infty} \hat{f}_j$$

Bemerkung
Existenz von $\lim \hat{f}_j$ in L_2:
Wir wissen, dass (f_j) Cauchyfolgen in L_2 sind. Nach Satz 3.4.2 ist $(\hat{f}_j)$ auch eine Cauchyfolge in L_2. Damit existiert der Grenzwert in L_2.

Eindeutigkeit:
Wir haben $g_j \to f_j \Rightarrow f_j - g_j \to 0 \Rightarrow \hat{f}_j - \hat{g}_j \to 0 \Rightarrow \lim \hat{f}_j = \lim \hat{g}_j$

Bemerkung
Für $f \in L_1 \cap L_2$ gilt $\hat{f} = \hat{f}$ fast-überall. Dabei bezeichnet das erste $\hat{f}$ die ursprüngliche Definition und das zweite die L_2-Definition. Man kann beweisen, dass die Darstellung $(2\pi)^{-N/2} \int_{|x|\le R} f(x)e^{-ix\xi}\,dx$ in L_2 gegen $\hat{f}$ strebt (für alle $f \in L_2$).

Folgerung (Plancherel-Formel)
Für $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ gilt $\|\hat{f}|L_2\| = \|f|L_2\|$, d. h. die Fouriertransformation ist ein **isometrischer Isomorphismus** des $L_2(\mathbb{R}^n)$. Dies impliziert, dass die Fouriertransformation ein unitärer Operator auf L_2 ist, d. h. $\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = \langle f, g\rangle$ für $f, g \in L_2$.

Beweis:
Der erste Teil folgt aus dem Satz 3.4.2 und der Definition. Zum zweiten Teil: sei H ein Hilbertraum und T ein isometrischer Isomorphismus auf H, d. h. $\|Tx\| = \|x\|$ für $x \in H$. Dann ist T unitär, d. h. $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$.

Es gilt für $x, y \in H$:

$$\begin{aligned}
4\langle x,y\rangle &= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 \\
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle \\
\|x-y\|^2 &= -\langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle \\
i\|x+iy\|^2 &= i\langle x,x\rangle + i\langle iy,iy\rangle + -\langle x,iy\rangle + \langle iy,x\rangle \\
i\|x-iy\|^2 &= -i\langle x,iy\rangle - \langle iy,x\rangle
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung kann man ein T in die Norm multiplizieren ohne dass sich etwas ändert. Also ergibt sich die Behauptung. ∎

Satz 3.4.3
Sei $1 < p < 2$. Dann bildet die Fouriertransformation $L_p(\mathbb{R}^n)$ in $L_{p'}(\mathbb{R}^n)$ ab und es gilt

$$\|\hat{f}|L_{p'}\| \leq (2\pi)^{N(1/p - 1/2)} \|f|L_p\|$$

Auch diese Formel bezeichnet man als **Hausdorff-Young-Ungleichung**.
Beweis:
Der Beweis ist eine Anwendung des Riesz-Thorin-Theorems: $\hat{}: L_1(\mathbb{R}^n) \to L_\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $C_0 = (2\pi)^{N/2}$ und $\hat{}: L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $C_1 = 1$ sowie $\hat{}: L_p(\mathbb{R}^n) \to L_{p'}(\mathbb{R}^n)$ mit $1/p = \Theta/2, 1 - \Theta = 2(1/p) - 1/2$ ∎

3.5. Die Fouriertransformation auf dem Schwartzraum $S(\mathbb{R}^n)$

Definition
Eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt **schnell fallend**, wenn für jeden Multiindex $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha \in \mathbb{N}^n$ die Funktion $x^\alpha f(x) = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} f(x)$ beschränkt ist. Eine äquivalente Aussage ist: $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Definition
Die Funktion heißt **Schwartz-Funktion**[2], falls die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}$ für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ schnell fallend sind. Das heißt:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^k \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \right| < \infty$$

für Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel
1. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$
2. Der Gauß-Weierstrass-Kern $e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ liegt in $S(\mathbb{R}^n)$.
3. Es ist $S(\mathbb{R}^n) \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$. Damit ist die Fouriertransformation auf $S(\mathbb{R}^n)$ definiert durch:
$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi}\, dx$$
4. Für $1 \leq p < \infty$ ist $S(\mathbb{R}^n) \subseteq L_p(\mathbb{R}^n)$ dicht. Insbesondere gilt $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi$ und ebenso die Fourierinversion.
5. Fourierinversion: $f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$
6. Die Fouriertransformation ist eine Bijektion auf $S(\mathbb{R}^n)$. Denn $\hat{}$ vertauscht die Multiplikation mit den Monomen x^α mit der Ableitung $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$ und Ableitungen mit Monomen.

[2] nach dem französischen Mathematiker Laurent Schwartz

3.6. Die Poisson-Formel

Es geht um den Zusammenhang von Fouriertransformation auf $\mathbb{R}^n$ und der Fourierreihenentwicklung auf dem Torus. Sei $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Diese muss 2π-periodisch gemacht werden:

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi n)$$

Die Funktion F ist in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Also konvergieren die Fourierreihen von F gleichmäßig gegen F:

$$\begin{aligned}
\hat{F}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi m)e^{-inx}\,dx \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+2\pi m)e^{-inx}\,dx \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} f(y)e^{-iny}\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iny}\,dy = \hat{f}(n)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

Es ist also $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{F}(n)e^{inx}$ und die **Poisson-Formel** lautet:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+2\pi n) = (2\pi)^{-1/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$$

4. Anwendungen der Fouriertransformation auf dem $S(\mathbb{R}^n)$

4.1. Die Wellengleichung in $S(\mathbb{R}^n)$

Wir betrachten hier nur SCHWARTZ-Funktionen als Anfangsbedingungen. Im eindimensionalen Fall haben wir: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ mit $u = u(x,t)$. Für den n-dimensionalen Fall ergibt sich somit:

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}}_{=\Delta u} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

mit $u = u(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$. Im $\mathbb{R}^3$ entspricht die Gleichung der Ausbreitung von Wellen im Vakuum. Die Variable c entspricht dabei der Lichgeschwindigkeit. Für die weiteren können wir $c = 1$ setzen. Unter Umständen müssen wir das später skalieren. Mit den Anfangsbedingungen $u(x,0) = f(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ mit $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ haben wir das Cauchy-Problem für die Wellengleichung im $\mathbb{R}^n$.

Wir entwickeln nun eine Heuristik zum Finden der Lösung. Angenommen u ist eine Lösung für das Cauchy-Problem. Dann führen wir eine Fouriertransformation der Gleichung sowie der Anfangsbedingungen bezüglich $x \in \mathbb{R}^n$ durch. Es ist $\left(\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}}\right)(\xi,t) = (-i\xi_1)^2\hat{u}(\xi,t) = -\xi_1^2\hat{u}(\xi,t)$ und $(\widehat{\Delta u})(\xi,t) = -|\xi|^2\hat{u}(\xi,t)$.

Damit ist aus der partiellen Differentialgleichung durch die Fouriertransformation eine gewöhnliche Differentialgleichung geworden. Für jedes feste $\xi \in \mathbb{R}^n$ haben wir somit eine gewöhnliche Differentialgleichung gegeben durch:

$$\hat{u}(\xi,t) = A(\xi)\cos(|\xi|t) + B(\xi)\sin(|\xi|t) \tag{4.1}$$

Dabei sind die $\xi, A(\xi)$ und $B(\xi)$ unbekannte Konstanten und müssen aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Aus der Fouriertransformation der Anfangsbedingungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi,0) &= \hat{f}(\xi) & &\Rightarrow^{\text{Gleichung 4.1}} \hat{f}(\xi) = A(\xi) \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,0) &= \hat{g}(\xi,0) & &\Rightarrow^{\text{Gleichung 4.1}} \hat{g}(\xi) = |\xi|B(\xi) \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\cos(|\xi|t) + \hat{g}(\xi)\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}$$

Für f und g aus $S(\mathbb{R}^n)$ sowie festes t folgt somit, $\hat{u}(\xi,t) \in S(\mathbb{R}^n)$ und weiter haben wir $u(\xi,t) \in S(\mathbb{R}^n)$.

Satz 4.1.1
Eine Lösung des CAUCHY-Problems $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ mit den Anfangsbedingungen $u(x,0) = f(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ ist gegeben durch

$$u(x,t) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\hat{f}(\xi)\cos(|\xi|t) + \hat{g}(\xi)\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\right) \cdot e^{ix\xi}\, d\xi$$

BEWEIS:
Der Beweis erfolgt in drei Schritten. Wir machen uns zunächst Gedanken über die Gleichung selbst, dann über die Anfangsbedingungen und schließlich zur Eindeutigkeit.

1. $\Delta u(x,t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\hat{f}(\xi)\cos(|\xi|t) + \hat{g}(\xi)\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\right) \cdot \underbrace{\Delta e^{ix\xi}}_{-|\xi|^2 e^{ix\xi}}\, d\xi$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\hat{f}(\xi)\cos(|\xi|t) + \hat{g}(\xi)\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\right) (|\xi|)^2 \cdot e^{ix\xi}\, d\xi$. Denn die Gleichheit ergibt sich durch $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\cos(|\xi|t) = -|\xi|^2\cos(|\xi|t)$.
2. $u(x,0) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\, d\xi = \check{\hat{f}}(x) = f(x)$ und
$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(x)e^{ix\xi}\, d\xi = g(x)$
3. Die Eindeutigkeit kann man durch eine lokale Version der Energie zeigen. Eine globale Version ist

$$E(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 \right) dx \tag{4.2}$$

Dabei ist $E(t)$ die Energie der Lösung. ■

Satz 4.1.2 (Energieerhaltungssatz)
Ist u die Lösung aus Satz 4.1.1, so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ die Beziehung $E(t) = E(0)$ (siehe Gleichung 4.2), d. h. die Energie der Welle bleibt konstant.

BEWEIS:
Plancherel:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} \left|\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}}(\xi,t)\right|^2 d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} |(-i\xi_j)\hat{u}(\xi,t)|^2\, d\xi \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi,t)|^2\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left||\xi|\hat{f}(\xi)\cos(|\xi|t) + \hat{g}(\xi)\sin(|\xi|t)\right|^2 d\xi\end{aligned}$$

Also ergibt sich $\int_{\mathbb{R}^n} |\frac{\partial u}{\partial t}|^2 \, dt = \int_{\mathbb{R}^n} |\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}|^2 \, dt$ und wir müssen zeigen:

$$E(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left((|\hat{f}(\xi)||\xi|)^2 + |\hat{g}(\xi)|^2 \right)^2 \, d\xi = E(0)$$

Es gilt: $|a\cos\alpha + b\sin\alpha|^2 + |-a\sin\alpha + b\cos\alpha|^2 = |a|^2 + |b|^2$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $a = \hat{a}(\xi)|\xi|, b = \hat{g}(\xi), \alpha = |\xi|t$. Zum Nachweis müssen wir mit konjugierten Komponenten multiplizieren: $(a\cos\alpha + b\sin\alpha)(\overline{a}\cos\alpha + \overline{b}\sin\alpha) + (-a\sin\alpha + b\cos\alpha)(-\overline{a}\sin\alpha + \overline{b}\cos\alpha) = |a|^2 + |b|^2 + 0a\overline{b} + 0\overline{a}b$. ∎

Für den eindimensionalen Fall ergibt sich nach D'ALEMBERT: $u(x,t) = 1/2(f(x+t) + f(x-t)) + 1/2\int_{x-t}^{x+t} g(y)\, dy$. Das $u(x,t)$ aus dem Satz 4.1.1 erfüllt diese Gleichung und es gilt:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\cos(|\xi|t)e^{i\xi}\, d\xi + (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi)\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}e^{ix\xi}\, d\xi \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\cos(\xi t)e^{i\xi}\, d\xi + (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi)\frac{\sin(\xi t)}{\xi}e^{ix\xi}\, d\xi \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\frac{e^{i\xi t} + e^{-i\xi t}}{2}e^{i\xi}\, d\xi + (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi)\frac{e^{i\xi t} - e^{-i\xi t}}{\xi 2i}e^{ix\xi}\, d\xi \\
&= \frac{1}{2}(2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)(e^{i\xi(x+t)} + e^{i\xi(x-t)})\, d\xi \\
&\qquad + \frac{1}{2}(2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(\xi)}{i\xi}(e^{i\xi(x+t)} - e^{-i\xi(x-t)})\, d\xi \\
&= \frac{1}{2}(\check{\hat{f}}(x+t) + \check{\hat{f}}(x-t)) + \frac{1}{2}\underbrace{(G(x+t) - G(x-t))}_{\int_{x-t}^{x+t} g(y)\, dy}
\end{aligned}$$

Dabei ist G die Stammfunktion von g und es ist, $\hat{G}(\xi)i\xi = \hat{g}(\xi)$.

Wir machen die Beobachtung, dass $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$ ein Mittel der Funktion f um die Punkte $x+t$ und $x-t$ ist. Weiter ist $\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\, dy$ ein Mittel der Funktion g im Itervall $[x-t, x+t]$.

Unser Ziel ist die Herleitung einer solchen Mitteldarstellung der Lösung $u(x,t)$ der Wellengleichung im Fall $n = 3$.

Sei $f \in S(\mathbb{R}^3)$ und $t \in \mathbb{R}$. Das **sphärische Mittel** ist dann

$$M_t(f)(x) := \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{S}^2} f(x - \gamma t)\, d\sigma(\gamma)$$

Dabei ist $\mathbb{S}^2 := \{y \in \mathbb{R}^3 \colon |y| \leq 1\}$ die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ und $d\sigma(\gamma)$ das Oberflächenelement auf $\mathbb{S}$.

Bemerkung

1. $M_t(f) \in S(\mathbb{R}^n)$ für festes t.
2. $f \in S(\mathbb{R}^3) \Rightarrow (M_t(f)(x))$ beliebig oft differenzierbar in t und $\frac{\partial^k}{\partial t^k} M_t(f) \in S(\mathbb{R}^3)$.

Satz 4.1.3
Für $\xi \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{S}^2} e^{-i\xi\gamma}\, d\sigma(\gamma) = \frac{\sin|\xi|}{|\xi|}$$

Beweis:
Für den Beweis benötigen wir zunächst eine Vorbemerkung zu radialen Funktionen. Dies sind Funktionen $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, für die $f(x)$ nur von $|x|$ abhängt, d. h. es existiert ein $\varphi \colon [0, \infty) \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = \varphi(|x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Die Fouriertransformation einer radialen Funktion ist wieder radial. Denn nach Satz 3.2.1 ist $\hat{f}(\rho(\xi)) = \widehat{f \circ \rho}(\xi)$ für alle $\rho \in \mathrm{O}(u)$.

Die rechte Seite der Gleichung ist radial. Nun ist zu zeigen, dass auch die linke Seite radial ist. Das Skalarprodukt ist invariant gegenüber Drehungen wie auch das Oberflächenelement. Somit haben wir die Gleichheit: $\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} e^{-i\rho(\xi)\gamma}\, d\sigma(\gamma) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} e^{-i\xi\rho^{-1}(\gamma)}\, d\sigma(\gamma) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} e^{-i\xi\gamma}\, d\sigma(\gamma)$. Also ist die linke Seite radial und es reicht, $\xi = (0, 0, \rho)$ mit $\rho \geq 0$ zu betrachten. Für $\rho = 0$ ist alles klar. Daher sei $\rho > 0$ und wir haben

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{S}^2} e^{-i\xi\rho_3}\, d\sigma(\gamma) &= \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{\pi} e^{-i\rho\cos\theta} \sin\theta \right) d\theta\, d\varphi \\
&= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} e^{-i\rho\cos\theta} \sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} e^{-i\rho u}\, du \\
&= \frac{1}{2i\rho}(e^{i\rho} - e^{-i\rho}) = \frac{\sin\rho}{\rho} = \frac{\sin|\xi|}{|\xi|}
\end{aligned}$$

■

Satz 4.1.4
Für $n = 3$ lässt sich die Lösung für die Wellengleichung $\Delta u = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, $u(x, 0) = f(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ für $f, g \in S(\mathbb{R}^3)$ darstellen als:

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}(tM_t f)(x) + tM_t g(x)$$

BEWEIS:
1. Schritt Sei $f = 0$. Dann folgt aus Satz 4.1.1:

$$u(x,t) = (2\pi)^{-3/2} t \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\hat{g}(\xi) \cdot \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|t}}_{=\widehat{M_t g}(\xi)} e^{ix\xi}\, d\xi = t(M_t g)(x)$$

2. Schritt Für $g = 0$ folgt ebenfalls aus Satz 4.1.1

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\xi) \cos(|\xi|t) e^{ix\xi}\, d\xi \\ &= \frac{\partial}{\partial t}((2\pi)^{-3/2} t \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\xi) \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|t} e^{ix\xi}\, d\xi) = \frac{\partial}{\partial t}(tM_t f)(x) \end{aligned}$$

3. Schritt Ergibt sich aus der Überlagerung beider Lösungen. ∎

Kommen wir nun zum HUYGENS-*Prinzip*. Die Frage lautet: Von welchen Anfangswerten $f(x)$ und $g(x)$ hängt die Lösung $u(x,t)$ in (x,t) tatsächlich ab?

Für $n = 1$ gilt: $u(x,t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\, dy$. Also hängt $u(x,t)$ von der Werten der Anfangsdaten im Intervall $[x-t, x+t]$ ab. Für $g = 0$ spielen nur die Werte in $x - t$ und $x + t$ eine Rolle.

Für $n = 3$ gilt: $u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(tM_t f)(x) + (tM_t g)(x)$.

Für die Wellengleichung im $\mathbb{R}^2$ (also $n = 2$) gewinnen wir aus der dreidimensionalen Lösung die zweidimensionale durch die Abstiegsmethode. Kreismittel:

$$(\widetilde{M}_t f)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{|y|\leq 1 \\ y\in\mathbb{R}^2}} f(x-ty)(1-|y|^2)^{-1/2}\, dy$$

Somit gibt es am Rand ein großes Gewicht und in der Mitte ein kleines Gewicht. Alle Werte kommen vor.

Satz 4.1.5
Für $n = 2$ lässt sich die Lösung des Cauchy-Problems für die Wellengleichung mit den Anfangswerten $f, g \in S(\mathbb{R}^2)$ als

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(t\widetilde{M}_t t)(x) + (t\widetilde{M}_t g)(x)$$

darstellen.

Beweis muss ergänzt werden

BEWEIS:

4.2. Radiale Funktionen und Bessel-Funktion

Wenn die Funktion f in $\mathbb{R}^n$ radial ist, so ist auch $\hat{f}$ radial und $f(x) = \varphi(|x|) \Rightarrow \hat{f}(\xi) = \Phi(|\xi|)$. Das Problem, auf direktem Weg das Φ aus φ zu finden. Im ein- und dreidimensionalen Fall hat das Problem eine einfache Antwort.

Für $n = 1$ sei $\varphi, \Phi\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$. Die Funktion f ist genau dann radial, wenn gilt, $f(x) = f(-x)$ und f gerade. Für $\rho \geq 0$ haben wir:

$$\begin{aligned}
\Phi(\rho) = \hat{f}(\rho) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\rho}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} \varphi(r) e^{-ir\rho}\, dr + \int_{-\infty}^{0} \varphi(-r) e^{-ir\rho}\, dr \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(r)(e^{-ir\rho} + e^{ir\rho})\, dr = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(r) \frac{e^{-ir\rho} + e^{ir\rho}}{2}\, dr \\
\Phi(\rho) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(r) \cos(r\rho)\, dr
\end{aligned}$$

Für $n = 3$ können wir die Beziehung unter Benutzung der Formel für die Fouriertransformation des Oberflächenelements $d\sigma$ aus Satz 4.1.3 benutzen:

$$\begin{aligned}
\Phi(\rho) = \hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{-ix\xi}\, dx \\
&= (2\pi)^{-3/2} \int_0^{\infty} \varphi(r) \underbrace{\int_{\mathbb{S}^2} e^{-i(r\gamma)\xi}\, d\sigma(\gamma)}_{=^{\text{Satz 4.1.3}} 4\pi \frac{\sin(|\xi| r)}{|\xi|}} r^2\, dr
\end{aligned}$$

Somit haben wir

$$\Phi(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} \varphi(r) \sin(r\rho) r\, dr$$

Im Allgemeinen hat die Beziehung zwischen den Funktionen φ und Φ eine schöne Beschreibung mittels einer Familie spezieller Funktionen. Diese erhält man als natürliches Ergebnis von Problemen aus dem Gebiet der Radialsymmetrie.

Definition (Besselfunktion)
Die **Besselfunktion** der Ordnung $m \in \mathbb{Z}$ ist der m-te Fourierkoeffizient der Funktion $e^{i\rho \sin\theta}$:

$$J_m(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{i\rho\sin\theta} e^{-im\theta}\, d\theta$$

Bemerkung
Das heißt mit getrennten Variablen:

$$e^{i\rho\sin\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\rho) e^{im\theta}$$

Nun betrachten wir den Fall $n = 2$. Es ist $\xi = (0, -\rho)$ und damit $|\xi| = \rho$. Weiterhin ist $\xi x = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \end{pmatrix} = -\rho r \sin\theta$. Damit können wir $\varPhi(\rho)$ ermitteln und erhalten unter dem Integral eine Besselfunktion nullter Ordnung:

$$\begin{aligned} \varPhi(\rho) = \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-ix\xi}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \varphi(r) \int\limits_0^{2\pi} e^{ir\rho\sin\theta} r\, dr\, d\theta \end{aligned}$$

Insgesamt ist:

$$\varPhi(\rho) = \int\limits_0^{\infty} \varphi(r) J_0(r\rho) r\, dr$$

Für gerades n ist:

$$\varPhi(\rho) = \rho^{1-n/2} \int\limits_0^{\infty} \varphi(r) J_{n/2-1}(r\rho) r^{n/2}\, dr$$

4.3. Die Radon-Transformation

Diese Transformation ist benannt nach Johann Radon und wurde von ihm im Jahr 1917 entdeckt. Im Englischen bezeichnet man sie als „X-ray-transform". Diese Transformation hat viele Anwendungen in der Mathematik und in anderen Fachgebieten, speziell in der Medizin. Daher stammt die englische Bezeichnung. Denn das Verfahren wird beim Röntgen eingesetzt.

Wir betrachten den zweidimensionalen Fall ($n = 2$) und gehen davon aus, dass sich ein homogenes Objekt $\mathcal{O}$ in der Ebene befindet. Ein (Röntgen-)Strahl tritt in das Objekt ein. Mit I_0 wird die Intensität eines Strahls vor Eintritt bezeichnet und I ist die Intensität des Strahls nach Austritt aus dem Objekt. Es gilt die Beziehung:

$$I = I_0 e^{-d\rho}$$

mit der Länge d der Strecke in O und dem Absorptionskoeffizient ρ.

Jetzt liegt ein inhomogener Stoff vor, d. h. der Absorptionskoeffizient ρ hängt vom Ort ab. Wir bezeichnen

- ρ_1 auf der Länge d_1 und ρ_2 auf d_2. Dann ist $I = I_0 e^{-(d_1\rho_1 + d_2\rho_2)}$
- $\rho = \rho(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $I = I_0 e^{-\int_L \rho}$ mit dem eindimensionalen Integral $\int_L$ von ρ über der Gerade des „Strahls“ L.

Definition (Radon-Transformation)
Für $n = 2$ ist die **Radon-Transformation** von ρ die Funktion

$$X(\rho)(L) = \int\limits_L \rho$$

und hängt von der Geraden L in $\mathbb{R}^2$ ab.

Wir wollen nun das Problem der inversen RADON-Transformation betrachten. Das wird gelegentlich auch als Rekonstruktionsproblem bezeichnet. Hierbei ist $X(\rho)(L)$ für alle Geraden L gegeben und wir suchen ρ. Jedoch hat ρ zuviele Freiheitsgrade $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Die Geraden L aus $\mathbb{R}^2$ haben zwei Freiheitsgrade, wie beispielsweise den Anstieg und Abstand zum Objekt. Können wir aus $X(\rho_1) = X(\rho_2)$ die Gleichheit von ρ_1 und ρ_2 folgern? Beide Probleme haben eine positive Lösung. Aber der Fall $n = 3$ ist einfacher darzustellen. Daher betrachten wir im folgenden diesen.

Die Geraden im $\mathbb{R}^3$ haben 4 Freiheitsgrade. Aber der $\mathbb{R}^3$ hat nur 3. Also liegt ein überbestimmtes System vor. Daher definieren wir

Definition (Radon-Transformation)
Die **Radon-Transformation** im $\mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\mathfrak{R}(f)(\mathfrak{E}) = \int\limits_{\mathfrak{E}} f$$

mit der Ebene $\mathfrak{E}$ im $\mathbb{R}^3$.

Bemerkung
Die Ebenen im $\mathbb{R}^3$ haben 3 Freiheitsgrade und müssen nicht notwendigerweise durch den Nullpunkt verlaufen.

Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass $f \in S(\mathbb{R}^3)$ liegt. Viele der untenstehenden Resulte können jedoch für eine größere Klasse an Funktionen gezeigt werden. Wie sieht es mit der Eindeutigkeit und Rekonstruktion aus?

Wir setzen $\mathfrak{E}_{t,\gamma} := \{x \in \mathbb{R}^3 \colon x \cdot \gamma = t\}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $\gamma \in \mathbb{S}^2$, d. h. $\mathfrak{E}_{t,\gamma}$ ist die Ebene mit dem Normalenvektor γ und Abstand t vom Nullpunkt. Es ist, $\mathfrak{E}_{-t,-\gamma} = \mathfrak{E}_{t,\gamma}$. Wie lässt sich nun das Integral $\int_{\mathfrak{E}_{t,\gamma}} f$ für $f \in S(\mathbb{R}^3)$ bestimmen? Hierzu wählen wir e_1, e_2, so dass γ, e_1, e_2 eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist. Dann kann man jedes $x \in \mathfrak{E}_{t,\gamma}$ als $x = t\gamma + u_1 e_1 + u_2 e_2 = t\gamma + u$ schreiben. Somit folgt

$$\int\limits_{\mathfrak{E}_{t,\gamma}} f = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u)\, du = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u_1 e_1 + u_2 e_2)\, d(u_1, u_2)$$

Für $f \in S(\mathbb{R}^3), t \in \mathbb{R}$ und $\gamma \in \mathbb{S}^2$ gilt dann

$$\mathfrak{R}(f)(t,\gamma) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u)\, du$$

Aus der obigen Folgerung ergibt sich der Fakt: $\mathfrak{R}(f)(t,\gamma) = \mathfrak{R}(f)(-t,-\gamma)$. Hängt die Definition von der Wahl der e_1 und e_2 ab? Das $\mathfrak{R}(f)$ ist unabhängig von der Wahl der e_1 und e_2.

Sei nun e_1', e_2' die orthogonale Drehung mit festem γ auf e_1, e_2. Im Integral bleibt alles gleich.

Für festes $\gamma \in \mathbb{S}^2$ gilt:

$$\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{\mathfrak{E}_{t,\gamma}} f \right) dt = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f$$

Beweis:
Sei γ, e_1, e_2 eine feste Orthonormalbasis, ρ eine Rotation aus O(3), die γ, e_1, e_2 auf kanonische Einheitsvektoren abbildet.

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^3} f &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(\rho^{-1}(x))\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x_1\gamma + x_2 e_1 + x_3 e_2)\, dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u_1 e_1 + u_2 e_2)\, du \right) dt \end{aligned}$$ ■

Sei nun $S(R \times \mathbb{S}^2)$ die Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen f, für die gilt, $\sup_{\substack{t\in\mathbb{R} \\ \gamma\in\mathbb{S}^2}} |t|^k |\frac{\partial^l f}{\partial t^l}(t,\gamma)| < \infty$ für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$. Für $f \in S(\mathbb{R}^3)$ gilt dann, $\mathfrak{R}(f) \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2)$.

4.3.1. Relation der Radon-Transformation zur Fouriertransformation

Satz 4.3.1
Sei $f \in S(\mathbb{R}^3)$. Dann haben wir:

1. $\mathfrak{R}(f) \in S(\mathbb{R})$ für festes γ als Funktion von t
2. Es gilt für festes γ:

$$\hat{\mathfrak{R}}(f)(s,\gamma) = 2\pi \hat{f}(s\gamma)$$

Dabei ist $\hat{f}$ die dreidimensionale Fouriertransformation von f, während $\hat{\mathfrak{R}}(f)(s,\gamma)$ die eindimensionale Fouriertransformation von $\mathfrak{R}(f)(s,\gamma)$ darstellt.

BEWEIS:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathfrak{R}}(f)(s,\gamma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}(f)(t,\gamma) e^{-its}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u)\, du \right) e^{-its}\, dt
\end{aligned}$$

wegen $\gamma \cdot u = 0$ und $|\gamma| = 1$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u)\, du \right) e^{-i(s\gamma)(t\gamma+u)}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u) e^{-its}\, du\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{-i(s\gamma)x}\, dx = \underbrace{(2\pi)^{-1/2}(2\pi)^{3/2}}_{=2\pi} \hat{f}(s\gamma)
\end{aligned}$$

■

Aus der Eindeutigkeit der Fouriertransformation folgt die Eindeutigkeit der Fouriertransformation von $\mathfrak{R}$. Es ist $\mathfrak{R}(f) = \mathfrak{R}(f) \Rightarrow f = g$. Denn $\hat{f}(s\gamma) = \mathfrak{R}(f)(s,\gamma) = \hat{\mathfrak{R}}(g)(s,\gamma) = \hat{g}(s\gamma)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und $\gamma \in \mathbb{S}^2$. Somit $\hat{f} = \hat{g} \Rightarrow f = g$. Zur Rekonstruktion benötigen wir die duale RADON-Transformation.

Definition (Duale Radon-Transformation)
Sei $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}$. Dann ist die **duale Radon-Transformation** von F definiert durch

$$\mathfrak{R}^*(F)(x) = \int\limits_{\mathbb{S}^2} F(x\gamma, \gamma)\, d\sigma(\gamma)$$

Bemerkung
Es ist $x \in \mathfrak{E}_{t,\gamma}$ genau dann, wenn $x\gamma = t$. Vorher wurde über alle x integriert, die in der Ebene liegen. Jetzt wird über alle Ebenen integriert, die x enthalten.

Es sind $V_1 = S(\mathbb{R}^3)$ und $V_2 = S(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2)$ Prähilberträume mit den Skalarprodukten $\langle f, g\rangle_{V_1} := \int_{\mathbb{R}^3} f\overline{g}$ und $\langle F, G\rangle_{V_2} := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{S}^2} F\overline{G}$. Weiter gilt $\mathfrak{R}\colon V_1 \to V_2$ und $\mathfrak{R}^*\colon V_2 \to V_1$ mit

$$\langle \mathfrak{R}f, G\rangle_{V_2} = \langle f, \mathfrak{R}^* G\rangle_{V_1}$$

Denn:

$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{R}f, G\rangle_{V_2} &= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{S}^2} \mathfrak{R}f(t,\gamma)\overline{G(t,\gamma)}\, d\sigma(\gamma)\, dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{S}^2} \left(\int\limits_{x\in\mathfrak{E}_{t,\gamma}} f(x) \right) \overline{G(t,\gamma)}\, d\sigma(\gamma)\, dt \\
\langle f, \mathfrak{R}^* G\rangle_{V_1} &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)(\overline{\mathfrak{R}^* G})(x)\, dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \int\limits_{\mathbb{S}^2} f(x)\overline{G(x\gamma,\gamma)}\, dx\, d\sigma(\gamma) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \int\limits_{\mathbb{S}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u_1 e_1 + u_2 e_2)\overline{G(t,\gamma)}\, d(u_1,u_2)\, d\sigma(\gamma) \\
&= \int\limits_{\mathbb{S}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\overline{G(x\gamma,\gamma)}\, dx\, d\sigma(\gamma)
\end{aligned}$$

Satz 4.3.2 (Rekonstruktion)
Sei $f \in S(\mathbb{R}^3)$. Dann gilt:

$$\varDelta(\mathfrak{R}^*(\mathfrak{R}f))(x) = -8\pi^2 f(x)$$

Beweis:
Aus dem Satz 4.3.1 können wir die untenstehende Beziehung herleiten:

$$\mathfrak{R}f(t,\gamma) = \sqrt{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s\gamma)e^{ist}\, ds$$

Somit ergibt sich insgesamt:

$$(\mathfrak{R}^*(\mathfrak{R}f))(x) = \int\limits_{\mathbb{S}^2} (\mathfrak{R}f)(x\gamma,\gamma)\, d\sigma(\gamma) = \sqrt{2\pi} \int\limits_{\mathbb{S}^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s\gamma)e^{i(x\gamma)s}\, ds\, d\sigma(\gamma)$$

Darauf lässt sich nun der LAPLACE-Operator anwenden:

$$\begin{aligned}
\Delta\mathfrak{R}^*\mathfrak{R}f(x) &= \sqrt{2\pi}\int\limits_{\mathbb{S}^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(s\gamma)\underbrace{\Delta(e^{i(x\gamma)s})}_{=(is)^2e^{isx\gamma}=-s^2e^{isx\gamma}}\,ds\,d\sigma(\gamma)\\
&= -\sqrt{2\pi}2\int\limits_{\mathbb{S}^2}\int\limits_{0}^{\infty}\hat{f}(s\gamma)s^2e^{isx\gamma}\,ds\,d\sigma(\gamma)\\
&= -2\sqrt{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi\\
&= -2\sqrt{2\pi}(2\pi)^{3/2}f(x) = -8\pi^2 f(x)
\end{aligned}$$

■

5. Die Fouriertransformation auf lokalkompakten abelschen Gruppen

5.1. Abriß der allgemeinen Topologie

Metrische Räume reichen nicht: Punktweise Konvergenz in $C[0,1]$ lässt sich *nicht* aus einer Metrik erzeugen.

Definition
Sei X eine Menge. Eine **Topologie** τ auf X ist eine System von Teilmengen von X mit den Eigenschaften:

1. $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$
2. $O_1, O_2 \in \tau \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \tau$
3. Für jede Indexmenge I und $O_i \in \tau$ für $i \in I$ ist $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$

Das Paar (X, τ) heißt **topologischer Raum**. Die Mengen aus τ heißen **offene Mengen**.

Beispiel
1. metrische Räume (X, d): $O \subseteq X$ offen, genau dann wenn $\forall x \in O \, \exists \varepsilon > 0 \colon U_\varepsilon(x) \colon = \{y \in X \colon d(x,y) < \varepsilon\} \subseteq O$.
2. **indiskrete Topologie**: $\tau = \{\emptyset, X\}$. Studium dieser Topologie ist nicht weiter aufschlußreich. Daher betrachtet man eher:
3. **diskrete Topologie**: Die diskrete Topologie besteht aus der Potenzmenge von X.
4. **Sierpinskiraum**: $X = \{0,1\}, \tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$

abgeschlossene Menge A abgeschlossen, genau dann wenn $X \setminus A$ offen

Abschluss $M \subseteq X, \overline{M} \colon = \bigcap_{A \supset M, A \text{ abg.}} A$

Inneres $\dot{M} \colon = \bigcup_{O \subset M, O \text{ offen}} O$

Rand $\partial M \colon = \overline{M} \setminus \dot{M}$

Umgebung $U \subseteq X$ Umgebung von $x \in X$, genau dann wenn $x \in \dot{U}$

Umgebungsbasis Ein System $\mathcal{V}_x$ von Umgebungen heißt **Umgebungsbasis** von x, falls jede Umgebung V ein $U \in \mathcal{V}_x$ umfasst.

Relativtopologie $Y \subseteq X, \tau|_Y = \{O \cap Y : O \in \tau\}$

Stetigkeit Seien X, Y topologische Räume. Die Funktion $f: X \to Y$ heißt stetig, falls $f^{-1}(O)$ offen ist, für alle offenen $O \subseteq X$.

Konvergenz $(x_n) \subseteq X, x_n \to x \in X \Leftrightarrow \forall U \exists n_0 \in \mathbb{N}: x_n \in U$ für $n \geq n_0$. Der grenzwert ist eindeutig, falls X ein Hausdorffraum ist. das heißt, zu verschiedenen Punkten existieren disjunkte Umgebungen. Der obige Sierpinskiraum ist kein Hausdorffraum.

Kompaktheit X heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt: I Indexmenge, O_i offen $(i \in I)$ mit $\bigcup_{i \in I} O_i = X$. Dann existiert $O_{i_1}, \dots, O_{i_n}$ mit $\bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k} = X$. Weiter heißt $Y \subset X$ kompakt, falls Y in der Relativtopologie kompakt ist, relativkompakt, falls $\overline{Y} \subset X$ kompakt ist und X idealkompakt, genau dann wenn jedes $x \in X$ eine kompakte Umgebung hat. Sei $f: X \to Y$ stetig. Dann folgt aus der Kompaktheit von X, dass auch $f(x)$ kompakt ist.

Produkttopologie Sei I eine Indexmenge, X_i topologische Räume mit

$$X = \prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} : x_i \in X_i\}$$

$O \subseteq X$ heißt offen, wenn es für alle $x \in O$ *endlich viele* Indizes $i_1, \dots, i_n$ und offene Mengen $O_{i_1}, \dots, O_{i_n}$ in $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$ gibt, so dass

$$x \in \{y = (y_i) \in X : y_{i_1} \in O_{i_1}, \dots, y_{i_n} \in O_{i_n}\} \in O$$

Die Projektionen $\pi_j : (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j$ für $j \in I$ sind stetig.

Satz von Tychonoff Das Produkt kompakter Räume ist kompakt.

Homöomorphe Räume Seien X, Y topologische Räume, $f: X \to Y$ heißt **Homöomorphismus**, falls f bijektiv ist und f, f^{-1} stetig sind. X, Y heißen homöomorph, falls es einen Homöomorphismus $f: X \to Y$ gibt.

5.2. Topologische Gruppen

Definition
Eine Gruppe G mit einer Topologie heißt **topologische Gruppe**, wenn gilt:

1. G ist ein Hausdorffraum.
2. Die Abbildung $g \mapsto g^{-1}$ von $G \to G$ ist stetig.
3. Die Abbildung $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ von $G \times G \to G$ ist stetig.

Beispiel
1. Jede Gruppe G mit der diskreten Topologie, z. B.: $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

2. $\mathbb{T}, \mathbb{T}^N, \mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}, \mathbb{C}^n$
3. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jeweils mit der Multiplikation
4. $M_n(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{C})$ reelle bzw. komplexe $n \times n$-Matrizen mit der Addition und der Topologie des $\mathbb{R}^{n\times n} = \mathbb{R}^{n^2}$ bzw. $\mathbb{C}^{n^2}$
5. invertierbare, orthogonale bzw. unitäre Matrizen mit der Multiplikation
6. $C(X)$ mit X kompakter metrischer Raum und punktweiser Multiplikation als Gruppenoperation

Bemerkung
Sei O offen. Dann sind auch

$$\begin{aligned} Og &= \{hg\colon h \in O\} \\ gO &= \{gh\colon h \in O\} \\ O^{-1} &= \{h^{-1}\colon h \in O\} \end{aligned}$$

für jedes $g \in G$ offen. Analoges gilt für abgeschlossene und kompakte Mengen.
Beweis:
Wir zeigen die Behauptung nur für Og. Betrachte die Abbildung $\varphi\colon G \to G$ mit $\varphi(h) = hg^{-1}$. Als Hintereinanderausführung der Abbildung $G \ni h \mapsto (h, g^{-1}) \in G \times G$ mit der Multiplikation ist φ stetig. Also ist:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(O) &= \{h \in G\colon \varphi(h) \in O\} = \{h \in G\colon hg^{-1} \in O\} = \{h \in G\colon h \in Og\} \\ &= Og \end{aligned}$$

offen. ■

Folgerung
Die Abbildungen $G \to G$ gegeben durch

$$h \mapsto hg \qquad h \mapsto gh \qquad h \mapsto h^{-1}$$

sind Homöomorphismen.
Beweis:
Injektiv: $g_1 h = g_2 h \Rightarrow g_1 = g_2$, surjektiv: $g(g^{-1}h) = h$, stetig: siehe oben ■

5.2.1. Produkttopologie

Wir betrachten endliche Produkttopologien. Haben $X_1, \ldots, X_n$ topologische Räume mit $X = X_1 \times \ldots \times X_n$. Die offenen Mengen in X sind gerade alle Vereinigungen von Mengen $O_1 \times \ldots \times O_n$ mit $O_i \subseteq X_i$ offen. Das ist äquivalent zu: O heißt offen, wenn $\forall x \in O\, \exists O_1 \subseteq X_1, \ldots, O_n \in X_n$ offen mit $x_i \in O_i$ und $x \in O_1 \times \ldots \times O_n \subseteq O$.

Sei nun I eine Indexmenge mit $X_i, i \in I$ topologische Räume und $X = \prod_{i\in I} X_i$. Bei dieser Definition erhält man zu viele offene Mengen. Daher lautet die Definition etwas anders.

Definition
Eine Menge $O \subseteq X$ heißt **offen**, wenn es zu jedem $x \in O$ *endlich viele* $i_1, \dots, i_n \in I$ und $O_{i_1} \subseteq X_{i_1}, \dots, O_{i_n} \subseteq X_{i_n}$ offen gibt, so dass $x = (x_i)_{i \in I}, x_i \in O_i$ für $i = i_1, \dots, i_n$ und

$$\{y = (y_i) \colon y_{i_1} \in O_{i_1}, \dots, y_{i_n} \in O_{i_n}\} \subseteq O$$

Beispiel
Im endlichen Falle gilt dann $O_1 \times O_2 \times \dots$. Aber nur endlich viele $O_i \neq X_i$.

Dann gilt, dass die Projektionen $\pi_j \colon X \to X_j, x = (x_i) \mapsto x_j$ und die „Einbettungen" $J \colon X_j \to X, x_j \mapsto (x_i)_{i \in I}$ mit festem $x_i \in X_i$ für $i \neq j$ stetig sind.

Im Spezialfall $X = X_1 \times X_2, \pi_1 \colon (x_1, x_2) \mapsto x_1$ kann man das wie folgt beweisen[1]. Es ist zu zeigen, dass $\pi_1^{-1}(O_1)$ für $O_1 \subseteq X_1$ offen ist. Aus der Definition folgt sofort: $\pi_1^{-1}(O_1) = O_1 \times X_2$ offen. Weiter war $J \colon x_1 \mapsto (x_1, x_2), x_2 \in X_2$ fest. Jetzt müssen wir zeigen, dass $J^{-1}(O)$ offen, falls $O \subseteq X_1 \times X_2$ offen. Es genügt zu zeigen: $O = O_1 \times O_2$ mit $O_1 \subseteq X_1, O_2 \subseteq X_2$ offen. Es ist $J^{-1}(O_1 \times O_2) = \{x_1 \in O_1 \colon (x_1, x_2) \in O_1 \times O_2\} = \begin{cases} O_1 & x_2 \in O_2 \\ \emptyset & x_2 \notin O_2 \end{cases}$ ist offen.

Sei nun $O \subseteq G$ offen, G topologische Gruppe und $g \in G$. Dann ist gO, Og offen. Wir haben oben den Beweis für die zweite Behauptung gemacht: $\varphi \colon G \to G, \varphi(h) = hg^{-1}$ ist die Hintereinanderausführung von $G \ni h \mapsto (h, g^{-1}) \in G \times G$ und Multiplikation. Damit folgt, dass φ stetig ist. Jetzt schauen wir uns $\varphi^{-1}(O)$ an. Diese sollte offen sein.

$$\varphi^{-1}(O) = \{h \colon hg^{-1} \in O\} = \{h \colon h \in Og\} = Og \text{ ist offen.}$$

Folgerung
Eine topologische Gruppe G ist lokalkompakt, genau dann wenn das Einselement $e \in G$ eine kompakte Umgebung besitzt.

BEWEIS:
Ist K kompakt, so ist auch gK, Kg kompakt für alle $g \in G$. Sei K eine kompakte Umgebung von e. Dann ist $g = ge \in gK$ eine kompakte Umgebung von g. ■

Produkte von topologischen Gruppen sind topologische Gruppen. Für eine Indexmenge I und eine topologische Gruppe G_i mit dem Element $i \in I$ hat man $G = \prod_{i \in I} G_i, g = (g_i), h = (h_i), gh = (g_i h_i)$. Die Gruppenoperationen sind stetig bezüglich der Produkttopologie.

[1] Allgemeinere Beweise gehen ähnlich.

5.3. Haarmaße auf lokalkompakten abelschen Gruppen

Definition (Borelmaße)
Die **Borelsche $\boldsymbol{\sigma}$-Algebra** $B(X)$ auf einem topologischen Raum ist die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen enthält. Ein **Borelmaß** ist ein Maß μ auf $B(X)$ mit $\mu(K) < \infty$ für $K \subseteq X$ kompakt.

Definition
Ein linksinvariantes (rechtsinvariantes) Haarmaß auf einer lokalkompakten Gruppe ist ein Borelmaß μ mit der Eigenschaft, dass $\mu(gM) = \mu(M)$ bzw. $\mu(Mg) = \mu(M)$ für $g \in G$ und $M \in B(G)$ und $\mu(O) > 0$ für offenes $O \neq \emptyset$.

Bemerkung
1. Jedes linksinvariante Haarmaß μ definiert ein rechtsinvariantes Haarmaß durch $\nu(M) = \mu(M^{-1})$, da $\nu(Mg) = \mu((Mg)^{-1}) = \mu(g^{-1}M^{-1}) = \mu(M^{-1}) = \nu(M)$.

2. Ist μ ein Haarmaß, dann auch $c\mu$ mit $c > 0$.

3. Haarmaße definieren invariante Integrale. Ist μ ein linksinvariantes Haarmaß, f eine μ-integrierbare Funktion, dann gilt:

$$\int\limits_G f(gh)\, d\mu(h) = \int\limits_G f(x)\, d\mu(g^{-1}x) = \int\limits_G f(x)\, d\mu(x)$$

Satz 5.3.1 (Existenz des Haarmaßes)
Sei G eine lokalkompakte topologische Gruppe. Dann existiert auf G ein rechtsinvariantes Haarmaß μ. Dieses ist bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig bestimmt. Ist G abelsch, dann heißt das Maß Haarmaß (ohne Zusatz). Ist G kompakt, so ist $\mu(G) < \infty$.

Bemerkung
1. Der Beweis wird im Buch von Bachmann (siehe LitListe) ausführlich bewiesen. Weitere Beweise findet man auch in Hewitt-Ross.

2. Ist G kompakt, so normiert man $\mu(G) = 1$. Ist diskret, so setzt man $\mu(\{g\}) = 1$, also ist μ das Zählmaß. Für endliche Gruppen spezifizieren!

Nach einem Satz aus der letzten Vorlesung sind Produkte von kompakten Gruppen wieder kompakte Gruppen (Satz von Tychonoff). Sei $G = \prod_{i \in I} G_i, G_i$ kompakte Gruppen. Weiter sei μ_i ein normiertes Haarmaß auf G_i. Dann ist das Haarmaß μ auf G das Produktmaß $\mu = \prod_{i \in I} \mu_i$. Denn für $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ gilt:

$$\begin{aligned}\mu((O_1 \times \ldots \times O_n)(g_1, \ldots, g_n)) &= \mu(O_1 g_1 \times \ldots \times O_n g_n) \\ &= \mu_1(O_1 g_1) \ldots \mu_n(O_n g_n) = \mu_1(O_1) \ldots \mu_n(O_n) \\ &= \mu(O_1 \times \ldots \times O_n)\end{aligned}$$

Beispiel

1. $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{T}^n$ mit der Addition als Gruppenoperation. Das Haarmaß ist das Lebesguemaß.

2. Sei $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Das Haarmaß ist $\frac{dx}{x}$.

3. Wenn man eine diskrete Gruppe hat, dann ist das Haarmaß das Zählmaß.

4. $\mathrm{SO}(n)$ orthogonale $n \times n$-Matrizen mit der Determinante 1 (Drehungen). Man nehme einen Punkt $x_0 \in S^{n-1}$ (Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$). Sei μ das normierte Oberflächenmaß auf S^{n-1}. Dann sei für $M \subseteq \mathrm{SO}(n)$ messbar $\nu(M) = \mu(\{Ax_0 \colon A \in M\})$. Betrachten wir nun $\nu(MA_0) = \mu(\{AA_0x_0 \colon A \in M\}) = \nu(M)$, da ν unabhängig von der Auswahl von $x_0 \in S^{n-1}$. Für $n = 2$ ist $\mathrm{SO}(2) \equiv [0, 2\pi)$ mit dem normierten Lebesguemaß ν.

5. **Cantorgruppe**: Betrachte die Gruppe $G_0 = \{\pm 1\}$ mit der Multiplikation als Gruppenoperation. G_0 ist isomorph zur zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} = \{0, 1\}$ mit der Addition modulo 2. Die Cantorgruppe ist das unendliche Produkt $G = \prod_{i=0}^{\infty} G_i$ mit $G_i = G_0$ für $i = 0, 1, 2, \ldots$. Sie besteht aus alle Folgen $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ mit $x_i \in \{\pm\}$ mit koordinatenweise Multiplikation. Alternativ kann man $G = \mathbb{Z}_2^{\infty} = \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ als Gruppe aller Folgen (y_i) mit $y \in \{0, 1\}$ mit koordinatenweiser Addistion modulo 2 auffassen. G_0 ist kompakt. Nach dem Satz von Tychonoff ist also auch G kompakt. *Achtung*: Die Topologie auf G ist *nicht* die diskrete Topologie.

   Auf G_0 ist das (linke und rechte) Haarmaß μ_0 mit $\mu_0(G_0) = 1$ gegeben durch $\mu_0(\{1\}) = \mu_0(\{-1\}) = 1/2$. Das Haarmaß auf G ist dann das Produktmaß $\mu = \prod_{i=0}^{\infty} \mu_i$ mit $\mu_i = \mu_0$ für $i = 0, 1, 2, \ldots$. Ist z. B. $M = \{x = (x_i) \in G \colon x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0\}$, dann ist

$$\begin{aligned} \mu(M) &= \underbrace{\mu(\{x_1^0\})}_{=1/2} \underbrace{\mu(\{x_2^0\})}_{=1/2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\mu(\{x_n^0\})}_{=1/2} \underbrace{\mu(G_{n+1})}_{=1} \underbrace{\mu(G_{n+2})}_{=1} \\ &= 2^{-n} \end{aligned}$$

   Abbildung auf das Intervall $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} \varphi \colon G &\to [0, 1] \\ x = (x_i) &\mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i + 1}{2} 2^{-i-1} \end{aligned}$$

   (dyadischer Bruch) $\qquad + - + + - \cdots \mapsto 10110\ldots$

   φ ist nicht 1-1, aber bis auf die Identifikation von 1-er Perioden. Das Bildmaß vom Haarmaß μ ist das Lebesguemaß auf $[0, 1]$.

5.4. Charaktere auf lokalkompakten abelsche Gruppen

Im folgenden sei G eine lokalkompakte abelsche Gruppe.

Definition
Eine stetige Abbildung $X: G \to \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ heißt **Charakter** von G, wenn gilt $X(xy) = X(x)X(y)$ für $x, y \in G$.

Dabei ist $\Gamma = \hat{G}$ die Menge aller Charaktere auf G und heißt **duale Gruppe** von G. Die Gruppenoperation ist $X_1X_2(x) = X_1(x)X_2(x)$, das Einselement $e(x) = 1$ für $x \in G$ und das Inverse ist $X^{-1}(x) = \overline{X(x)}$.

Definition (Topologie auf der dualen Gruppe)
Die Topologie auf Γ ist die kleinste Topologie, so dass die Mengen

$$N(X_0, E, \varepsilon) = \{X \in \Gamma : |X(x) - X_0(x)| < \varepsilon \ x \in E\}$$

mit $E \subseteq G$ kompakt, $X_0 \in \Gamma, \varepsilon > 0$ offen.

Satz 5.4.1
Γ ist eine topologische Gruppe.

Beweis:

1. Γ ist ein Hausdorffraum: Dazu genügt es zu zeigen, dass es für $X_0, X_1 \in \Gamma, X_0 \neq X_1$ Umgebungen $N(X_0, E, \varepsilon) \cap N(X_1, E, \varepsilon) = \emptyset$ gibt. Wegen $X_0 \neq X_1$ gibt es ein $x_0 \in G$ mit $X_0(x_0) \neq X_1(x_0)$. Wegen der Stetigkeit von X_0 und X_1 gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung U von x_0, so dass $|X_0(x) - X_1(x)| > 2\varepsilon$ für $x \in U$ ist. Sei K eine kompakte Umgebung von x_0. Dann ist $E{:} = K \cap \overline{U}$ eine kompakte Umgebung von x_0 mit $|X_0(x) - X_1(x)| \geq \varepsilon$ für $x \in E$. Dann folgt aus der Dreiecksungleichung $N(X_0, E, \varepsilon) \cap N(X_1, E, \varepsilon) = \emptyset$.
2. Die Abbildung $\varphi : X \to X^{-1}$ ist stetig: Es genügt zu zeigen, dass die Mengen $\varphi^{-1}(N(X_0, E, \varepsilon) = \{X \in \Gamma : |X^{-1}(x) - X_0(x)| < \varepsilon \ x \in E\}$ offen sind. Nun gilt $X^{-1}(x) - X_0(x) = \overline{X(x)} - X_0(x) = \overline{X(x) - \overline{X_0(x)}} = \overline{X(x) - X_0^{-1}(x)}$. Also ist $\varphi^{-1}(N(X_0, E, \varepsilon)) = N(X_0^{-1}, E, \varepsilon)$ offen.)
3. Die Multiplikation $\varphi : (X_1, X_2) \to X_1X_2$ ist stetig: Es genügt zu zeigen, dass die Mengen $\varphi^{-1}(N(X_0, E, \varepsilon)) = \{(X_1, X_2) \in \Gamma \times \Gamma : |X_1(x)X_2(x) - X_0(x)| < \varepsilon \ x \in E\} =: M$ offen sind. Dazu sei $(X_1^0, X_2^0) \in M$. Wegen der Kompaktheit von E und der Stetigkeit von X_1^0, X_2^0, X_0 ist $\varepsilon_0 = \min\{|X_1^0(x)X_2^0(x) - X_0(x)| : x \in E\} < \varepsilon$. Wegen

$$\begin{aligned}
|X_1(x)X_2(x) - X_0(x)| &\leq |X_1(x)X_2(x) - X_1^0(x)X_2(x)| \\
&\quad + |X_1^0(x)X_2(x) - X_1^0(x)X_2^0(x)| \\
&\quad + |X_1^0X_2^0(x) - X_0(x)| \\
&= |X_1(x) - X_1^0(x)| + |X_2(x) - X_2^0(x)| \\
&\quad + |X_1^0(x)X_2^0(x) - X_0(x)|
\end{aligned}$$

ist für $X_1 \in N(X_1^0, E, \delta), X_2 \in N(X_2^0, E, \delta$ auch $|X_1(x)X_2(x) - X_0(x)| < 2\delta + \varepsilon_0$ für $x \in E$. Wählen wir $\delta = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2}$, so ist das gleich ε. Also gilt $N(X_1^0, E, \delta) \times N(X_2^0, E, \delta) \subseteq M$. Somit ist M offen. ■

Bemerkung

1. Seien G_1, G_2 lokalkompakte abelsche Gruppen. Dann gilt $\widehat{G_1 \times G_2} = \hat{G}_1 \times \hat{G}_2$ sowohl algebraisch als auch topologisch.

2. Ist G kompakt, so ist Γ diskret.

$$N(e, G, \varepsilon) = \{X \in \Gamma \colon |X(x) - 1| < \varepsilon \forall x \in G\}$$

   Behauptung: $X \in \Gamma, X \neq 1$. Dann existiert ein $x \in G$ mit $\Re X(x) \leq 0$. Folgerung: $N(e, G, 1) = \{e\}$, d. h. jede Menge in Γ ist offen.

   Beweis:
   Sei $z = X(x) \neq 1$. Dann existiert $n \in \mathbb{Z}$ mit $\Re z^n \leq 0$. dazu sei $z = e^{it}$. Dann ist $\Re z^n = \cos nt$ und $t \neq 0$. Wir müssen zeigen, dass es ein n mit $nt \mod 2\pi \in [\pi/2, 3\pi/2]$ gibt. Für den Fall $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$ bzw. $t \in [0, \pi/2)$ sind wir fertig. Für $t \in (3\pi/2, \pi)$ fertig formulieren
   $\ldots$. Also ist $\Re X(x^n) = \Re X(x)^n = \Re z^n \leq 0$, was $|X(x^n) - 1| \geq \Re(1 - X(x^n)) = 1 - \Re X(x^n) \geq 1$ und somit $X \notin N(e, G, 1)$ impliziert. ■

3. Ist G diskret, so ist Γ kompakt.

Beispiel

1. $G = \mathbb{T}, \hat{G} \cong \mathbb{Z}$, wobei $\cong$ sowohl topologische wie auch algebraische Isomorphie bedeutet

2. $G = \mathbb{R}^n, \hat{G} \cong \mathbb{R}^n$

3. $G = \mathbb{Z}$. Da $\mathbb{Z}$ diskret ist, ist jeder Homomorphismus $X \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{T}$ stetig, also ein Charakter. $X(m+n) = X(m)X(n) \Rightarrow X(n) = X(1)^n =: z$ mit $z \in \mathbb{T}$. Jedes X mit $X(n) = z^n$ für $n \in \mathbb{Z}$ mit einem $z \in \mathbb{T}$ ist ein Homomorphismus $\hat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}$. Topologisch gilt, dass $E \subseteq \mathbb{Z}$ genau dann kompakt ist, wenn E endlich ist.

Bemerkung

Erklärung zum Begriff „topologisch und algebraisch isomorp“: Seien G_1, G_2 topologische Gruppen. Dann ist $G_1 \cong G_2 \Leftrightarrow \exists \Phi \colon G_1 \to G_2$ mit Φ ist Gruppenhomomorphismus und Homöomorphismus.

Beispiel

1. $G = \mathbb{T}, \hat{G} \cong \mathbb{Z}, X_k(x) = e^{ikx}$ für $k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{T} = [0, 2\pi), \hat{G} = \{X \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T} \colon X(x) = e^{ikx}\ k \in \mathbb{Z}\} = \{X_k \colon k \in \mathbb{Z}\}, \Phi \colon \hat{G} \to \mathbb{Z}, X_k \mapsto k$

2. $G = \mathbb{R}^n, \hat{G} \cong \mathbb{R}^n, X_\xi(x) = e^{ix\xi}, x, \xi \in \mathbb{R}^n, \hat{G} = \{X_\xi \colon \xi \in \mathbb{R}^n\}, \Phi \colon \hat{G} \to \mathbb{R}^n, X_\xi \mapsto \xi$

3. $G = \mathbb{Z}, \hat{G} \cong \mathbb{T}, X_z(n) = z^n, z \in \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}, n \in \mathbb{Z}, \Phi \colon \hat{G} \to \mathbb{T}, X_z \mapsto z$
   Da gilt $\Phi(X_z X_w) = \Phi(X_{z+w}) = z \cdot w = \Phi(X_z) \cdot \Phi(X_w)$ ist Φ ein Gruppenhomomorphismus. Weiter ist Φ auch ein Homöomorphismus (Übung).

4. endliche abelsche Gruppen: Aus der Algebra wissen wir, dass jede endliche abelsche Gruppe G ein endlisches Produkt vonendlichen zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ ist mit $G = \mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_m} \Rightarrow \hat{G} = \hat{\mathbb{Z}}_{n_1} \times \ldots \times \hat{\mathbb{Z}}_{n_m}$. Es genügt also, $\hat{\mathbb{Z}}_n$ zu bestimmen. Sei $X \in \hat{\mathbb{Z}}_n$. Dann ist $X(k) = X(1)^k = z^k$ für $k \in \mathbb{Z}_n$ mit einem $z \in \mathbb{T}$. Wegen $X(n1) = X(0)$ gilt $z^n = 1$. Somit muss z eine n-te Einheitswurzel sein. Jedes X mit $X(k) = z_n^k = e^{\frac{2\pi ihk}{n}}$ ist auch ein Charakter. Wegen $z_h^k z_l^k = z_{h+l}^k$ ist $\hat{G} \cong \mathbb{Z}_n = G$.

   Folgerung: Ist G eine endliche abelsche Gruppe, so ist $\hat{G}$ isomorph zu G.

5. Cantorgruppe–Walshfunktion: $G = \prod_{i=0}^{\infty} G_i \cong \mathbb{Z}_2^{\infty}, G_i = G_0 = \{\pm 1\}$. Was sind die Charaktere auf G?

   a) **Rademacherfunktion**: $r_i \colon G \to \{\pm 1\}, r_i = x_i$ für $x = (x_i) \in G$. Das sind Charaktere.

   b) endliche Produkte von Rademacherfunktionen: Sei $A \subseteq \mathbb{N}_0$ endlich.. Dann ist $W_A = \prod_{i \in A} r_i$ ein Charakter auf G. Die W_A heißen **Walshfunktion** und es gilt:

$$\begin{aligned}
W_A W_B &= \prod_{i\in A} r_i \prod_{i \in B} r_i \\
&= \prod_{i \in A\setminus B} r_i \prod_{i\in B\setminus A} r_i \prod_{i \in A\cap B} r_i = \prod_{i \in A\setminus B} r_i \prod_{i\in B\setminus A} r_i \\
&= \prod_{i \in A\triangle B} r_i = W_{A\triangle B} \\
A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)
\end{aligned}$$

   Die Menge$\mathfrak{E} = \{A \subseteq \mathbb{N}_0 \colon A < \infty\}$ mit der symmetrischen Differenz als Menge ist eine Gruppe. Einselement ist die leere Menge, $A^{-1} = A$ für $A \in \mathfrak{E}, W_A^{-1} = W_A, W_A^2 = 1$.

   Darstellung auf $\mathbb{N}_0$: $\mathfrak{E} \ni A \mapsto n = \sum_{i\in A} 2^i \in \mathbb{N}_0, A\triangle B \mapsto \sum_{i \in A\triangle B} 2^i = \sum_{i\in A} 2^i \oplus \sum_{i \in B} 2^i = n \oplus m$. Dabei ist $\oplus$ die dyadische Addistion ohne Übertrag und es folgt, dass $(\mathfrak{E}, \triangle)$ isomorph zu $(\mathbb{N}_0, \oplus)$ ist.

Satz 5.4.2
Die duale Gruppe der Cantorgruppe ist die Gruppe der Walshfunktionen und ist algebraisch isomorph zu $(\mathfrak{E}, \triangle)$ und $(\mathbb{N}_0, \oplus)$. Die Topologie ist die diskrete Topologie.

Beweis:

1. Jeder Charakter auf G nimmt nur die Werte ± 1 an. Dazu sei $X \in \hat{G}$. Dann gilt für $x = (x_i) \in G$: $X(x)^2 = X(xx) = X((x_i^2)) = X((1)) = 1 \Rightarrow X(x) \in \{\pm 1\}$ für $x \in G$.
2. Für jede stetige Funktion $f \colon G \to \{\pm 1\}$ gilt: $\forall x \in G \exists m \forall y \in G$ mit $x_i = y_i$ gilt $f(x) = f(y)$. Denn sei o. B. d. A. $f(x) = 1$. Dann ist $f^{-1}(\{1\})$ offen, also existieren offene Mengen $M_i \subseteq G$ (fast alle $M_i = G_i$), so dass $x \in \prod M_i \subseteq f^{-1}(\{1\})$. Wähle m so, dass $M_i = G_i$ für $i \geq m$ gilt. Dann ist für $y = (y_i)$ mit $y_i = x_i$ auch $y \in \prod M_i$, also $f(y) = 1 = (f(x))$.

3. Für jede stetige Funktion $f\colon G \to \{\pm 1\}$ gilt: $\exists m \forall x, y \in G$ mit $x_i = y_i$ gilt $f(x) = f(y)$, d. h. f hängt nur von endlich vielen Koordinaten ab. Wir wählen wir zu $x \in G$ ein minimales m_x, wie in obigen Punkt. Setze $O(x) = \{y \in G\colon y_i = x_i\, i = 1, \dots, m_x\}$. Dann ist $O(x)$ offen und es gilt, $G = \bigcup_{x\in G} O(x)$. Da G kompakt ist, gibt es eine endliche Menge $A \subseteq G$ mit $G = \bigcup_{x\in A} O(x)$. Setze $m\colon = \max_{x\in A} m_x$. Seien jetzt $y, z \in G$ mit $y_i = z_i$. Wähle $x \in A$ mit $y \in O(x)$. Dann ist $y_i = x_i$, also auch $z_i = x_i$. Somit ist $z \in O(x)$. Das bedeutet aber $f(y) = f(x) = f(z)$.

4. Sei $X\colon G \to \{\pm 1\}$ ein Charakter und m so, dass $X(x) = X(y)$, falls $x_i = y_i$ für $i = 1, \dots, m$. Definiere $X^{(m)}\colon G^{(m)} = \prod_{i=0}^{m} G_i \to \{\pm 1\}$ durch $X^{(m)}((x_1, \dots, x_m))\colon = X((x_1, \dots, x_m, 1, 1, \dots))$. Dann ist $X^{(m)}$ ein Charakter auf $G^{(m)}$. Somit gilt $X = X^{(m)} = \prod_{i\in A} r_i$ für ein $A \subseteq \{0, \dots, m\}$. ∎

5.5. Die Fouriertransformation auf $L_1(G)$

Wir integrieren bezüglich des Haarmaßes. Sei G eine lokalkompakte abelsche Gruppe, $\Gamma = \hat{G}$ duale Gruppe und μ das Haarmaß auf G. Wir haben $L_p(G) = L_p(G, \mathfrak{B}(G), \mu)$ für $1 \leq p \leq \infty$.

Definition
Sei $f \in L_1(G)$. Dann ist die Fouriertransformation $\hat{f}$ gegeben durch:

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}\, d\mu(x)$$

für $\chi \in \Gamma$.

Beispiel
1. $G = \mathbb{T}, \Gamma \simeq \mathbb{Z}, d\mu(x) = \frac{1}{2\pi} dx, f \in L_1(\mathbb{T}), \chi_j(x) = e^{ijx}$. Dann ist die Fouriertransformation:

$$\hat{f}(j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ijx}\, dx$$

   Die Fouriertransformation bildet f auf die Folge $(\hat{f}(j))_{j\in\mathbb{Z}}$ der Fourierkoeffizienten ab.

2. $G = \mathbb{Z}, \mu$ Zählmaß, $\Gamma = \mathbb{T} = [0, 2\pi), \chi_x(j) = e^{ijx}, f \in L_1(\mathbb{Z}), (f(j))_{j\in\mathbb{Z}} = (c_j)_{j\in\mathbb{Z}}$. Dann ist die Fouriertransformation:

$$\hat{f}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j) e^{-ijx} = \sum c_j e^{-ijx}$$

   Die Fouriertransformation bildet eine absolut summierbare Folge auf die zugehörige Fourierreihe ab.

3. $G = \mathbb{R}^n, d\mu(x) = (2\pi)^{-n/2}dx$ Lebesguemaß $\varGamma = \mathbb{R}^n, \chi_\xi(x) = e^{ix\xi}$. Dann ist die Fouriertransformation:
$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\xi}\, dx$$
4. $G = \mathbb{Z}_n$ endliche Gruppe, μ Zählmaß, $\varGamma \simeq \mathbb{Z}_n, \chi_n(k) = \frac{2\pi ihk}{n}$ für $0 \leq h,k < n, f \in L_1(\mathbb{Z}_n)$ und f ist ein n-Tupel $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}^n)$. Dann ist die Fouriertransformation:
$$\hat{f}(h) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{-\frac{2\pi ihk}{n}}$$
Sei $F_n = (e_{hk})_{h,k=0}^{n-1}$ die **Fouriermatrix** mit $e_{hk} = e^{-\frac{2\pi ihk}{n}}$. Dann ist $\hat{f} = F_n f$.
5. Cantorgruppe – Walsh-Fouriertransformation oder Walsh-Fourierreihen: $G = \{\pm 1\}^{\mathbb{N}_0} = \prod_{i=0}^\infty G_i, G_i = \{\pm 1\}, \hat{G} = \varGamma \simeq (\xi, \varDelta), \mu$ Produktmaß der Maße μ_i mit $\mu_i = (\{\pm 1\}) = 1/2$. Dann ist die Fouriertransformation:
$$\hat{f}(A) = \hat{f}(w_A) = \int\limits_G f(x)w_A(x)\, d\mu(x) = \int\limits_G f(x) \prod_{i\in\varDelta} x_i\, d\mu(x)$$
Obige heißen auch **Walsh-Fourierkoeffizienten**. Die **Walsh-Fourierreihe** ist:
$$\sum_{A\in\xi} \hat{f}(A)w_A \rightsquigarrow \sum_{n=0}^\infty \hat{f}(n)w_n \text{ für } (\mathbb{N}_0, \oplus)$$
Wie ist nun die Konvergenz gegen f? Siehe hierzu [1].

Satz 5.5.1
Sei $f \in L_1(G)$. Dann ist $\hat{f} \in C(\varGamma)$ eine stetige beschränkte Funktion mit
$$\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{x\in G}|\hat{f}(x)| \leq \|f|L_1(G)\|$$
$$\hat{f}(\chi) = \int\limits_G f(x)\overline{\chi(X)}\, D\mu(X)$$
$$|\hat{f}(\chi)| \leq \int\limits_G |f(x)|\, d\mu = \|f|L_1\|$$

Vorbemerkungen zum weiteren Beweis:

1. Ein Borelmaß μ auf einem lokalkompakten topologischen Raum X heißt **regulär**, falls gilt:
$$\mu(M) = \sup_{K\subseteq M \text{ kompakt}} \mu(K) = \inf_{O\supseteq M \text{ offen}} \mu(O)$$
Das Haarmaß auf einer lokalkompakten abelschen Gruppe ist regulär[2].

[2] Ohne Beweis, hierzu muss man tiefer in die Konstruktion von Haarmaßen einsteigen

2. Aus der Maßtheorie: Seien X, μ ein σ-endlicher Maßraum für $1 \le p < \infty$. Dann sind Treppenfunktionen dicht in $L_p(X,\mu)$, d. h. für alle $f \in L_p(X,\mu), \varepsilon > 0 \, \exists g = \sum_{i=1}^n c_i 1_{M_i}, M_i \subseteq X$ messbar, paarweise disjunkt, so dass $\|f - g|L_p\| < \varepsilon$. Ist X lokalkompakt und μ ein reguläres Borelmaß, dann kann man die M_i kompakt wählen. Sei X lokalkompakt, μ ein reguläres Borelmaß auf X und $f \in L_1(X,\mu)$ sowie $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine kompakte Menge $K \subseteq X$ mit

$$\int\limits_{X \setminus K} |f| \, d\mu < \varepsilon$$

Beweis:
$g = \sum_{i=1}^n c_i 1_{K_i}$ mit $\|f - g|L_1\| < \varepsilon, K = \bigcup_{i=1}^n K_i, \int_{X\setminus K}|f| = \int_{X\setminus K}|f - g| \le \int_X |f - g| < \varepsilon$. ■

3. Seien X, Y lokalkompakt und μ reguläres Borelmaß auf X. Außerdem sie $K\colon X \times Y \to \mathbb{C}$ beschränkt und stetig, $f \in L_1(X,\mu)$. Dann ist die Funktion $T_K f$ auf Y gegeben durch

$$(T_K f)(y) = \int\limits_X f(x) K(x,y) \, d\mu(x)$$

stetig.

Beweis:
Sei $y_0 \in Y, \varepsilon > 0$. Dann ist zu zeigen, dass eine Umgebung V von y_0 existiert, so dass $|T_K f(y) - T_K f(y_0)| < \varepsilon$ für $y \in V$:

$$|T_K f(y) - T_K f(y_0)| \le \int\limits_X |f(x)||K(x,y) - K(x,y_0)| \, d\mu(x)$$

Mit der obigen Bemerkung drei wählen wir K so ,dass $\int_{X\setminus K}|f| < \varepsilon$. Dann

$$\int\limits_{X\setminus K} |f(x)||K(x,y) - K(x,y_0)| \, d\mu(x) < \varepsilon 2C$$

mit $C = \sup_{x \in X, y \in Y} |K(x,y)|$. Zu $x \in K$ wählen wir eine Umgebung von $(x, y_0) \in X \times Y$ der Form $U_x \times V_x$ mit U_x Umgebung von x und V_x Umgebung von y_0 mit $|K(z,y) - K(x,y_0)| < \varepsilon$ für $z \in U_x, y \in V_x$. Wähle nun endlich viele $x_1, \ldots, x_n$, so dass $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Setze $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$ Umgebung von y_0. Für $x \in K, y \in V$ gilt

$$|K(x,y) - K(x,y_0)| \le |K(x,y) - K(x_i,y)| + |K(x_i,y) - K(x,y_0)| < 2\varepsilon$$

Damit folgt:

$$\int\limits_K |f(x)||K(x,y) - K(x,y_0)| \, d\mu(x) < 2\varepsilon \int\limits_K |f| = 2\varepsilon \|f|L_1\|$$

Nach den Vorbemerkungen können wir den Satz beweisen: Die vierte Vorbemerkung sagt uns, dass es genügt, zu zeigen, dass die Abbildung $\Phi\colon G \times \Gamma \to \mathbb{C}$ gegeben durch $(x, X) \mapsto X(x)$ stetig ist. Sei dazu $(x_0, X_0) \in G \times \Gamma, z_0 = X_0(x_0)$ und $I\colon = \{z \in \mathbb{T}\colon |z - z_0| < \varepsilon\}$. Es genügt, zu zeigen, dass $\Phi^{-1}(I) = \{(x, X) \in G \times \Gamma\colon |X(x) - z_0| < \varepsilon\}$ eine Umgebung von $(x_0, X_0) \subseteq G \times \Gamma$ ist. Dazu sei E eine kompakte Umgebung von x_0 und

$$N = N(X_0, E, \varepsilon/2) = \{X \in \Gamma\colon |X(x) - X_0(x)| < \varepsilon/2\, x \in E\}$$

eine Umgebung von $X_0 \in \Gamma$. Dann ist $(E \cap U) \times N$ eine Umgebung von (x_0, X_0) und für $(x, X) \in (E \cap U) \times N)$ gilt, $|X(x) - z_0| = |X(x) - X_0(x_0)| \leq |X(x) - X_0(x)| + |X_0(x) - X_0(x_0)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. ■

Eigenschaften der Fouriertransformation

Linearität $\widehat{\lambda g + \mu g} = \lambda \hat{f} + \mu \hat{g}$

Faltung $f + g(y) = \int_G f(x) g(x^{-1}y)\, d\mu(x) = \int_G f(x^{-1}y) g(x)\, d\mu(x)$ sowie $\widehat{f * g}(x) = \hat{f}(x)\hat{g}(x)$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(x) &= \int_G (f * g)(y) \overline{X(y)}\, d\mu(y) = \int_G \int_G f(x) g(x^{-1}y)\, d\mu(x) \overline{X(y)}\, d\mu(y) \\
&= \int_G f(x) \left(\int_G g(xy^{-1}) X(y^{-1})\, d\mu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_G f(x) \overline{X(x)} \left(\int_G g(x^{-1}y) X(xy^{-1})\, d\mu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_G f(x) \overline{X(x)} \left(\int_G g(x^{-1}y) \overline{X(xy^{-1})}\, d\mu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_G f(x) \overline{X(x)} \int_G g(z) \overline{X(z)}\, d\mu(z)\, d\mu(x) = \hat{f}(x)\hat{g}(x)
\end{aligned}$$ ■

5.6. Die Fouriertransformation auf kompakten abelschen Gruppen

Sei G eine kompakte abelsche Gruppe, μ ein normalisiertes Haarmaß und $\Gamma = \hat{G}$ die duale Gruppe.

Beispiel
Wir kennen bereits die Beispiele $\mathbb{T}$, Cantorgruppe, Produkte von kompakten Gruppen, $L_2(G) = L_2(G, \mu)$, Hilbertraum $\langle f, g\rangle = \int_G f\overline{g}\, d\mu$.

Satz 5.6.1
Die Charaktere auf G bilden ein Orthonormalsystem in $L_2(G)$.

Beweis:
Sei $X_1, X_2 \in \Gamma$ und $\langle X_1, X_2\rangle = \int_G X_1\overline{X_2}\, d\mu$. Ist $X = X_1 = X_2$, so folgt, $\|X|L_2(G)\|^2 = \langle X, X\rangle = \int_G 1\, d\mu = \mu(G) = 1$. Ist $X_1 \neq X_2$, so ist $X = X_1\overline{X_2} \in \Gamma$ und $X \neq 1$. Wähle $y \in G$ mit $X(y) \neq 1$. Dann gilt, $X(y)\int_G X(x)\, d\mu(x) = \int_G X(xy)\, d\mu(x) = \int_G X(x)\, d\mu(x)$. Das impliziert $\langle X_1, X_2\rangle = \int_G X(x)\, d\mu(x) = 0$. ∎

Satz 5.6.2
Die Charaktere auf G bilden eine Orthonormalbasis von $L_2(G)$.

Folgerung
Die Fouriertransformation $\hat{}$ auf G ist ein isometrischer Isomorphismus

$$\hat{}\colon L_2(G) \to \ell_2(\Gamma)$$

d. h. für jedes $f \in L_2(G)$ gilt

(Parsevalgleichung) $$\|f|L_2(G)\|^2 = \sum_{X\in\Gamma} |\langle f, X\rangle|^2$$

Weiterhin kann f aus den Fourierkoeffizienten „wiedergewonnen“ werden

$$f \overset{L_2}{=} \sum_{X\in\Gamma} \langle f, X\rangle = \sum_{X\in\Gamma} \hat{f}(X)X$$

Den Beweis zum Satz müssen wir zunächst etwas vorbereiten:
Hierzu betrachten wir den Satz von Stone-Weierstraß in der allgemeinen Form. Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra komplexwertiger Funktionen auf lokalkompakten Hausdorffraum X mit den Eigenschaften:

1. $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{f} \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ trennt die Punkte von X, d. h. $\forall x, y \in X$ mit $x \neq y$ existiert ein $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq f(y)$.
3. $\forall x \in X \exists f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq 0$.

Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $C_0(X)$.

Es gilt:

- $\mathcal{A}$ Algebra: $f, g \in \mathcal{A}, c \in \mathbb{C} \Rightarrow f + g, fg, cf \in \mathcal{A}$
- $C_0(X) = \{f \in C(X)\colon \forall\varepsilon > 0 \exists K \subset X$ kompakt mit $|f(x)| < \varepsilon\, x \in X \setminus K\}$

Weiterhin benötigen wir noch folgendes Lemma:
Sei G eine lokalkompakte abelsche Gruppe und $\Gamma = \hat{\Gamma}$. Dann trennt Γ die Punkte von G, d. h. zu $x, y \in G, x \neq y$ existiert $X \in \Gamma$ mit $X(x) \neq X(y)$. Der Beweis kommt evtl. später.

Beweis:
Sei $\mathcal{A} = \{f = \sum_{X \in A} c_X X : A \subseteq \Gamma < \infty, c_X \in \mathbb{C}$ für $X \in A\} = \operatorname{span} \Gamma$ eine Algebra mit den Eigenschaften aus dem Satz von Stone-Weierstraß. Also ist $\mathcal{A}$ dicht in $C_0(G) = C(G)$, d. h. zu $\varepsilon > 0, f \in C(X)$ existiert $g \in \mathcal{A}$ mit $\|f - g|C(G)\| = \|f - g\|_\infty < \varepsilon$ und damit auch $\|f - g|L_2\| \leq \|f - g\|_\infty < \varepsilon$. Da $C(G)$ auch dicht in $L_2(G)$ ist, ist $\mathcal{A} = \operatorname{span} \Gamma$ dicht in $L_{2(G)}$ und somit $\overline{\operatorname{span} \Gamma} = L_2(G)$, d. h. Γ ist ein vollständiges Orthonormalsystem in $L_2(G)$. ∎

Satz 5.6.3 (Hausdorff-Young-Ungleichung)
Sei $1 \leq p \leq 2$ und p' der konjugierte Index zu p: $1/p + 1/p' = 1$. Dann ist die Fouriertransformation $\hat{}$ ein stetiger linearer Operator

$$\hat{}: L_p(G) \to \ell_{p'}(\Gamma)$$

mit

$$\|\hat{}: L_p(G) \to \ell_{p'}(\Gamma)\| \leq 1$$

Beweis:
Der Beweis erfolgt durch Interpolation:

$$\begin{aligned} \hat{}&: L_1(G) \to \ell_\infty(\Gamma) && \|\cdot\| = 1 \\ \hat{}&: L_2(G) \to \ell_2(\Gamma) && \|\cdot\| = 1 \\ \Rightarrow^{\text{Riesz-Thorin}} \hat{}&: L_p(G) \to \ell_p && \|\cdot\| \leq 1 \end{aligned}$$

∎

Satz 5.6.4 (Riemann-Lebesgue)
Sei $f \in L_1(G)$. Dann verschwinden die Fourierkoeffizienten von f im Unendlichen, d. h. $\forall \varepsilon > 0 \exists A \subseteq \Gamma$ endlich so dass $|\hat{f}(X)| < \varepsilon$ für $X \in \Gamma \setminus A$ gilt.

Beweis:
Für $f \in L_2(G)$ gilt die Behauptung, da $\|f|L_2\|^2 = \sum_{X \in \Gamma} |\langle f, X \rangle|^2 = \sum_{X \in \Gamma} |\hat{f}(X)|^2$ ist. Da Treppenfunktionen dicht in $L_2(G)$ und in $L_1(G)$ sind und $L_2(G) \subseteq L_1(G)$ gilt, ist $L_2(G)$ dicht in $L_1(G)$. Ist $f \in L_1(G), \varepsilon > 0$, dann wähle $g \in L_2(G)$ mit $\|f - g|L_1\| < \varepsilon/2$ und anschließend $A \subseteq \Gamma$ mit $|\hat{g}(X)| < \varepsilon/2$ für $X \in \Gamma \setminus A$. Dann ist für $X \in \Gamma \setminus A$ auch $|\hat{f}(X)| \leq |\hat{f}(X) - \hat{g}(X)| + |\hat{g}(X)| \leq \|f - g|L_1\| + |\hat{g}(X)| < \varepsilon$. ∎

5.7. Die Fouriertransformation auf $L_2(G)$–Pontrjagin-Dualität

Im Allgemeinen ist $L_2(G) \subsetneq L_1(G)$, aber $L_2(G) \cap L_1(G) \subseteq L_2(G)$ dicht. Ist die Fouriertransformation also (auf einem dichten Teilraum von) $L_2(G)$ beschränkt, so kann man sie auf $L_2(G)$ fortsetzen. Den Weg dazu wollen wir in diesem Abschnitt ohne Beweise skizzieren.

Definition
Sei G eine Gruppe, $\varphi\colon G \to \mathbb{C}$. Dann heißt φ **positiv definit**, wenn

$$\sum_{h,k=1}^{N} \lambda_h \overline{\lambda_k} \varphi(x_h x_k^{-1}) \geq 0$$

für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}, x_1, \dots, x_N \in G$ gilt.

Beispiel
Sei G eine lokalkompakte abelsche Gruppe, $f \in L_1(G)$. Setze $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$. Dann ist $\varphi = f^* * f$ positiv definit und stetig. Denn:

$$\begin{aligned}
\varphi(x_h x_k^{-1}) &= \int_G f^*(x) f(x^{-1} x_h x_k^{-1}) \, d\mu(x) \\
&= \int_G f^*(x x_h^{-1}) f(x^{-1} x_k) \, d\mu(x) \\
&= \int_G \overline{f(x^{-1} x_h)} f(x^{-1} x_k) \, d\mu(x) \\
\Rightarrow \sum \lambda_h \overline{\lambda_k} \varphi(x_h x_k^{-1}) &= \int_G |\sum \lambda_h f(x^{-1} x_h)|^2 \, d\mu(x) \geq 0
\end{aligned}$$

Die Stetigkeit erhalten wir durch Approximation von $f, g \in L_2(G)$ durch Funktionen aus $C_0(G)$ und Beweis, dass $f * g$ stetig ist.

Wir definieren für die folgenden Sätze:

$$P = \operatorname{span}\{f \in L_1(G) \colon f \text{ positiv definit}\}$$

Satz 5.7.1
P ist dicht in $L_1(G)$ und $L_2(G)$.

Satz 5.7.2 (Fourierinversion)
Sei $f \in P$. Dann ist $\hat{f} \in L_1(\Gamma)$. Das Haarmaß ρ auf Γ kann so normalisiert werden, dass gilt:

$$f(x) = \int_\Gamma \hat{f}(X) \overline{X(x)} \, d\rho(X)$$

Satz 5.7.3 (Plancherel-Gleichung)
Sei $f \in L_1(G) \cap L_2(G)$. Dann gilt

$$\|\hat{f}|L_2(\Gamma)\| = \|f|L_2(G)\|$$

d. h. die Fouriertransformation ist eine Isometrie. Weiterhin ist das Bild von $L_1 \cap L_2$ dicht in L_2.

Beweis:
Sei $f \in L_1 \cap L_2$. Betrachten $g = f^* * f$. Dann gilt $\hat{g}(X) = \widehat{f^* * f}(X) = \widehat{f^*}(X)\hat{f}(X)$. Weiter ist:

$$\begin{aligned}
\widehat{f^*}(X) &= \int_G f^*(x)\overline{X(x)}\,d\mu(x) = \int_G \overline{f(x^{-1})X(x)}\,d\mu(x)\\
&= \overline{\int_G f(x^{-1})X(x)\,d\mu(x)} = \overline{\int_G f(x^{-1})\overline{X(x^{-1})}\,d\mu(x)}\\
&= \overline{\int_G f(y)\overline{X(y)}\,d\mu(y)} = \overline{\hat{f}(X)}
\end{aligned}$$

Also ist $\hat{g}(X) = |\hat{f}(X)|^2$. Wir wissen, $g \in P$ und mit der Fouriertransformation erhalten wir also: $g(x) = \int_\Gamma \hat{g}(X)\overline{X(x)}\,d\rho(x)$. Schließlich ist

$$\begin{aligned}
\|f|L_2\|^2 &= \int_G |f(x)|^2\,d\mu(x) = \int_G f(x)\overline{f(x)}\,d\mu(x)\\
&= \int_G f(x)f^*(x^{-1})\,d\mu(x) = \int_G f(x)f^*(ex^{-1})\,d\mu(x) = g(e)\\
g(e) &= \int_\Gamma \hat{g}(X)\overline{X(e)}\,d\rho(X) = \int_\Gamma \hat{g}(X)\,d\rho(X)\\
&= \int_\Gamma |\hat{f}(X)|^2\,d\rho(X) = \|\hat{f}|L_2(\Gamma)\|
\end{aligned}$$

■

Folgerung
Die Fouriertransformation kann zu einer Isometrie von $L_2(G)$ auf $L_2(\Gamma)$ fortgesetzt werden, d. h. $\|\hat{f}|L_2(\Gamma)\| = \|f|L_2(G)\|$ für alle $f \in L_2(G)$ und zu jedem $g \in L_2(\Gamma)$ existiert ein $f \in L_2(G)$ mit $\hat{f} = g$.

Pontrjagin-Dualität

$$\begin{array}{lll}
G = \mathbb{T} & \hat{G} \cong \mathbb{Z} & \hat{\hat{G}} \cong \mathbb{T} = G\\
G = \mathbb{R} & \hat{G} \cong \mathbb{R} & \hat{\hat{G}} \cong \mathbb{R}
\end{array}$$

Gilt allgemein $\hat{\hat{G}} \cong G$? Hierzu brauchen wir $\Phi\colon G \to \hat{\hat{G}}$. Dabei sind $\hat{\hat{G}}$ die Charaktere auf $\hat{G}$. Es ist $\Phi(y) := f_y$ mit $f_y(X) = X(y)$.

1. Da $(x, X) \mapsto X(x)$ eine stetige Abbildung von $G \times \varGamma \to \mathbb{C}$ ist, ist auch f_y stetig.
2. $|f_y(X)| = 1$ für alle $X \in \varGamma$
3. $f_y(X_1 X_2) = (X_1 X_2)(y) = X_1(y) X_2(y) = f_y(X_1) f_y(X_2)$

Also ist f_y ein Charakter auf $\hat{G}$, d. h. ein Element von $\hat{\hat{G}}$.

Weiterhin ist $\varPhi$ ein Homomorphismus. Denn $\varPhi(y_1 y_2) = \varPhi(y_1)\varPhi(y_2)$ und $f_{y_1 y_2})(X) = X(y_1 y_2) = X(y_1)X(y_2) = f_{y_1}(X) f_{y_2}(X)$.

$\varPhi$ ist injektiv: $y_1, y_2 \in G, y_1 \neq y_2$. $\hat{G}$ trennt die Punkte von G $\Rightarrow \exists X \in \hat{G}$ mit $X(y_1) \neq X(y_2)$, d. h. $f_{y_1} \neq f_{y_2}$. Weiterihnh ist $\varPhi$ surjektiv und ein Homöomorphismus. Also gilt:

Satz 5.7.4 (Pontrjagin-Dualität)
Sei G eine lokalkompakte abelsche Gruppe. Dann ist $\hat{\hat{G}} \cong G$, wobei $\varPhi \colon G \to \hat{\hat{G}}$ mit $(\varPhi(y))(X) := X(y)$ ein Gruppenisomorphismus und Homöomorphismus ist.

6. Wavelets

Die Entwicklung in Fourierreihen hat einen entscheidenden Nachteil. Die Basisfunktionen sind nicht lokalisiert, d. h. selbst für Funktionen, die „sehr lokal“ sind, braucht man alle basisfunktionen und Fourierkoeffizienten, um f zu rekonstruieren. Wavelets hingegen sind lokal und beheben diesen Nachteil. Daher sind sie für viele Anwendungen besser geeignet. Sie bieten schnellere Konvergenz und weniger Koeffizienten zur Rekonstruktion von Funktionen. Des Weiteren lassen sich auch schneller Algorithmen bauen.

6.1. Die Haarbasis in $L_p(\mathbb{R})$

Diese ist ein Beispiel für eine Waveletbasis, die weit vor der formalen Einführung von Wavelets gefunden wurde.

Definition
Das **Haarwavelet** ist die Funktion $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$H(x) = \begin{cases} +1 & x \in [0, 1/2) \\ -1 & x \in [1/2, 1) \\ 0 6 \text{sonst} \end{cases}$$

Das **Haarsystem** $\{H_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ besteht aus den Translationen und Dilatationen

$$H_{jk}(x) := 2^{j/2} H(2^j x - k)$$

Der Träger von H_{jk} ist das dyadische Intervall:

$$\Delta_{jk} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$$

Die Intervalle $\{\Delta_{jk}\colon k \in \mathbb{Z}\}$ bilden das j-te Level der dyadischen Intervalle. H_{jk} ist eine Haarfunktion aus dem j-ten Level.

wichtige Eigenschaften:

1. Zwei dyadische Intervalle haben folgende Lagemöglichkeiten: Entweder überlappen sie sich nicht oder eines ist im anderen enthalten.

2. Falls ein dyadisches Intervall in einem anderen dyadischen Intervall enthalten ist, so ist es entweder in der linken oder in der rechten Hälfte enthalten.

Satz 6.1.1
Das Haarsystem ist ein orthogonales System in $L_2(\mathbb{R})$.

Beweis:
1. $\|H_{jk}|L_2(\mathbb{R})\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |H_{jk}(x)|^2\,dx = \int_{\Delta_{jk}} 2^j\,dx = |\Delta_{jk}|2^j = 1$
2. $\langle H_{jk}, H_{j'k'}\rangle = \int_{\Delta_{jk}\cap\Delta_{j'k'}} H_{jk}(x)H_{j'k'}(x)\,dx$
   1. Fall $\Delta_{j'k'}$ und Δ_{jk} überlappen sich nicht $\Rightarrow \langle H_{jk}, H_{j'k'}\rangle = 0$
   2. Fall $\Delta_{j'k'} \subsetneq \Delta_{jk} \Rightarrow \Delta_{j'k'}$ ist entweder in der linken oder der rechten Hälfte. Dort ist H_{jk} konstant $2^{j/2}$ oder $-2^{j/2} \Rightarrow \langle H_{jk}, H_{j'k'}\rangle = -2^{j/2}\int_{\Delta_{j'k'}} H_{j'k'}(x)\,dx = 0$ ■

Satz 6.1.2
Das Haarsystem ist eine Orthonormalbasis in $L_2(\mathbb{R})$.

Folgerung
Jedes $f \in L_2(\mathbb{R})$ lässt sich schreiben als

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, h_{jk}\rangle H_{jk} \tag{6.1}$$

mit den Haar-Wavelet-Koeffizienten $\langle f, H_{jk}\rangle$. Diese reihe ist absolut konvergent in $L_2(\mathbb{R})$.

Nun ergibt sich folgende Frage: Sei $H \in L_p(\mathbb{R})$ für $1 \leq p\infty$, d. h. die Haar-Wavelet-Koeffizienten $\langle f, H_{jk}\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)H_{jk}(x)\,dx$ existieren für alle $j, k \in \mathbb{Z}$, $f \in L_p(\mathbb{R})$. Konvergiert die Reihe Gleichung 6.1 für $f \in L_p$ in L_p gegen f? Es zeigt sich, dass sie für $1 < p < \infty$ sogar unbedingt konvergiert, d. h. in jeder Reihenfolge. Dies war der Grund für Haar, das System zu konstruieren. Jetzt betrachten wir nur die „natürliche" Reihenfolge.

$$\begin{aligned} Q_j^\mu f &= \sum_{k\leq\mu} \langle f, H_{jk}\rangle H_{jk} \qquad \mu\in\mathbb{Z}, j\in\mathbb{Z} \\ P_r f &= \sum_{j<r}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, H_{jk}\rangle H_{jk} \qquad r\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Satz 6.1.3
Sei $1 < p < \infty$ und $f \in L_p(\mathbb{R})$. Dann gilt $\lim_{j\to\infty} P_r f \overset{L_p}{=} f$ und für jedes $r \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\lim_{\mu\to\infty} (P_r f + Q_r^\mu f) \overset{L_p}{=} P_{r+1} f$$

Vorlesungen ergänzen

6.2. Wavelets und Multiskalenanalysis

Definition
Ein Wavelet ist eine Funktion $\Psi \in L_2(\mathbb{R})$, so dass die Familie $\{\psi_{jk} \colon j,k \in \mathbb{Z}\}$ gegeben durch

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$$

eine Orthonormalbasis im Hilbertraum $L_2(\mathbb{R})$ ist. Eine solche Basis heißt **Waveletbasis**.

Beispiel (Haarwavelet)
Das Haarwavelet aus Satz 6.1.2 ist ein Wavelet.

Definition
Eine **Multiskalenanalyse** ist eine Folge $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ von Teilräumen von $L_2(\mathbb{R})$, so dass gilt

1. $\ldots, V_{-1} \subseteq V_0 \subseteq V_1 \ldots$
2. $\operatorname{span} \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j = L_2(\mathbb{R})$
3. $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{\emptyset\}$
4. $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}x) \in V_0$
5. $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$
6. Es existiert eine **Skalierungsfunktion** $\Phi \in V_0$ so, dass das System $\{\Phi(x-m) \colon m \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis in V_0 ist.

Beispiel
Die Räume

$$\begin{aligned} L_j &= \overline{\operatorname{span}}\{1_{\Delta_{jk}} \colon k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{f \in L_2(\mathbb{R}) \colon f \text{ konstant auf allen Intervallen } [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}) \text{ für } k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

aus Satz 6.1.2 formen eine Multiskalenanalyse mit Skalierungsfunktion:

$$\Phi = 1_{\Delta_{0,0}} = 1_{[0,1)}$$

Fakt: T_n und $2^{2/s}a_s$ sind Isometrien von $L_2(\mathbb{R})$. Der Beweis erfolgt durch Variablensubstitution.

Bemerkung

1. Die obigen Eigenschaften 1—3 bedeuten, dass man Funktionen aus $L_2(\mathbb{R})$ mit Funktionen aus V_j approximieren kann. Für $j \to \infty$ hat man Konvergenz in L_2.
2. Die Eigenschaften 4 und 5 bedeuten Invarianz der Räume V_j gegenüber Translation und Dilatation. Dabei heißt 4 $V_j = a_j(V_0)$ und 5 $V_0 = T_k(V_0)$ für $k \in \mathbb{Z}$.

3. Die sechste Eigenschaft bedeutet dann auch: Das System $\{2^{j/2}\Phi(2^j x - k)\colon k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Orthonormalbasis von V_j.
4. Redundanz der Bedigungen: Aus der sechsten ergibt sich die fünfte Bedingung und die dritte ist überflüssig. (Beweis erfolgt später)
5. a) Teilräume $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ sind Basisobjekte. Finde Skalierungsfunktion Φ

   b) Start mit Φ und setze $V_0 = \overline{\operatorname{span}}\{\Phi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$. Dann sind auch die V_j definiert.

Definition
Eine Folge (x_n) in einem Hilbertraum H ist eine **Rieszfolge**, wenn es Konstanten $0 < A \leq B$ gibt, so dass

$$A\left(\sum_n |a_n|^2\right)^{1/2} \leq \|\sum_n a_n x_n | H\| \leq B\left(\sum_n |x_n|^2\right)^{1/2}$$

für alle Folgen (a_n) von Skalaren gilt. Ist $\overline{\operatorname{span}}\{x_n\} = H$, so heißt (x_n) **Rieszbasis**.

Beispiel
Ein Orthonormalsystem ist eine Rieszfolge mit $A = B = 1$.

Satz 6.2.1
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Rieszbasis in H. Dann existiert eine Rieszbasis (x_n^*) von H aus biorthogonalen Funktionalen, d. h.

$$\langle x_n, x_n^* \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis:
Nehmen $l_2(\mathbb{Z}), e_n = (\ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ Einheitsvektoren, $I\colon l_2(\mathbb{Z}) \to H, I(e_n) = x_n$. Die Abbildung I ist ein Isomorphismus. Setzen $x_n^* = (I^{-1})^*(e_n)$. Dann ist auch (x_n^*) einen Basis von H und es gilt:

$$\langle x_n, x_n^* \rangle = \langle I(e_n), (I^{-1})^* e_m \rangle = \langle I^{-1} I(e_n), (e_m) \rangle = \delta_{nm}$$

Da $(I^{-1})^*$ ein Isomorphismus ist, ist (x_n^*) eine Rieszbasis. ∎

Folgerung
Sei (x_n) Rieszbasis in H. Dann existiert $0 < A \leq B$ mit $A\|x\| \leq (\sum_n |\langle x, x_n \rangle|^2)^{1/2}$.

Beweis:
$x = \sum_n a_n x_n^* \Rightarrow a_n = \langle x, x_n \rangle \Rightarrow (\sum_n |\langle x, x_n \rangle|^2)^{1/2} = (\sum_n |a_n|^2)^{1/2}$. ∎

Satz 6.2.2
Sei $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$ und $0 < A \leq B$. dann sind äquivalent:

1. Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von Skalaren gilt:

$$A\left(\sum_n |a_n|^2\right)^{1/2} \le \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\sum_n a_n \Phi(x-n)|^2\,dx\right)^{1/2} \le B\left(\sum_n |a_n|^2\right)^{1/2}$$

2. Für fast alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{A^2}{2\pi} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\Phi}(\xi+2\pi k)|^2 \le \frac{B^2}{2\pi}$$

Beweis:
„2⇒1“ Nach Satz 3.2.3 gilt .... Weiter haben wir Plancherel.

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{F}(\sum_n a_n\Phi(x-n))\|^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{F}(\sum_n a_n\Phi(x-n))|^2\,dx\right)^{1/2}\\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\sum_n a_n e^{-in\xi}|^2 |\hat{\Phi}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2}\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} \dots\\ &= (\int_0^{2\pi} |\sum_n a_n e^{-in\xi}|^2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{\Phi}(\xi+2\pi l)|^2\,d\xi\end{aligned}$$

Beweis nacharbeiten

„1⇒2“ Sei $t>0$.

$$A_t = \{\xi \in [0,2\pi)\colon \sum_k |\Phi(\xi+2\pi k)|^2 > t\}$$

A_t hat positives Lebesguemaß $\alpha > 0$. Fourreihe $1_{A_t}(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-in\xi}$.

$$\begin{aligned}\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\Phi(x-n)|L_2\|^2 &= \int_{A_t} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\Phi}(\xi+2\pi k)|^2\,d\xi > t\alpha\\ \Rightarrow \|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\Phi(x-n)|L_2\| &\ge \sqrt{t\alpha} \ge \sqrt{2\pi t}(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2)^{1/2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1_{A_t}(x)|^2\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\dots\end{aligned}$$

■

Bemerkung
Die erste Bedingung bedeutet, dass das System $\{\Phi(x-n, n \in \mathbb{Z}\})$ eine Rieszfolge ist, also eine Rieszbasis in seinem span ist.

Satz 6.2.3
Das System $\{\Phi(x-k)\colon k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Orthonormalsystem in $L_2(\mathbb{R})$ genau dann, wenn für fast alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\Phi}(\xi + 2k\pi)|^2 = \frac{1}{2\pi}$$

Beweis:
Siehe Satz 6.2.2 mit $A = B = 1$. ∎

Bemerkung
Sei Φ wie in Satz 6.2.2 mit A, B.

1. Jeder $g\overline{\operatorname{span}}\{\Phi(x-k)\colon k \in \mathbb{Z}\}$ lässt sich schreiben als $g(x) \overset{=}{L_2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\Phi(x-k)$.
2. $g \in \overline{\operatorname{span}}\{\Phi(x-k)\colon k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow \hat{g}(\xi) = \varphi(\xi)\hat{\Phi}(\xi)$ mit $\varphi \in L_2[0, 2\pi)$. Dabei ist $\hat{g}(\xi) = \sum a_n\hat{\Phi}(\xi)e^{-in\xi} = (\sum a_n e^{-in\xi}\hat{\Phi}(\xi)$. Weiter können wir schreiben: $1/B\|g|L_2(\mathbb{R})\| \leq (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(\xi)|^2\,d\xi)^{1/2} \leq 1/A\|g|L_2(\mathbb{R})\|$.

Satz 6.2.4
Sei $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$, so dass $\{\Phi(x-k)\colon k \in \mathbb{Z}\}$ eine Rieszfolge bilden. Dann existiert $\Phi_1 \in \overline{\operatorname{span}}\{\Phi(x-k)\}$, so dass $\{\Phi_1(x-k)\colon k \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis von $\overline{\operatorname{span}}\{\Phi(x-k)\}$ ist.

Beweis:
Müssen Φ_1 so definieren, dass $\hat{\Phi}(\xi) = \varphi(\xi)\hat{\Phi}(\xi)$ mit $|\varphi(\xi)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\Phi}(\xi+2k\pi)|^2)^{-1/2}$. Dabei ist $\Phi_1 \in \overline{\operatorname{span}}\{\Phi(x-k)\colon k \in \mathbb{Z}\}$ wegen der Bemerkung 2. Weiterhin ist $\{\Phi_1(x-k)\colon k \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthonormalsystem mit Satz 6.2.3. Denn

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\Phi}_1(\xi+2k\pi)|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}|\varphi(\xi)|^2|\hat{\Phi}(\xi+2k\pi)|^2 \\ &= |\varphi(\xi)|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\Phi}(\xi+2k\pi)|^2 = \frac{1}{2\pi}\end{aligned}$$

Es existieren $A, B > 0$ mit $A \leq |\varphi(\xi)| \leq B$ für fast alle ξ wegen Satz 6.2.2. Die Bemerkung 2 oben besagt, $\overline{\operatorname{span}}\{\Phi(x-k)\} = \{g\colon \hat{g}(\xi) = \varphi(\xi)\hat{\Phi}(\xi)\}$ und $\overline{\operatorname{span}}\{\Phi_1(x-k)\} = \{g\colon \hat{g}(\xi) = \psi(\xi)\hat{\Phi}_1(\xi)\}$. Diese sind aber identisch. ∎

6.3. Von der Skalierungsfunktion zur Multiskalenanalyse

Ziel: Skalierungsfunktion Φ erkennen an ihren Eigenschaften. Wir haben $\Phi \in V_0 \subseteq V_1 \Rightarrow \Phi(x/2) \in V_0 \Rightarrow \Phi(x/2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\Phi(x-n)$.

(Skalierungsgleichung a) $$\Phi(\frac{x}{2}) \overset{L_2}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \Phi(x-n)$$

(Skalierungsgleichung b) $$\Phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \Phi(2x-n)$$

Äquivalent:

(Skalierungsgleichung c) $$\hat{\Phi}(\xi) = m_\Phi({}^{\xi}/_{2})\hat{\Phi}({}^{\xi}/_{2})$$

(Skalierungsgleichung d) $$\hat{\Phi}(2\xi) = m_\Phi \hat{\Phi}(\xi)$$

Bemerkung
Weil gilt: $\|\Phi|L_2(\mathbb{R})\| = 1 \Rightarrow \|\Phi(\cdot/2)|L_2(\mathbb{R})\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 = 1/2$

Satz
Für fast alle ξ gilt $|m_\Phi(\xi)|^2 + |m_\Phi(\xi+\pi)|^2 = 1$.

Beweis:
Der Satz 6.2.3 liefert

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\Phi}(\xi+2k\pi)|^2 = 1/2\pi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |m_\Phi(\xi/2)\hat{\Phi}(\xi/2+k\pi)|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |m_\Phi(\xi/2+2k\pi)\hat{\Phi}(\xi/2+2k\pi)|^2 \\
&\quad + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |m_\Phi(\xi/2+\pi+2k\pi)|\hat{\Phi}(\xi/2+\pi+2k\pi)^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |m_\Phi(\xi/2)|^2 |\hat{\Phi}(\xi/2+2k\pi)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |m_\Phi(\xi/2+\pi)|^2 |\hat{\Phi}(\xi/2+\pi+2k\pi)|^2 \\
&= 1/2\pi(|m_\Phi(\xi/2)|^2 + |m_\Phi(\xi/2+\pi)|^2)
\end{aligned}$$

■

Satz 6.3.1
Sei $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$ mit den Eigenschaften:

1. $\{\Phi(x-n) \colon n \in \mathbb{Z}\}$ sind Rieszfolgen.
2. $\Phi(x/2) \overset{L_2}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \Phi(x-n)$
3. $\hat{\Phi}(\xi)$ ist stetig in 0 und $\hat{\Phi}(0) \neq 0$.

Dann bilden die Räume $V_j = \overline{\operatorname{span}}\{\Phi(x-n) \colon n \in \mathbb{Z}\}$ eine Multiskalenanalyse.

Beweis:
Die Eigenschaften 1, 4 und 5 in der Definition der Multiskalenanalyse folgen aus der Definition der V_j und 2. Die Eigenschaft 3 ergibt sich aus Satz 6.3.2 und Eigenschaft 4 ergibt sich aus Satz 6.3.3. Eigenschaft 6 ergibt sich nicht unmittelbar. Erst nach Anwendung von Satz 6.2.4 hilft hier weiter. ■

Satz 6.3.2
Es erfülle Φ die Bedingung 1 im Satz 6.3.1 und die V_j seien wie dort. Dann gilt für die orthogonalen Projektion P_j auf V_j:

$$\lim_{j\to-\infty} P_j f = 0 \qquad f \in L_2(\mathbb{R})$$

Insbesondere ist $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

Beweis:
Es reicht, die Behauptung für f mit kompaktem Träger ($\operatorname{supp} f \subseteq [-R,R]$) zu zeigen. Wir wissen, dass $\{\Phi(x-k)\colon k\in\mathbb{Z}\}$ eine Rieszbasis von V_0 bildet. Daraus folgt, dass $\{\Phi_{jk}\colon k\in\mathbb{Z}\}$ eine Rieszbasis von V_j ist. Mit den Konstanten A, B ist

$$\begin{aligned}
\|P_j f\|^2 &\le \frac{1}{A}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle P_j f,\Phi_{jk}\rangle|^2 = \frac{1}{A}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle f,\Phi_{jk}\rangle|^2\\
&= \frac{1}{A}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\int_{-\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} f\overline{\Phi_{jk}}|^2 \le \frac{1}{A}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\int_{-R}^{R}|f|^2\int_{-R}^{R}|\Phi_{jk}|^2\\
&= \frac{1}{A}|f|_2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-R}^{R}|\Phi_{jk}|^2 = \frac{1}{A}\|f\|_2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-R}^{R}2^j|\Phi(2^jx-k)|^2\,dx\\
&= \frac{\|f\|_2}{A}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-k-2^jR}^{-k+2^jR}|\Phi(u)|^2\,du|
\end{aligned}$$

Sei nun $2^jR < 1/2$. Dann sind die Integrationsintervalle disjunkt. und es gilt: $\frac{\|f\|_2}{A}\int_{u_j}|\Phi|^2$ mit $u_j = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}}[-k-2^jR, -k+2^jR]$. Damit ist das Integral 0 für $j\to-\infty$. ∎

Satz 6.3.3
Es erfülle Φ die Bedingung 1 in Satz 6.3.1 und auch die Bedingung 3. Weiter sei V_j wie oben. Dann ist $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ dicht in $L_2(\mathbb{R})$.

Beweis:
Es ist zu zeigen, dass es ein f gibt, dass auf allen V_j senkrecht steht und die Nullfunktion ist. Sei dazu $\hat{g} = \hat{f}1_{[-R,R]}$ und $\|f-g\|_2 > \varepsilon$ mit genügend großem R. Weiter sei P_j die orthogonale Projektion auf $V_j \Rightarrow P_f f = 0$ für alle $j\in\mathbb{Z} \Rightarrow \|P_j g\|_2 < \varepsilon$. Wir benutzen nun die Folgerung aus Satz 6.2.1:

$$\begin{aligned}
\|P_j g\|^2 &\ge B^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle P_j g,\Phi_{jk}\rangle|^2 = B^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle g,\Phi_{jk}\rangle|^2\\
&= B^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle \hat{g},\hat{\Phi}_{jk}\rangle|^2 = B^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\xi)2^{-j/2}e^{ik2^{-j}\xi}\hat{\Phi}(2^{-j}\xi)\,d\xi|^2\\
&= B^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\int_{-R}^{R}\hat{g}(\xi)2^{-j/2}e^{-ik2^{-j}\xi}\hat{\Phi}(2^{-j}\xi)\,d\xi|^2
\end{aligned}$$

Nun sei j so groß, dass $2^j\pi > R$, dann ist die obige Formel gleich

$$B^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big|\int\limits_{-2^j\pi}^{2^j\pi}\hat{g}(\xi)2^{-j/2}\hat{\Phi}(2^{-j}\xi)e^{ik2^{-j}\xi}\,d\xi\Big|^2$$

Das ist der $(-k)$-te Fourierkoeffizient der Funktion $\sqrt{2\pi}\hat{g}(\xi)\hat{\Phi}(2^{-j}\xi)$ auf $[-2^j\pi,2^j\pi]$ bezüglich des Orthonormalsystems $\{2^{-j/2}e^{ik2^{-j}\xi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\colon k\in\mathbb{Z}\}$. Die Parsevalsche Gleichung ergibt weiter $B^{-1}\int_{-2^j\pi}^{2^j\pi}2\pi|\hat{g}|^2|\hat{\Phi}(2^{-j}\xi)|^2\,d\xi = B^{-1}\int_{-R}^{R}2\pi|\hat{g}|^2|\hat{\Phi}(2^{-j}\xi)|^2\,d\xi \Rightarrow \varepsilon > \|P_jg\|^2 \geq B^{-1}|\hat{\Phi}(0)|^2 2\pi\|g\|_2^2 \Rightarrow \|g\|_2 \leq c\sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \|f\| < (c+1)\varepsilon \Rightarrow \|f\|_2 = 0 \Rightarrow f=0$ ■

6.4. Konstruktion von Wavelets aus Multiskalenanalysen

Ziel: Finde Wavelet $\psi\in V_1$, so dass gilt $\overline{\operatorname{span}}\{\psi_{jk}\colon k\in\mathbb{Z}, j<s\} = V_s$ für $s\in\mathbb{Z}$. Dazu betrachten wir: Sei $W_j\subseteq L_2$ Teilraum mit $V_j\oplus W_j = V_{j+1}$. Diese Summe ist eine orthogonale Summe. Zu Erinnerung: $J_jf(x) = f(2^jx) \Rightarrow J_jV_0 = V_j, J_jV_1 = V_{j+1}, V_{j+1} = J_j(V_0\oplus W_0) = J_j(V_0)\oplus J_j(W_0) \Rightarrow W_j = J_j(W_0)$. Wir brauchen $\psi\in W_0$, so dass $\{\psi(x-n)\colon n\in\mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis von W_0 ist. Dann liefern die skalierten Funktionen $\{2^{-j/2}\psi(2^jx-n)\colon n\in\mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis von $W_j \Rightarrow L_2 = \overline{\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}W_j}$. Wir wissen:

1. $g\in V_0 \Leftrightarrow \hat{g}(\xi) = \varphi(\xi)\hat{\Phi}(\xi)$ mit φ 2π-periodisch und $\|g\|_2 = \|\varphi|L_2[0,2\pi)\|$
2. $f\in V_1 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{2}g(2x)$ mit $g\in V_0$ und $\|f\|_2 = \|g\|_2$.

Somit erhalten wir $\hat{f}(\xi) = m_f(\xi/2)\hat{\Phi}(\xi/2)$ mit m_f als einer 2π-periodischen Funktion und $\|f\|_2 = \sqrt{2}\|m_f|L_2[0,2\pi)\|$.

Satz 6.4.1
$f\in W_0 \Leftrightarrow \hat{f}(\xi) = e^{i\xi/2}v(\xi)\overline{m_\Phi(\xi/2+\pi)}\hat{\Phi}(\xi/2)$ mit m_Φ aus Skalierungsgleichung (γ) und v 2π-periodisch.

$$\|f\|_2 = \|v|L_2[0,2\pi)\|$$

Beweis:
Es ist $f\in W_0 \Leftrightarrow f\in V_1\wedge f\perp V_0$. Zuerst nutzen wir die letzte Tatsache aus:

$$\begin{aligned} f\perp V_0 \Leftrightarrow \langle f,\Phi(x-k)\rangle = 0 &= \langle \hat{f},\widehat{\Phi(x-k)}\rangle \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi k}\overline{\hat{\Phi}(\xi)}\,d\xi \\ &= \int\limits_{0}^{2\pi}e^{i\xi k}\underbrace{\sum_{l\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\xi+2l\pi)\overline{\hat{\Phi}(\xi+2l\pi)}}_{=F(\xi)}\,d\xi \end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{Z}$. Somit erhalten wir $\langle f, \Phi(x-k)\rangle = 2\pi\hat{F}(-k) \Rightarrow \hat{F}(k) = 0$ für alle k und es folgt, $F(\xi) = 0$ für fast alle ξ. Weiter haben wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{l\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi+2l\pi)\overline{\hat{\Phi}(\xi+2l\pi)} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} m_f(\xi/2+l\pi)\hat{\Phi}(\xi/2+l\pi)\overline{m_\Phi(\xi/2+l\pi)}\overline{\hat{\Phi}(\xi/2+l\pi)} \\
&= m_f(\xi/2)\overline{m_\Phi(\xi/2)}\underbrace{\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\hat{\Phi}(\xi/2+2l\pi)|^2}_{=\frac{1}{2\pi}} \\
&\quad + m_f(\xi/2+\pi)\overline{m_\Phi(\xi/2+\pi)}\underbrace{\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\hat{\Phi}(\xi/2+\pi+2l\pi)|^2}_{=\frac{1}{2\pi}} \\
&= \frac{1}{2\pi}(m_f(\xi/2)\overline{m_\Phi(\xi/2)} + m_f(\xi/2+\pi)\overline{m_\Phi(\xi/2+\pi)}) \\
&\Rightarrow (m_f(\xi/2), m_f(\xi/2+\pi)) \perp (\overline{m_\Phi(\xi/2)}, \overline{m_\Phi(\xi/2+\pi)}) \\
&\Rightarrow m_f(\xi/2) = \alpha(\xi/2)\overline{m_\Phi(\xi/2+\pi)}, m_f(\xi/2+\pi) \\
&= -\alpha(\xi/2)\overline{m_\Phi(\xi/2)} \Rightarrow m_f(\eta) = \alpha(\eta)\overline{m_\Phi(\eta+\pi)}
\end{aligned}$$

Für $\eta = \eta+\pi$ folgt $m_f(\eta+\pi) = \alpha(\eta+\pi)\overline{m_\Phi(\eta)}$ und $m_f(\eta) = -\alpha(\eta+\pi)\overline{m_\Phi(\eta+\pi)} \Rightarrow \alpha(\eta) = -\alpha(\eta+\pi)$ und $m_f(\eta) = \alpha(\eta)\overline{m_\Phi(\eta+\pi)}$. Wir setzen $h(\eta) = e^{-i\eta}\alpha(\eta), h(\eta+\pi) = -e^{-i\eta}\alpha(\eta+\pi) = e^{-i\eta}\alpha(\eta) = h(\eta)$. Damit folgt, dass h 2π-periodisch ist und $m_f(\xi/2) = e^{i\xi/2}v(\xi)\overline{m_\Phi(\xi/2+\pi)}$. Die Normgleichung ist klar. ∎

Satz 6.4.2
Sei $f \in W_0$. Dann ist $\{f(x-n) \colon n \in \mathbb{Z}\}$ Orthonormalbasis von $W_0 \Leftrightarrow |v| = 1$ fast überall.

Beweis:
Es ist zu zeigen, dass $\frac{1}{2\pi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(\xi+2k\pi)|^2 = |v(\xi)|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|m_\Phi(\xi/2+k\pi)|^2|\hat{\Phi}(\xi/2+k\pi)|^2 = |v(\xi)|^2|m_\Phi(\xi/2)|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\Phi}(\xi/2+2k\pi)|^2 + |v(\xi)|^2|m_\Phi(\xi/2+\pi)|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\Phi}(\xi/2+\pi+2k\pi)|^2 = \frac{1}{2\pi}|v(\xi)|^2(|m_\Phi(\xi/2)|^2 + |m_\Phi(\xi/2+\pi)|) = \frac{1}{2\pi}|v(\xi)|^2$. ∎

Satz 6.4.3
Sei $\{V_j\}$ eine Multiskalenanalyse mit Skalierungsfunktion Φ. Dann ist $\psi \in W_0 = V_1 \ominus V_0$ ein Wavelet, genau dann wenn

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2}v(\xi)\overline{m_\Phi(\xi/2+\pi)}\hat{\Phi}(\xi/2)$$

mit v 2π-periodisch und $|v| = 1$ fast überall. Dann gilt

$$V_s = \overline{\operatorname{span}}\{\psi_{jk} \colon k \in \mathbb{Z}, j < s\}$$

Explizite Formel für $v \equiv 1$: $\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2}\overline{m_\Phi(\xi/2+\pi)}\hat{\Phi}(\xi/2)$, $m_\Phi(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{-ik\xi}$ mit $a_k \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x/2)\overline{\Phi(x-k)}\,dx$. Einsetzen ergibt $\hat{\psi}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 1/2\overline{a_k}(-1)^k e^{i(k+1)\xi/2}\hat{\Phi}(\xi/2$ und $\xi(\xi) = \sum 1/2\overline{a_k}(-1)^k\Phi(2x+k+1)$

6.5. Mayer-Wavelets

Sei $\Theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

1. $0 \leq \Theta \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
2. $\Theta(\xi) = \Theta(-\xi)$
3. $\Theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ für $|\xi| < {}^{2}\!/\!{3}\pi$
4. $\Theta(\xi) = 0$ füt $|\xi| > {}^{4}\!/\!{3}\pi$
5. $\Theta^2(\xi) + \Theta(\xi - 2\pi) = \frac{1}{2\pi}$ für $0 \leq \xi \leq 2\pi$

Funktion zeichnen

Man kann $\Theta \in C^\infty$ wählen. Setze Φ so, dass $\hat{\Phi} = \Theta$. Da $\hat{\Phi}$ einen kompakten Träger hat, folgt $\Phi \in C^\infty$.

Satz 6.5.1
Φ ist Skalierungsfunktion einer Multiskalenanalyse. Die zugehörige Funktion m_Φ ist gegeben durch $m_\Phi(\xi) = \sqrt{2\pi}\Theta(2\xi)$ für $\xi \in [-\pi, \pi]$.

Beweis:
Nach Satz 6.3.1 müssen wir zeigen:

1. $\{\Phi(x-n) \colon n \in \mathbb{Z}\}$ ist Rieszfolge.
2. $\Phi(x/2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \Phi(x-n)$
3. $\hat{\Phi}(\xi)$ stetig in 0 und $\hat{\Phi}(0) \neq 0[B$

Die dritte Eigenschaft wird aus der Konstruktion sofort klar. Somit müssen wir die erste und zweite zeigen. bei der ersten zeigen wir sogar, dass das ein Orthonormalsystem ist. Zu 1: $\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{\Phi}(\xi + 2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi}$. Nach dem Satz 6.2.3 ist das ein Orthonormalsystem.

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\Theta(\xi + 2\pi l)|^2 = |\Theta(\eta)|^2 + |\Theta(\eta + 2\pi)|^2 = 1$$

In der Reihe treten nur zwei Funktionswerte ungleich 0 auf. Daher obige Gleichheit.

Zu 2: Sei $\psi(\xi) = \sqrt{2\pi}\Theta(2\xi)$ für $\xi \in [-\pi, \pi]$, 2π-periodisch, $\Theta(2\xi) = \psi(\xi)\Theta(\xi)$:

1. Fall $|\xi| > {}^{4}\!/\!{3}\pi \Rightarrow \Theta(2\xi) = 0 = \Theta(\xi)$

2. Fall ${}^{2}\!/\!{3}\pi \leq |\xi| \leq {}^{4}\!/\!{3}\pi \Rightarrow \Theta(2\xi) = 0 = \psi(\xi)$

3. Fall $0 \leq |\xi| < {}^{2}\!/\!{3}\pi \Rightarrow \Theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \Theta(2\xi) = \frac{\psi(\xi)}{\sqrt{2\pi}} = \psi(\xi)\Theta(\xi)$

Damit haben wir gezeigt, $\hat{\Phi}(2\xi) = \psi(\xi)\hat{\Phi}(\xi)$. Das ist die Form (δ) der Skalierungsgleichung mit $m_\Phi = \psi$. Der Punkt 2 ist die äquivalente Form (α) der Skalierungsgleichung. ∎

Konstruktion des Wavelets

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum {}^1\!/_2\overline{a_n}(-1)^n \Phi(2x+n+1)\\ \hat{\psi}(\xi) &= e^{i\xi/2} m_\Phi(\xi/2+\pi)\hat{\Phi}(\xi/2)\\ &= e^{i\xi/2}\psi(\xi/2+\pi)\Theta(\xi/2)\end{aligned}$$

Eigenschaften von ψ und $\hat{\psi}$

1. $\operatorname{supp}\hat{\psi} \subseteq [-8/3\pi, -2/3\pi] \cup [2/3\pi, 8/3\pi]$
2. ψ ist reellwertig, $\psi \in C^\infty$
3. $\psi(-1/2 - x) = \psi(-1/2 + x)$

Wichtig $\psi, \hat{\psi} \in C^\infty$ sind glatt. Beide Funktionen sind schnell fallend. Gerade die letzte Eigenschaft ist wichtig für gute/schnelle Approximation durch Waveletentwicklungen.

6.6. Spline-Wavelets

Definition
Sei $a \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \ldots$. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **Spline** n-ter Ordnung mit Knoten in $a\mathbb{Z}$, wenn gilt $f \in C^{n-1}(\mathbb{R})$ und $f|_{[ka,(k+1)a]}$ ist Polynom höchstens n-ter Ordnung.

Wir führen ein $S^n(a\mathbb{Z})$. Das ist die Menge der Splines der Ordnung n auf $a\mathbb{Z}$. Es reicht aus, wenn wir uns mit $S^n(\mathbb{Z})$ beschäftigen. Aus den B-Splines kann man die anderen „herstellen". Für die B-Splines gilt:

$$N_0 = 1_{[01,]} \qquad N_{n+1} = N_0 * N_n = \underbrace{N_0 * \ldots * N_0}_{(n+1)\times}$$

Beispiel

$$\begin{aligned}N_1(x) = N_0 * N_0(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} 1_{[0,1]}(y)1_{[0,1]}(x-y)\,dy = \int_0^1 1_{[0,1]}(x-y)\,dy\\ &= \begin{cases} 0 & x > 2, x < 0\\ x & 0 \le x \le 1\\ 1-x & 1 \le x \le 2\end{cases}\end{aligned}$$

Schauen wir uns noch N_2 an: $N_2(x) = \int_0^1 N_1(x-y)\,dy = \begin{cases} 0 & x<0, x>3 \\ x^2/2 & 0 \le x \le 1 \\ ax^2+bx+c & 1 \le x \le 2 \\ \frac{(3-x)^2}{2} & 2 \le x \le 3 \end{cases}$

Eigenschaften

- $N_n(x) > 0$ für $x \in (0, n+1)$ und $\operatorname{supp} N_n = [0, n+1]$
- $N_n \in S^n(\mathbb{Z})$
- $\sum_{k\in\mathbb{Z}} N_n(x-k) = 1$
- $N_n(\frac{n+1}{2} - x) = N_n(\frac{n+1}{2} + x)$
- N'_{n+1}(x)$= N_n(x) - N_n(x-1)$
- N_n ist bis auf konstanten Faktor einziger Spline n-ter Ordnung mit Träger $[0, n+1]$

Satz 6.6.1
Das System $\{N_n(x-k)\colon k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Rieszfolge in $L_2(\mathbb{R})$. Jedes $f \in S^n(\mathbb{Z})$ lässt sich eindeutig als $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k N_n(x-k)$ schreiben.

Folgerung
Für jedes $n = 0, 1, 2, \dots$ bilden die Räume $S_2^n(2^{-j}\mathbb{Z}) = S^n(2^{-j}\mathbb{Z}) \cap L_2(\mathbb{R})$ mit $j \in \mathbb{Z}$ eine Multiskalenanalyse.

Skalierungsfunktion: $\hat{\Phi}(\xi) = (\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{N}_n(\xi - 2\pi k)|^2)^{-1/2}$, $\Phi(x) = \sum a_n N_n(x-k)$. Somit hat das Wavelet die Form $\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{a_k}(-1)^k \Phi(2x+n+1)$

7. Anwendungen der harmonischen Analysis

7.1. Grundlegende Anwendungen für Wavelets

Wir wollen zwei konkrete Beispiele betrachten. Das ist zum einen die Datenkompression von Bildern und Tönen und zum anderen ein Rauschfilter.

Wavelets wurden durch eine Funktion beschrieben. Daraus wurden Translationen und Dilatationen angewendet. Das Ganze soll eine Orthonormalbasis in $L_2(\mathbb{R})$ werden. Weiter haben wir eine Multiskalenanalyse, welche eine Skalierungsfunktion beschreibt. Die Skalierungsfunktion übersetzt die Funktion aus V_0 in V_1. Die Skalierungsgleichung ist $\Phi(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\Phi(2x-k)$. Das ist Ausdruck von $V_0 \subseteq V_1$. Das übersetzt sich für die Fouriertransformation in $\hat{\Phi}(2\xi) = m_\Phi(\xi)\hat{\Phi}(\xi)$ mit $m_\Phi(\xi) = \sum a_k e^{-ik\xi}$. Bei den Ingenieuren heißt m_Φ **Tiefpassfilter**. Das Wavelet kann man gewinnen durch $\hat{\psi}(2\xi) = \underbrace{e^{i\xi}\overline{m_\Phi(\xi+\pi)}}_{=:\, m_\psi(\xi)}\hat{\Phi}(\xi)$ mit $\psi(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\Phi(2x-k)$ und $m_\psi(\xi) = \sum b_k e^{-ik\xi}$. Dabei ist $b_k = (-1)^{k+1}a_{-k+1}$. m_ψ wird auch als **Hochpassfilter** bezeichnet.

Momentenbedingungen Es gilt, dass Φ kompakten Träger hat. Damit folgt, $\hat{\Phi} \in C^\infty$ und m_φ, m_ψ sind trigonometrische Polynome. Das impliziert, dass $m_\Phi(0) = 1 = m_\psi(0), \int\Phi = 1, \int\psi = 0$. Wir können jedes f darstellen als $f = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}}\langle f, \psi_{jk}\rangle\psi_{jk}$. Unser Wunsch ist, dass aus der Bedigung f glatt folgt, dass nur „wenige" Koeffizienten groß sind. Das impliziert aber $\int_{\mathbb{R}} x^n\psi(x)\,dx = 0$ für $0 \le n \le m$. Dies heißt **Momentenbedingung** der Ordnung n. Das ist genau dann erfüllt, wenn $\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k k^n = 0$.

Interskalenbeziehungen Wir haben

$$\begin{aligned}\langle f, \Phi_{jn}\rangle &= \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{a_{k-2n}} \times \langle f, \Phi_{j+1,k}\rangle\\ \langle f, \psi_{jn}\rangle &= \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{b_{k-2n}}\langle f, \Phi_{j+1,k}\rangle\end{aligned}$$

Beide Formeln sind umgeschriebene Skalierungsgleichungen. Es gilt (nach Anwendung einer Indexverschiebung):

$$\Phi(x-n) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\Phi(2x-(2n+k)) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k-2n}\Phi(2x-k)$$

Weiter will man ein j dazu haben: $\Phi(2^j x - n) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k-2n}\Phi(2^{j+1}x - k)$ und es ergibt sich: $2^{j/2}\Phi(2^j x - n) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k-2n}2^{j+1/2}\Phi(2^{j+1}x - k)$. Daraus folgt, $\Phi_{jn}(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k2-n}\Phi_{j+1,k}(x)$. Warum ist dies nun gut anwendbar?

Diskrete Wavelettransformation Durch $\langle f, \Phi_{jk}\rangle$ erhalten wir den Mittelwert von f im Intervall $[2^{-j}(x-k), 2^{-j}(x-k+1)]$. Sei $f_{jk} = \langle f, \Phi_{jk}\rangle$ und die $(f_{jk} \colon k \in \mathbb{Z}) = F_j$ sind die Koeffizienten in der Skala j. In der Praxis hat man eine Folge f_k gegeben. Das sind die Abtastwerte oder Samples. Wir interpretieren f_k als Mittel einer stetigen Funktion f in der Skala 0, d. h. $f_k = \langle f, \Phi_{0k}\rangle, F_0 = (f_k)$. Das Signal wird zerlegt in $F_{-1} = (\langle f, \Phi_{-1,k}\rangle)$ und $R_{-1} = (\langle f, \psi_{-1,k}\rangle)$. Danach wird F_{-1} wieder zerlegt usw. Man kann das Ganze für $j > 0$ so darstellen: Man jagt F_{-j+1} durch den Tiefpassfilter $\overline{m_\Phi}$, geht eine Skala runter und erhält F_{-j}. Genauso macht man es mit den Hochpassfilter.

In der Realität gibt es nur eine endliche Folge von $N = 2^M$ Abtastwerten. Das wird periodisch fortgesetzt. Im ersten Schritt werden zwei Mittel durch eins ersetzt. Nach N Schritten ist die Folge F_m konstant. Damit erhalten wir $(R_{-1}, R_{-2}, \dots, R_{-m}, F_{-m})$. Das sind insgesamt $2^{M-1}, 2^{M-2}, \dots, 2^0, 1 = 2^M$ Werte. Aus diesen Werten kann man das Ausgangssignal rekontruieren: Wir starten mit F_{-j}, R_{-j} und schicken das F_{-j} durch m_Φ und skalieren das nach oben. Das R_{-j} durch m_ψ und skalieren das nach oben. Anschließend werden beide addiert und man erhält F_{-j+1}.

7.2. Die schnelle Fouriertransformation

Die Grundlage hierfür ist die Fouriertransformation auf $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$. Betrachten $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Dann ist $F_n \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ die Fouriermatrix. Es gilt $F_n = (\omega^{hk})_{h,k=0}^{n-1}$. Für $n = 4$: $F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$, $y = F_n x$ liefert die Fouriertransformation von x. Im naiven Ansatz benötigt man einen Aufwand von $\mathcal{O}(n^2)$.

Die *schnelle* Fouriertransformation (FFT) hat eine Komplexität von $\mathcal{O}(n \log n)$. Damit das funktioniert, muss n gerade (eigentlich einer Zweierpotenz) sein. Setzen $n = 2m$ und $y' = (y_0, y_2, y_4, \dots, y_{n-2}) \in \mathbb{C}^m, y'' = (y_1, y_3, y_5, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{C}^m$. Es ist $y'_k = y_{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{h(2k)} x_k$. Diese Summe wird in zwei Bestandteile geteilt: $y_{2k} = \sum_{h=0}^{m-1} \omega^{h(2k)} x_k + \sum_{h=0}^{m-1} \omega^{(h+m)2k} x_{h+m} = \sum_{h=0}^{m-1} (\omega^2)^{hk}(x_h + x_{h+m}) = \sum_{h=0}^{m-1} \tilde{\omega}^{hk}(x_h + x_{h+m})$. Somit ist $y' = F_m x'$ mit $x'_k = x_h + x_{h+m}$.

Beginn der Vorlesung vom 2007-07-18

Die **inverse Fouriertransformation** (IFFT) ist definiert als

$$F_N^{-1} = \frac{1}{n} F_n(\omega^{-1}) = \frac{1}{n}(\omega^{-hk})_{h,k=0}^{n-1}$$

Polynommultiplikation

$$P(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k x^k$$
$$Q(x) = \sum_{k=0}^{s} b_k x^k$$
$$R(x) = P(x)Q(x) = \sum_{k=0}^{r+s} c_k x^k$$
$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Die Komplexität der obigen Operationen entspricht $\mathcal{O}(n^2)$, was zu langsam ist. $P(x)$ ist gegeben durch $(r+1)$-Werte $P(x_0), \ldots, P(x_r)$. Diese Darstellung nennt man Stützstellendarstellung. Zur Berechnung von $R(x_0), \ldots, R(x_n)$ aus aus den Werten $P(x_0), \ldots, P(x_n)$ und $Q(x_0), \ldots, Q(x_n)$ braucht man $\mathcal{O}(m)$ Zeit. Wir wählen die Stützstellen komplex: $x_k = \omega^k$. Dabei ist ω eine primitive n-te Einheitswurzel mit $n > r + s$. Nun ist $y_k = P(x_k) = P(\omega^k) = \sum_{k=0}^{r} a_k \omega^{hk} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{hk}$ für $a_k = 0$ für $k > r$. Wir erkennen die Fouriertransformation wieder. Es ist $y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) = F_n(a), a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$.

Der Übergang von der Koeffizienten- zur Stützstellendarstellung braucht $\mathcal{O}(n \log n)$ Zeit. Der folgende Algorithmus funktioniert:

1. Wähle $n > r + s$
2. Füllen den Vektor $a = (a_0, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0)$ mit Nullen auf. Ebenso mit b.
3. Berechnung der Fouriertransformation der Reihen $y = F_n(a), z = F_n(b)$
4. Berechnung von $u = y \cdot z$ (komponentenweise)
5. Berechnung von $c = F_n^{-1}(u)$ mit der IFFT.

Beispiel
Sei $P(x) = x^2 + 4x - 7, Q(x) = 2x - 3$. Für $n = 4$ ist $a = (-7, 4, 1, 0), b = (-3, 2, 0, 0)$ und

$$F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{4}F_4(-i) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich $y = F_4 a = (-2, -8+4i, -10, -8-4i), z = F_4 b = (-1, -3+2i, -5, -3-2i)$ und u erhält man durch $u = yz = (2, 16 - 28i, 50, 16 + 28i)$. $c = {}^1\!/_4 F_4^{-1}(-i)u = (21, -26, 5, 2)$. Also ergibt sich das Polynom mit $R(x) = 2x^3 + 5x^2 - 26x + 21$.

Multiplikation großer Zahlen Die Zahl 5637 wird beispielsweise als $5x^2 + 6x^2 + 3x + 7 = P(x)$ geschrieben, d. h. man wandelt die Zahl in ein Polynom um. Mit diesem Polynom wird dann die oben beschriebene schnelle Fouriertransformation durchgeführt. Auf diese Weise erreicht man ebenfalls eine Komplexität von $\mathcal{O}(n \log n)$.

Polynominterpolation Wir haben eine Funktion f gegeben. und suchen ein Polynom kleiner oder gleich n-ten Grades. Dieses muss an $n + 1$ stellen mit der Funktion übereinstimmen.

7.3. Eine Anwendung in der euklidischen Ramsey-Theorie

Satz 7.3.1 (Ramsey)
Sei K_N ein vollständiger Graph mit N Knoten. Färben Kanten von K_N mit r Farben. Zu gegebenen r, n gibt es N, so dass jeder so gefärbte K_N einen einfarbigen K_n enthält.

Bemerkung
Allgemein kann man sagen, dass sich in „genügend großen" Strukturen immer „reguläre" Strukturen finden lassen.

Euklidische Ramsey-Theorie Färbe $\mathbb{R}^2$ mit r Farben. Finden wir immer 2 Punkte mit Abstand 1 und gleicher Farbe? Für $r = 2$ ist die Antwort ja, wie auch für $r = 3$ (Mosergraph). Für $r = 7$ ist die Antwort nein.Für $r = 4, 5, 6$ ist das ein offenes Problem. Das r heißt **chromatische Zahl** der Ebene.

Definition
$K \subseteq \mathbb{R}^d$ endlich heißt **Ramsey**, falls es zu jedem r ein $d' \geq d$ gibt, so dass jede Färbung des $\mathbb{R}^{d'}$ eine kongruente Kopie von K enthält.

Bisher hat man folgende Ergebnisse:

1. K muss sphärisch sein.
2. K affin unabhängig ist Ramsey und die Eckpunkte eines regulären n-Ecks.
3. Offen ist, ob jedes sphärische K ein Ramsey ist.

Für „dichte" Mengen haben wir folgende Ramsey-Resultate: $A \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar. Man bildet die **obere Dichte** von A:

$$\delta(A) = \limsup_{R \to \infty} \frac{|B(0, R) \cap A|}{|B(0, R)|}$$

Satz 7.3.2 (Bourgain)
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ endlich, affin unabhängig und $\delta(A) > 0$. Dann enthält A eine kongruente Kopie von λK für $\lambda \geq \lambda_0(A)$

Satz 7.3.3 (Katznelson-Weiss)
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2, \delta(A) > 0$. Dann existiert λ_0, so dass für alle $\lambda \geq \lambda_0$ enthält zwei Punkte mit Abstand λ.

Satz 7.3.4
Sei $\varepsilon > 0, A \subseteq B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2, |A| = \varepsilon$. Dann existiert $j_0 = j_0(\varepsilon)$, so dass für $1 = t_0 > t_1 > \cdots > t_0$ und $t_{n+1} \leq 1/2 t_n$ gilt: A enthält zwei Punkte mit Abstand t_j für ein $j \leq j_0$.

Beweis:
Sei σ das Lebesguemaß auf dem Torus (Sphäre im $\mathbb{R}^2$). Es ist $\hat{\sigma}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\xi}\, d\sigma(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(\xi_1 \cos\theta + \xi_2 \sin\theta)}\, d\theta$. Dabei hängt $\hat{\sigma}(\xi)$ nur von $\|\xi\|_2$ ab. Damit folgt, dass $\hat{\sigma}$ reell ist, denn $\overline{\hat{\sigma}(\xi)} = \hat{\sigma}(-\xi) = \hat{\sigma}(\xi)$. Sei nun $\|\xi\|_2 = t$. Dann ist $\hat{\sigma}(\xi) = \hat{\sigma}(t,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re e^{-t\cos\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t\cos\theta)\, d\theta$. Diese Funktion bezeichnet man als **Besselfunktion**. Wir brauchen weiter $|1 - \hat{\sigma}(\xi)| = \mathcal{O}(\|\xi\|_2)$ für $\|\xi\|_2 \to 0$ und $|\hat{\sigma}(\xi)| = \mathcal{O}(\|\xi\|_2^{-1/2})$ für $\|\xi\|_2 \to \infty$.

Die Idee für den weiteren Beweis ist: Führe zu gegebenem t ein Maß auf der Menge der Punktepaare mit Abstand t ein und zeige, dass dieses Maß für Punktepaare in A positiv ist. Sei u ein Einheitsvektor. Dann lässt sich y mit $y = x - tu$ darstellen. Das Maß ist das Produktmaß aus dem Lebesguemaß und σ. Für die weiteren Betrachtungen ist t zunächst fest und M sei das Maß der Punktepaare mit Abstand t und Punkte in A:

$$\begin{aligned} M &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} 1_A(x) 1_A(x - tu)\, dx\, d\sigma(u) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^2} 1_A(x) 1_{-A}(tu - x)\, dx}_{F(y) = 1_A * 1_{-A}(y)}\ d\sigma(u) \end{aligned}$$

$$\hat{F}(\xi) = \hat{1}_A(\xi)\hat{1}_{-A}(\xi) = \hat{1}_A(\xi)\overline{\hat{1}_A(\xi)} = |\hat{1}_A(\xi)|^2$$

Fourierinversion

$$\begin{aligned} F(y) &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\hat{1}_A(\xi)|^2 e^{iy\xi}\, d\xi \\ M &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} F(tu)\, d\sigma(u) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\hat{1}_A(\xi)|^2 e^{itu\xi}\, d\sigma(u)\, d\xi \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\hat{1}_A(\xi)|^2 \hat{\sigma}(t\xi)\, d\xi \end{aligned}$$

Sei nun $\eta = c\varepsilon^2$ für c klein und $t \geq \eta$. Dann ist $M_i = \int_{R_i} |\hat{1}_A(\xi)|^2 \hat{\sigma}(t\xi)\, d\xi$ und $M = M_1 + M_2 + M_3$. Wir zeigen $M_1 = \Omega(\varepsilon^2)$ und $|M_2|, |M_3| \ll \varepsilon^2$.

Zunächst betrachten wir $\xi \in R_1 \Rightarrow \|t\xi\|_2 \leq \eta \leq c$. Es ergibt sich daraus $\hat{\sigma}(t\xi) \geq 1/2$ für c klein genug. Wegen $t \leq \eta$ folgt, dass der einheitskreis in R_1 enthalten ist. Somit können wir das Integral nach unten abschätzen: $M_1 \geq 1/2 \int_{B(0,1)} |\hat{1}_A(\xi)|^2\, d\xi$. Jetzt behaupten wir, dass $|\hat{1}_A(\xi) - \varepsilon| = \mathcal{O}(\|\xi\|_2 \varepsilon)$ für $\|\xi\|_2 \to 0$. (Nachweis als Übung) Somit folgt $M_1 \geq \Omega(\varepsilon^2)$.

Für M_3 haben wir $|\hat{\sigma}(t\xi)| = \mathcal{O}(\sqrt{\eta})$. Es ist:

$$\begin{aligned}|M_3| &= \mathcal{O}(\sqrt{\eta}) \int\limits_{R_3} |\hat{1}_A(\xi)|^2 \, d\xi = \mathcal{O}(\sqrt{\eta}) \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\hat{1}_A(\xi)|^2 \, d\xi \\ &= \mathcal{O}(\sqrt{\eta}) \int\limits_{\mathbb{R}^2} |1_A(x)|^2 \, dx = \mathcal{O}(\sqrt{\eta}\varepsilon) = \mathcal{O}(\sqrt{c}\varepsilon^2) \ll \varepsilon^2\end{aligned}$$

Zuletzt müssen wir noch M_2 abschätzen. Es ist $|M_2| = \mathcal{O}(1) \int_{R_2(t)} |\hat{1}_A(\xi)|^2 \, d\xi$ für ein $t = t_j$ mit $j \leq j_0$. Wir wissen $\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{1}_A(\xi)|^2 \, d\xi = \varepsilon$. Finde nun genügend viele t_j mit disjunkten $R_2(t)$: $t' < \eta^2 t \Rightarrow R_2(t') \cap R_2(t) = \emptyset$. Fixiere nun $q, m \in N$ in Abhängigkeit von ε, so dass gilt $2^{-q} < \eta^2 = c^2\varepsilon^4$ und $m \geq \frac{C}{\varepsilon}$ für großes C. Betrachten nun $t_q, t_{2q}, t_{3q}, \ldots, t_{mq}$. Die $R(t_{hq})$ für $h = 1, \ldots, m$ sind paarweise disjunkt: $\frac{t_{(h+1)q}}{t_{hq}} \leq 2^{-q} < \eta^2$. Wir wissen $\sum_{h=1}^{m} |M_2(R_{hq})| \leq \varepsilon$. Damit gibt es mindestens ein h_0 mit $|M_2(R_{h_0 q})| \leq \varepsilon/m \leq \varepsilon^2/C \ll \varepsilon^2$. ■

8. Dirichlet-Theorem

Satz 8.0.5 (Dirichlet-Theorem)
Sind $q, l \in \mathbb{N}$ teilerfremd, so gibt es unendlich viele Primzahlen der Form

$$k \cdot q + l \qquad k \in \mathbb{N}$$

Dieses Theorem wollen wir mit Mitteln der Fourieranalysis beweisen. Dazu legen wir die Gruppe der primen Restklassen modulo q fest:

$$\mathbb{Z}_q^* = \{x \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} | \exists y \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \colon xy \equiv 1 \mod q\}$$

8.1. Euklids Beweis für die Unendlichkeit der Primzahlen

Wir nehmen an, dass es nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_N$ gibt. Diese werden multipliziert: $m = p_1 \cdot \ldots \cdot P_N$. Dann ist $m+1$ *keine* Primzahl, aber durch eine Primzahl teilbar (Primfaktorzerlegung). Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.

Bemerkung
Analog folgt das Dirichlet-Theorem für $q = 4$ und $l = 3$. Denn nehmen wir an, es existieren nur endliche viele Primzahlen der Form $4k + 3$ mit $k \in \mathbb{N}$.

fehlende Vorlesung einfügen

8.2. Dirichlet-Charaktere

Wir gehen von einem festen q aus und von $G = \mathbb{Z}_q^*$ mit der Eulerschen φ-Funktion $\varphi(g) := |G| = |\mathbb{Z}_q^*|$. Dann ist die **charakteristische Funktion** der Restklasse $l \mod q$

$$\delta_l := \begin{cases} 1 & n \equiv l \mod q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das bedeutet, $\delta(m) = 0$, wenn m und q nicht teilerfremd sind.

Sei $e\colon \hat{G} \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta_l}(e) &= \frac{1}{\sqrt{\varphi(q)}} \sum_{n\in G} \delta_l(n)\overline{e(n)} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(q)}}\overline{e(l)} \\
\delta_l(n) &= \frac{1}{\sqrt{\varphi(q)}} \sum_{e\in\hat{G}} \widehat{\delta_l} e(n) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{e\in\hat{G}} e(n)\overline{e(l)}
\end{aligned}$$

Definition (Dirichlet-Charakter)
Die Fortsetzung von δ_l auf $\mathbb{Z}$ wird als **Dirichlet-Charakter** bezeichnet:

$$\chi(m) := \begin{cases} e(m) & m \nmid q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung

- Der **trivialer Dirichlet-Charakter** ist:

$$\chi_0(m) = \begin{cases} 1 & m \nmid q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Es gilt weiter: $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$. Zum Nachweis müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Seien zunächst m und n teilerfremd zu q. Dann ist auch $m \cdot n$ teilerfremd zu q und es folgt, $\chi(mn) = e(mn) = e(m)e(n) = \chi(m)\chi(n)$.

  Im andern Fall sei m teilerfremd zu q und n nicht teilerfremd. Dann ist auch mn nicht teilerfremd zu q. Insgesamt folgt damit: $\chi(mn) = e(mn) = 0 = e(m)0 = \chi(m)\chi(n)$.

Insgesamt können wir folgern, dass $\sum_{p\equiv l} \frac{1}{p^s} \xrightarrow{s\searrow 1} \infty$. Also gibt es unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv l$. Zum Nachweis betrachten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{p\equiv l} \frac{1}{p^s} = \sum_p \frac{\delta_l(p)}{p^s} &= \sum_p \frac{1}{p^s} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_\chi \chi(p)\overline{\chi(l)} \\
&= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_\chi \overline{\chi(l)} \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} \\
&= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{p\nmid q} \frac{1}{p^s} + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi(l)} \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}
\end{aligned}$$

Die letzte Summe geht für $s \searrow 1$ gegen ∞, falls $\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$ beschränkt ist. Die erste Summe im Ausdruck kann man auch schreiben als $\frac{1}{\varphi(q)} \sum_p \frac{1}{p^s} - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{p|q} \frac{1}{p^s}$.

Satz 8.2.1
Sei $\chi \neq \chi_0$. Dann bleibt für $s \searrow 1$ die Summe $\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$ beschränkt.

8.3. Die Dirichletsche L-Funktion

Man bezeichnet $L(s,\chi) := \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}$ mit $s > 1$ und χ als dem Dirichlet-Charakter als die **Dirichletsche L-Funktion**.

Bemerkung

- Aus $s > 1$ folgt, dass $L(s,\chi)$ eine absolut konvergente Reihe ist.
- $L(s,\chi)$ ist stetig in $s > 1$.

Satz 8.3.1
Sei $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ mit $\sum_n |a_n| < \infty$ und $a_n \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-a_n} \neq 0 \text{ und konvergiert}$$

Beweis:
Sei o. B. d. A. $|a_n| < 1/2$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-a_n} &= \prod_{n=1}^{N} \exp(\log(\frac{1}{1-a_n})) = \exp(\sum_{n=1}^{N} \log(\frac{1}{1-a_n})) \\
&\neq 0 \\
\left|\sum_{n=1}^{N} \log(\frac{1}{1-a_n})\right| &= \sum_{n=1}^{N} \left|\log(\frac{1}{1-a_n})\right| = \sum_{n=1}^{N} |-\log(1-a_n)| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} |a_n| + \underbrace{\mathcal{O}(|a_n|^2)}_{\leq |a_n|} \leq 2\sum_{n=1}^{N} |a_n| \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty
\end{aligned}$$

■

A. Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten der Funktionen:

   a) $\mathbb{1}_{[a,b)}$ die charakteristische Funktion von $[a, b) \subseteq [0, 2\pi)$.

   b) $f(x) = |x|$

   c) $f(x) = e^{aix}$ mit $a \notin \mathbb{Z}$

2. Eventuell noch die Partialsummen der Fourierreihen aufzeichnen (mit einem Algebraprogramm).

3. Betrachte $f(x) = x$ auf $[0, 2\pi]$ (Koeffizienten ausrechnen) und berechne die Parseval-Gleichung.

4. Beweise die Folgerung $f \in C^{n+1}(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Hinweise liefert der Satz 3.1.5.

5. Beweise, dass die Gruppenoperationen stetig bezüglich der Produkttopologien sind.

A.1. Fourierreihen reeller Funktionen

Sei $f(x)$ eine 2π-periodische Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann eine reelle Funktion ist, wenn

$$\hat{f}(-n) = \overline{\hat{f}(n)}$$

für alle ganzen Zahlen n gilt. Folgern Sie daraus, dass die Partialsummen

$$S_N f(x) = \sum_{N=-n}^{n} \hat{f}(N) e^{iNx}$$

ebenfalls reelle Funktionen sind! Zeigen Sie, dass die Fourierreihe einer geraden/ungeraden Funktion f ebenfalls als Kosinus-/Sinusreihe geschrieben werden kann!

A.2. Berechnen von Fourierreihen

Entwickeln Sie die folgenden Fuktionen in Fourierreihen. Dabei seien die Funktionen 2π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt gedacht.

(a) die charateristische Funktion $f(x) = I_{[a,b]}(x)$ eines Intervalss $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$

(b) $f(x) = |x|$ für $x \in [-\pi,\pi]$

Zeichnen Sie die ersten Partialsummen mit Ihrem Lieblingsalgebraprogramm. An welchen Stellen konvergieren die Fourierreihen gegen den entsprechenden Funktionswert? Schreiben Sie die Fourierreihe aus dem zweiten Punkt als Sinus- und Kosinusreihe! Berechnen Sie diese an der Stelle $x = 0$ und zeigen Sie damit die Formeln

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

A.3. Die gezupfte Saite

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xh}{p} & 0 \le x \le p \\ \frac{h(\pi-x)}{\pi-p} & p \le x \le \pi \end{cases}$$

in eine Sinusreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$. Zeichnen Sie $f(x)$. Betrachten Sie die Wellengleichung mit Anfangsauslenkung $u(x,0) = f(x)$ und Anfangsgeschwindigkeit 0. Wie sehen die D'ALEMBERT-Lösung und die Lösung als Fourierreihe $u(x,t) = \sum a_k \cos(kt)\sin(kx)$ aus? Können sie tatsächlich Lösungen der Wellengleichung sein? Für welchen Wert von p verschwinden die zweiten, vierten sechsten usw. Oberschwingungen $a_2 = a_4 = \ldots = 0$? Für welchen Wert von p verschwinden die dritten, sechsten, neunten usw. Oberschwingungen?

A.4. Summationsmethoden I

Sei $\sum \xi_k$ eine Reihe komplexer Zahlen mit den Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, den CESÀRO-Partialsummen $C_n = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} S_k$ und den ABEL-Partialsummen $A_n(r) = \sum_{k=1}^{n} r^k \xi_k$. Die Reihe $\sum \xi_k$ ist konvergent/summierbar mit der Summe S, falls $\lim_{n\to\infty} C_n = S$. Sie ist ABEL-summierbar mit der Summe S, falls $\lim_{r\nearrow 1} \lim_{n\to\infty} A_n(r) = S$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum \xi_k$ CESÀRO-summierbar mit Summe S ist, falls sie summierbar mit Summe S ist. Hinweis: Es ist hilfreich, $S = 0$ anzunehmen.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum \xi_k$ ABEL-summierbar mit Summe S ist, falls sie summierbar mit Summe S ist. Hinweis: Es ist hilfreich, $S = 0$ anzunehmen. Dann kann man die Formel $A_n(r) = (1-r)\sum_{k=1}^{n} Sr^k + S_n r^{n+1}$ beweisen und benutzen.

(c) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum \xi_k$ ABEL-summierbar mit Summe S ist, falls sie CESÀRO-summierbar mit Summe S ist. Hinweis: Es ist hilfreich, $S = 0$ anzunehmen. Dann kann man die Formel $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k r^k = (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty} kC_k r^k$ beweisen und benutzen.

A.5. Summationsmethoden II

In der obigen Aufgabe wurden die folgenden Implikationen für eine Reihe $\sum \xi_k$ komplexer Zahlen gezeigt: summierbar $\Rightarrow$ CESÀRO-summierbar $\Rightarrow$ ABEL-summierbar. Geben Sie Beispiele an, die zeigen, dass die inversen Implikationen nicht gelten.

A.6. Summationsmethoden III – Tauber-Satz

Sei nun $\sum \xi_k$ CESÀRO-summierbar mit der Summe S und der zusätzlichen Voraussetzung $\lim_{k\to\infty} k\xi_k = 0$. Zeigen Sie, dass $\sum \xi_k$ summierbar mit der Summe S ist.

A.7. Dirichlet-Kern

Seien $L_N = \|D_N\|_1 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\, dx$ die so genannten Lebesgue-Konstanten, die L_1-Normen der Dirichlet-Kerne. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c > 0$ gibt, mit $L_N \geq c \log N$ für $N = 1, 2, \ldots$. Folgern Sie, dass es eine Folge stetiger Funktionen f_N und eine Konstante c' gibt, mit $|f_n| \leq 1$ und $|S_N(f_N)(0)| \geq c' \log N$.

A.8. Zur isoperimetrischen Ungleichung

1. Sei $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ mti $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ die Parametrisierung einer einfachen geschlossenen Kurve $\mathit{\Gamma}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_a^b (x(s)y'(s) - y(s)x'(s))\, ds = 2\int_a^b x(s)y'(s)\, ds = -2\int_a^b y(s)x'(s)$$

   Es ist klar, dass $\int_a^b (xy' - x'y) = 2\int_a^b xy' = -2\int_a^b x'y$ gilt und weiter ist $\int_a^b xy'\, ds = [xy]_a^b - \int_a^b x'y\, ds$.

2. Sei nun Γ eine Kurve derart, dass die x-Achse Γ in zwei Teile teilt, die die Graphen von zwei stetigen Funktionen $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$ und $g \leq 0$ und $f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = 0$ sind. Zeigen Sie, dass die übliche Definition des Flächeninhalts zwischen den Graphen der Funktionen f und g, also
$$A := \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx$$
mit dem in der Vorlesung definierten Flächeninhalt des von Γ begrenzten Gebiets übereinstimmt, wenn f, g stetige Funktionen sind.
Es ist $A = 1/2 |\int_a^b xy' - x'y\,ds|$ und $\Gamma(s) = \begin{cases} s, f(s) & s \in [0,1] \\ 2-s, g(2-s) & s \in [1,2] \end{cases}$. Dann haben wir

Weiter schreiben

A.9. Zur Gleichverteilung von Folgen

1. Zeigen Sie, dass eine Folge $(\xi_n) \subset [0,1)$ gleichverteilt in $[0,1)$ genau dann ist, wenn sie das Weylsche Kriterium
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k \xi_n} = 0 \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$
erfüllt.
Um die Aussage zu zeigen, müssen wir betrachten:
$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) - \int_0^1 f\right| &\leq \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(f(\xi_n) - P(\xi_n))\right| + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(\xi_n) - \int_0^1 P\right| \\ &\quad + \left|\int_0^1 P - \int_0^1 f\right| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \leq 3\varepsilon \text{ für } N \geq N_0\end{aligned}$$
Diese Aussage haben wir bereits in der Vorlesung gesehen. Die Funktion lässt sich abschätzen durch zwei Funktionen: $f^- \leq f \leq f^+$. Bei beiden wissen wir: $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f^-(\xi) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\xi) \leq \sum_{n=1}^{N} f^+(\xi)$ und beide Funktionen streben gegen das Integral. Also haben wir: $\int_0^1 f - \varepsilon \leq \int_0^1 f^- \leq \int_0^1 f \leq \int_0^1 f^+ \leq \int_0^1 f^+$. Damit erhalten wir die Aussage auch für die Indikatorfunktion.

Nun beginnen wir mit der Indikatorfunktion und erhalten auch eine Aussage zu Treppenfunktionen: $f(x) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n 1_{[\frac{m-1}{M}, \frac{m}{M})}$. In einem Intervall bezeichnet f_- und f_+ das Minimum und Maximum des Intervalls. Wir haben $f_- \leq f \leq f_+$ und für großes M auch $f_+ - f_- \leq \varepsilon$. Mit denselben Argumenten wie oben können wir die Summe und dann das Integral betrachten. Dann erhalten wir wieder: $\int f_- - \varepsilon \leq \int f_- \leq \int f \leq \int f_+ \leq \int f_+ - \varepsilon$. Damit ergibt sich die Behauptung.

2. Zeigen Sie, dass für $a \neq 0$ und $0 < \sigma < 1$ die Folge $\langle an^\sigma \rangle$ gleichverteilt in $[0,1)$ ist. Hinweis: Vergleichen Sie dazu die Summe aus dem Weylschen Kriterium mit einem geeigneten Integral.
   Wir müssen zeigen, dass $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N e^{2\pi iakn^\sigma} \xrightarrow{N\to\infty} 0$. Dazu gehört das Integral $\frac{1}{N}\int_1^{N+1} e^{2\pi i(ak)x^\sigma}\,dx$. Die Differenz aus Summe und Integral ist kleiner als
$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} |e^{2\pi akn^\sigma} - e^{2\pi iakx^\sigma}|\,dx &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} |1 - e^{2\pi iak(x^\sigma - n^\sigma)}|\,dx \\ &\leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} 2\pi|ak|(x^\sigma - n^\sigma)\,dx \\ &\leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} 2\pi|ak|((n+1)^\sigma - n^\sigma)\,dx \\ &= \frac{C}{N}\sum_{n=1}^N ((n+1)^\sigma - n^\sigma) = \frac{C}{N}\sum_{n=1}^N \sigma\Theta^{\sigma-1}\end{aligned}$$
   für ein $\Theta \in [n, n+1]$. Insgesamt ist es also kleinergleich als $\frac{C'}{N}\sum_{n=1}^N n^{\sigma-1} \leq \frac{C''}{N}N^\sigma = N''N^{\sigma-1}$. Da $0 < \sigma < 1$ geht der Ausdruck für $N \to \infty$ gegen 0.

   Es ist noch zu zeigen, dass $\int_1^{N+1} e^{2\pi i(ak)x^\sigma}\,dx = \mathcal{O}(N^{1-\sigma})$ oder dass $|\int_1^{N+1} \cos(bx^\sigma)\,|$ und $|\int_1^{N+1} \sin(bx^\sigma)\,dx| = \mathcal{O}(N^{1-\sigma})$ für ein $b \neq 0$. Wir machen die Substitution $y = x^\sigma$. Dann ist $x = y^{1/\sigma}, dx = \frac{1}{\sigma}y^{1/\sigma - 1}dy$. Es ergibt sich: $\frac{1}{\sigma}\int_1^{(N+1)^\sigma} \cos y \cdot y^{1/\sigma-1}\,dy$. Zur Vereinfachung schreiben wir $\int_1^M y^\alpha \cos y\,dy$. Die partielle Integration mit $u = y^\alpha, u' = \alpha y^{\alpha-1}, v' = \cos y, v = \sin y$ ergibt: $y^\alpha - \sin y|_{y=1}^M - \alpha\int_1^M y^{\alpha-1}\sin y\,dy \leq 2M^\alpha + \alpha|\int_1^M y^{\alpha-1}\sin y\,dy|$. Durch iterierte Anwendung lässt sich das abschätzen durch CM^α mit der Konstante $C = C(\alpha)$.

3. Zeigen Sie, dass die Folge $\langle a\log n\rangle$ für kein reelles a gleichverteilt in $[0,1)$ ist. Hinweis: Vergleichen Sie dazu die Summe aus dem Weylschen Kriterium mit einem geeigneten Integral.
   Es ist $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N e^{2\pi ika\log n} \to 0$. Zunächst vergleichen wir wieder
$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\Big|\sum_{n=1}^N e^{2\pi ika\log n} - \int_1^N e^{2\pi ika\log x}\,dx\Big| &\leq \frac{C}{N}\sum_{n=1}^N |\log(n+1) - \log n| \\ &\leq \frac{C}{N}\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = C\frac{\log N}{N} \to 0\end{aligned}$$
   Wir betrachten nun den Realteil des Integrals:
$$\frac{1}{N}\int_1^N \cos(2\pi ka\log x)\,dx = \frac{1}{N}\int_1^N \cos(b\log x)\,dx \sim \sin(\log N) \not\to 0$$

A.10. Zur Fouriertransformation

Berechnen Sie die Fouriertransformation der reellen Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad g = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx = (2\pi)^{-1/2} \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}\, dx = (2\pi)^{-1/2} \frac{1}{-i\xi} e^{-ix\xi}|_{x=-1}^{1} = \sqrt{2/\pi} \frac{\sin \xi}{\xi}$.

Es ist $g(x) = \frac{1}{2}(f * f)(2x)$. Damit haben wir $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\widehat{f * f})(\frac{3}{2})$ und $(\widehat{f * f})(\xi) = (2\pi)^{1/2} (\hat{f}(\xi))^2 = 2\sqrt{2/\pi} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} \Rightarrow \hat{g}(x) = 2\sqrt{2/\pi} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} = \sqrt{2/\pi} \frac{1 - \cos \xi}{\xi^2}$.

Literaturverzeichnis

[1] Walsh Series and Transforms. Theory and Applications von B. Golubov, A. Efimov, V. Skvortsov

[2] Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis von F. Schipp, William R. Wade, P. Simon

[3] Höhere Analsis von Hans Triebel

[4] Fourier series von Edwards

[5] Fourier analysis and its applications von Folland

[6] A course in abstract harmonic analysis von Folland

[7] Abstract harmonic analysis von Hewitt und Ross

[8] Orthogonal series von Kashin und Saakyan

[9] A panorama of harmonic analysis von Krantz

[10] Fourier analysis von Körner

[11] Fourier analysis: an introduction von Stein und Shakarchi

[12] Fourier analysis and its applications von Oretblad

Index