Lie-Algebren

Prof. Dr. Burkhard Külshammer

Semester: SS 2007

Vorwort

Dieses Dokument wurde als Skript für die auf der Titelseite genannte Vorlesung erstellt und wird jetzt im Rahmen des Projekts „Vorlesungsskripte der Fakultät für Mathematik und Informatik“ weiter betreut. Das Dokument wurde nach bestem Wissen und Gewissen angefertigt. Dennoch garantiert weder der auf der Titelseite genannte Dozent, die Personen, die an dem Dokument mitgewirkt haben, noch die Mitglieder des Projekts für dessen Fehlerfreiheit. Für etwaige Fehler und dessen Folgen wird von keiner der genannten Personen eine Haftung übernommen. Es steht jeder Person frei, dieses Dokument zu lesen, zu verändern oder auf anderen Medien verfügbar zu machen, solange ein Verweis auf die Internetadresse des Projekts `http://uni-skripte.lug-jena.de/` *enthalten ist.*

Diese Ausgabe trägt die Versionsnummer 2582 und ist vom 4. Dezember 2009. Eine neue Ausgabe könnte auf der Webseite des Projekts verfügbar sein.

Jeder ist dazu aufgerufen, Verbesserungen, Erweiterungen und Fehlerkorrekturen für das Skript einzureichen bzw. zu melden oder diese selbst einzupflegen – einfach eine E-Mail an die Mailingliste <`uni-skripte@lug-jena.de`*> senden. Weitere Informationen sind unter der oben genannten Internetadresse verfügbar.*

Hiermit möchten wir allen Personen, die an diesem Skript mitgewirkt haben, vielmals danken:

- *Jens Kubieziel <*`jens@kubieziel.de`*> (2007)*
- *Prof. Dr. Burkhard Külshammer <*`kuelsham@minet.uni-jena.de` *(2007)*

Inhaltsverzeichnis

Auflistung der Theoreme

Sätze

Definitionen und Festlegungen

1 Grundbegriffe

Definition 1.1
Eine endlich-dimensionale und komplexe **Lie-Algebra** ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum L über dem Körper $\mathbb{C}$ mit einer bilinearen Abbildung $L \times L \to L, (a, b) \mapsto [a, b]$, so dass gilt:

(i) (**Schiefsymmetrie**) $[a, a] = 0 \; \forall a \in L$

(ii) (**Jacobi-Identität**) $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0 \; \forall a, b, c \in L$

Bemerkung
In dieser Vorlesung betrachten wir den Körper $\mathbb{C}$. Verallgemeinerungen sind möglich, müssen aber evtl. speziell betrachtet werden. Wir betrachten ohne besondere Nennung immer endlich-dimensionale Lie-Algebren. Spezialfälle werden besonders erwähnt.

Man nennt $[a, b]$ **Lie-Produkt**, **Lie-Klammer** oder **Kommutator**.

Bemerkung
Für $a, b \in L$ ist $0 = [a+b, a+b] = [a, a]+[b, b]+[b, a]+[a, b]$, d. h. $[b, a] = -[a, b]$. Außerdem erhält man aus der Bilinearität $[0, a] = 0 = [a, 0]$.

Beispiel

(i) Jeder $\mathbb{C}$-Vektorram V ist eine Lie-Algebra mit $[a, b] := 0$ für alle $a, b \in V$.

(ii) Für Lie-Algebren $L_1, \ldots, L_n$ ist auch das **direkte Produkt** $L_1 \times \ldots \times L_n$ eine Lie-Algebra, wenn man definiert:

$$[(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)] := ([a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n])$$

für $a_1, b_1 \in L_1, \ldots, a_n, b_n \in L_n$.

(iii) Für $n \in \mathbb{N}$ bilden die komplexen $n \times n$-Matrizen eine Lie-Algebra $gl_n = \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $[a, b] := ab - ba$ für $a, b \in gl_n$. Für $a, b, c \in gl_n$ gilt: $[[a, b], c] = (ab - ba)c - c(ab - ba) = abc - bac - cab + cba,$ also erhalten wir $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = abc - bac - cab + cba + bca - cba - abc + acb + cab - acb - bca + bac = 0$. Man nennt gl_n die **allgemeine lineare Lie-Algebra** des Grades n

Definition 1.2
Eine **Unteralgebra** einer Lie-Algebra L ist ein Untervektorraum $K \subseteq L$ mit $[a, b] \in K$ für $a, b \in K$.

Bemerkung
Gegenenfalls wird K mit den entsprechend eingeschränkten Verknüpfungen selbst zu einer Lie-Algebra.

Beispiel

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ bilden die oberen Dreiecksmatrizen eine Unteralgebra $\mathfrak{b}_n$ von gl_n. Denn das Produkt von oberen Dreiecksmatrizen ist wieder eine.

(ii) In jeder Lie-Algebra L sind $0, L$ und $\mathbb{C}a$ für $a \in L$ Unteralgebren.

(iii) Für jeden Untervektorraum $U \subseteq L$ ist der **Normalisator** $N_L(U) := \{a \in L \colon [a,u] \in U, u \in U\}$ von U in L. Denn für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, a, b \in N_L(U), u \in U$ gilt: $[\alpha a + \beta b, u] = \alpha[a,u] + \beta[b,u] \in U$ und $[[a,b],u] = -[[b,u],a] - [[u,a],b] = [a, \underbrace{[b,u]}_{\in U}] - [b, \underbrace{[a,u]}_{\in U}] \in U$.

(iv) Für jede Teilmenge $X \subseteq L$ ist analog der **Zentralisator** $C_L(X) := \{a \in L \colon [a,x] = 0 \, \forall x \in X\}$ von X eine Unteralgebra von L. Ist $X = \{x\}$ für ein $x \in L$, so schreiben wir $C_L(x)$ und sprechen vom Zentralisator von x.

(v) Insbesondere ist das **Zentrum** $Z(L) := C_L(L) = \{a \in L \colon [a,b] = 0 \, \forall b \in L\}$ von L eine Unteralgebra von L.

(vi) Für jede Menge $\mathfrak{M}$ von Unteralgebren von L ist auch $\bigcap_{U \in \mathfrak{M}}$ eine Unteralgebra von L.

Definition 1.3
Ein **Ideal** einer Lie-Algebra L ist ein Untervektorraum $I \subseteq L$ mit $[a,b] \in I$ für alle $a \in I, b \in L$.

Bemerkung

(i) Gegebenenfalls ist auch $[b,a] = -[a,b] \in I$ für alle $a \in I, b \in L$.

(ii) Jedes Ideal von L ist eine Unteralgebra von L. Eine Unteralgebra ist im Allgemeinen *kein* Ideal.

Beispiel

(i) $\mathfrak{b}_2$ ist kein Ideal in gl_2, denn $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) In jeder Lie-Algebra L sind $0, L$ und $Z(L)$ Ideale. Für $z \in Z(L), a \in L$ ist nämlich $[z,a] = 0 \in Z(L)$.

(iii) Jede Unteralgebra $K \subseteq L$ ist ein Ideal in $N_L(K)$ und K ist genau dann ein Ideal in L, wenn der Normalisator $N_L(K) = L$ ist.

(iv) Der Durchschnitt von Idealen ist wieder ein Ideal: Für jede Menge $\mathfrak{F}$ von Idealen in L ist auch $\bigcap_{I \in \mathfrak{F}} I$ ein Ideal in L.

(v) Für Ideale I, J von L ist auch $I + J = \{a + b \colon a \in I, b \in J\}$ ein Ideal in L. Es gilt nämlich $[a+b, x] = [a,x] + [b,x] \in I + J$. Analog für Summen von endlich vielen Idealen.

(vi) Für Ideale I, J von L ist auch $[I,J] = \{\sum_{k=1}^n [a_k, b_k] \colon a_1, \ldots, a_n, \in I, b_1, \ldots, b_n \in J, n \in \mathbb{N}_0\}$ ein Ideal in L. Für $a_1, \ldots, a_n \in I, b_1, \ldots, b_n \in J, x \in L$ gilt nämlich: $[\sum_{k=1}^n [a_k, b_k], x] = \sum_{k=1}^n (-[[b_k, x], a_k] - [[x, a_k], b_k]) = \sum_{k=1}^n ([a_k, [b_k, x]] + [[a_k, x], b_k]) \in [I, J]$. Insbesondere ist die **abgeleitete Algebra** $L' := [L, L] := \{\sum_{k=1}^n [a_k, b_k] \colon a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in L, n \in \mathbb{N}_0\}$ ein Ideal in L.

(vii) Definiert man man induktiv $L^{(0)} := L, L^{(1)} := L', L^{(n)} := (L^{(n-1)})'$ sowie $L^1 := L, L^2 = L', L^n := [L^{n-1}, L]$, so sind $L^{(n)}, L^n$ für $n \in \mathbb{N}$ Ideale in L. Man nennt $L^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq \ldots$ die **abgeleitete Kette** von L und $L^1 \supseteq L^2 \supseteq L^3 \supseteq \ldots$ die **absteigende** oder **untere Zentralkette** von L.

Satz
Für jedes Ideal I einer Lie-Algebra L bilden die Restklassen $a + I = \{a + x \colon x \in I\}$ eine Lie-Algebra $L/_I$, die **Restklassenalgebra** von L modulo I, wenn man für $\alpha \in \mathbb{C}, a, b \in L$ definiert:

$$\alpha(a + I) := \alpha a + I \qquad (a + I) + (b + I) = (a + b) + I \qquad [a + I, b + I] := [a, b] + I$$

BEWEIS:
Die Lie-Klammer auf $L/_I$ ist wohldefiniert. Sind nämlich $a, a', b, b' \in L$ mit $a + I = a' + I$ und $b + I = b' + I$, so ist $a - a' \in I$, also $[a, b] - [a', b] = [a - a', b] = I$, d. h. $[a, b] + I = [a', b] + I$. Genauso verfährt man mit b und b'. Die Axiome einer Lie-Algebra rechnet man leicht nach.
∎

Definition 1.4
Ein **Homomorphismus** einer Lie-Algebra L in eine Lie-Algebra M ist eine lineare Abbildung $\varphi \colon L \to M$ mit $\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$ für alle $a, b \in L$. Wie üblich definiert man Monomorphismen, Epimorphismen, Isomorphismen, Endomorphismen und Automorphismen zwischen Lie-Algebren.

Bemerkung 1.5

(i) Für jede Unteralgebra $U \subseteq L$ und jeden Homomorphismus $\varphi \colon L \to M$ ist $\varphi(U) \subseteq M$ eine Unteralgebra. Für $a, b \in U$ ist nämlich $[\varphi(a), \varphi(b)] = \varphi(\underbrace{[a, b]}_{\in U}) \in \varphi(U)$. Insbesondere ist das Bild $\varphi(L)$ eine Unteralgebra von M.

(ii) Für jedes Ideal $I \subseteq L$ ist $\varphi(I) \subseteq \varphi(L)$ Ideal. Denn für $a \in I, b \in L$ ist $[\varphi(a), \varphi(b)] = \varphi(\underbrace{[a, b]}_{\in I}) \in \varphi(I)$. Jedoch ist $\varphi(I)$ im Allgemeinen kein Ideal in M, wie der folgende Homomorphismus $\mathfrak{b}_2 \to \mathrm{gl}_2, a \mapsto a$ und das Ideal $I := \mathfrak{b}_2$ von $\mathfrak{b}_2$ zeigen.

(iii) Für jede Unteralgebra $V \subseteq M$ ist $\varphi^{-1}(V) = \{a \in L \colon \varphi(a) \in V\} \subseteq L$ eine Unteralgebra von L. Denn für $a, b \in \varphi^{-1}(V)$ ist $\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)] \in V$, d. h. $[a, b] \in \varphi^{-1}(V)$.

(iv) Für jedes Ideal $J \subseteq M$ ist $\varphi^{-1}(J) \subseteq L$ ein Ideal. Denn für $a \in \varphi^{-1}(J), b \in L$ ist $\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)] \in J$, d. h. $[a, b] \in \varphi^{-1}(J)$. Insbesondere ist der Kern $\ker(\varphi) := \varphi^{-1}(0) = \{a \in L \colon \varphi(a) = 0\} \subseteq L$ ein Ideal.

(v) Sind L, M, N drei Lie-Algebren und $\varphi\colon L \to M, \psi\colon M \to N$ Homomorphismen, so auch $\psi \circ \varphi\colon L \to N$.

(vi) Ist $\varphi\colon L \to M$ ein Isomorphismus, so auch $\varphi^{-1}\colon M \to L$. Denn für $x, y \in M$ gilt $\varphi^{-1}([x,y]) = \varphi^{-1}([\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi(\varphi^{-1}(y))]) = \varphi^{-1}(\varphi([\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)])) = [\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)]$.

Beispiel

(i) Für jedes Ideal I einer Lie-Algebra L ist die kanonische Abbildung $\nu\colon L \to L/_I, a \mapsto a + I$ ein Epimorphimus mit $\ker I$.

(ii) Betrachtet man $\mathbb{C}$ als Lie-Algebra mit $[\alpha, \beta] = 0$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so ist für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $\mathrm{Spur}\colon \ \mathrm{gl}_n \to \mathbb{C}, (\alpha_{ij}) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}$ ein Epimorphimus. Denn für $a, b \in \mathrm{gl}_n$ ist bekanntlich $\mathrm{Spur}([a,b]) = \mathrm{Spur}(ab - ba) = \mathrm{Spur}(ab) - \mathrm{Spur}(ba) = 0 = [\mathrm{Spur}(a), \mathrm{Spur}(b)]$. Daher ist $\mathrm{sl}_n := \ker(\mathrm{Spur}) = \{a \in \mathrm{gl}_n\colon \ \mathrm{Spur}(a) = 0\} \subseteq \mathrm{gl}_n$ Ideal. Man nennt sl_n die **spezielle lineare Lie-Algebra** des Grades n.

(iii) Für jeden endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V bilden die linearen Abbildungen von V in sich eine Lie-Algebra $\mathrm{gl}(V)$, die **allgemeine lineare Lie-Algebra** von V, wenn man $[\varphi, \psi] = \varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi$ für $\varphi, \psi \in \mathrm{gl}(V)$ definiert. Dies zeigt man analog zu Beispiel 1.1 Nummer (iii). Wählt man eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von V und schreibt $\varphi(b_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}(\varphi) b_i$ mit $\alpha_{ij}(\varphi) \in \mathbb{C}$ für $i, j = 1, \ldots, n$ ist $\mathrm{gl}(V) \to \mathrm{gl}_n, \varphi \mapsto (\alpha_{ij}(\varphi))$ ein Isomorphismus. Das Urbild von sl_n unter dieser Abbildung ist $\mathrm{sl}(V) := \{\varphi \in \mathrm{gl}(V)\colon \ \mathrm{Spur}(\varphi) = 0\}$. Das hängt nicht von der Wahl der Basis ab. Man nennt $\mathrm{sl}(V)$ **spezielle lineare Lie-Algebra** von V.

Definition 1.6

Lie-Algebren L, M heißen isomorph ($L \equiv M$), falls ein Isomorphismus $\varphi\colon L \to M$ existiert.

Beispiel

Für jeden $\mathbb{C}$-Vektorraum V der Dimension $n < \infty$ ist $\mathrm{gl}(V) \equiv \mathrm{gl}_n$.

Bemerkung

$\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation.

Satz 1.7 (Homomorphiesatz)

Für jeden Homomorphismus von Lie-Algebren $\varphi\colon L \to M$ ist die Abbildung $\overline{\varphi}\colon L/_{\ker \varphi} \to \varphi(L), a + \ker(\varphi) \mapsto \varphi(a)$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist $L/_{\ker \varphi} \equiv \varphi(L)$.

BEWEIS:

Man rechnet leicht nach, dass die Abbildung $\overline{\varphi}$ wohldefiniert, linear und bijektiv ist. Außerdem gilt für alle $a, b \in L$: $\overline{\varphi}([a + \ker \varphi, b + \ker \varphi]) = \overline{\varphi}([a, b] + \ker \varphi) = \varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)] = [\overline{\varphi}(a + \ker \varphi), \overline{\varphi}(b + \ker \varphi)]$. ∎

Satz 1.8 (Erster Isomorphiesatz)

Für jedes Ideal I und jede Unteralgebra K einer Lie-Algebra L ist $K + I$ eine Unteralgebra von L. Dabei ist I ein Ideal in $K + I$, $K \cap I$ Ideal in K und

$$K/_{K \cap I} \equiv K + I/_I$$

Beweis:
Sei $\nu\colon L \to L/_I, a \mapsto a + I$ kanonisch. Nach Bemerkung 1.5 Punkt (i) ist $\nu(K) = \{a + I : a \in K\}$ eine Unteralgebra von $L/_I$. Daher ist $\nu^{-1}(\nu(K))$ eine Unteralgebra von L. Sie ist in der Regel nicht dasselbe wie K. Für $x \in \nu^{-1}(\nu(K))$ ist $x + I = \nu(x) \in \nu(K)$. Also $x + I = a + I$ für ein $a \in K$. Daher ist $i := x - a \in I$ und das Element $x = a + i \in K + I$. Für $b \in K, j \in I$ ist andererseits $\nu(b + j) = b + j + I = b + I = \nu(b) \in \nu(K)$, d. h. $b + j \in \nu^{-1}(\nu(K))$. Folglich ist $\nu^{-1}(\nu(K)) = K + I$ Unteralgebra von L.

Da I Ideal in L, ist I auch Ideal in $K+I$. Ferner ist $K \cap I$ der Kern der Einschränkung von ν auf K. Also ist das ein Ideal in K. Wende den Homomorphiesatz auf diese Einschränkung von ν an: $K/_{K\cap I} \equiv \nu(K) = \{a + I\colon a \in K\} = \{a + j + I\colon a \in K, j \in I\} = K + I/_I$. ∎

Satz 1.9 (Zweiter Isomorphiesatz)
Sind I, J zwei Ideale einer Lie-Algebra L mit $I \subseteq J$, so ist $J/_I$ ein Ideal in $L/_I$ mit

$$(L/_I)/_{(J/_I)} \equiv L/_J$$

Beweis:
Sei $\nu\colon L \to L/_I$ kanonische Abbildung. Nach Bemerkung 1.5 ist $J/_I = \nu(J)$ Ideal in $\nu(L) = L/_I$. Sei $\mu\colon L/_I \to (L/_I)/_{(J/_I)}$ kanonisch. Dann ist $\ker(\mu \circ \nu) = J$ (Nachrechnen). Wende den Homomorphiesatz auf $\mu \circ \nu$ an: $L/_J \equiv (L/_I)/_{(J/_I)}$. ∎

2 Darstellungen und Moduln

Definition 2.1
Seien L eine Lie-Algebra und V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine **Darstellung** von L auf V ist ein Homomorphismus $\Delta\colon L \to \mathrm{gl}(V)$.

Beispiel
Für $a \in L$ ist die Abbildung $\mathrm{ad}_a = \mathrm{ad}_a^L\colon L \to L, x \mapsto [a,x]$ linear mit

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_{[a,b]}(x) &= [[a,b],x] = -[[b,x],a] - [[x,a],b] = [a,[b,x]] - [b,[a,x]]\\ &= (\mathrm{ad}_a \circ \mathrm{ad}_b)(x) - (\mathrm{ad}_b \circ \mathrm{ad}_a)(x) = [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b](x)\end{aligned}$$

für alle $b, x \in L$. Daher ist die Abbildung $\mathrm{ad}\colon L \to \mathrm{gl}(L), a \mapsto \mathrm{ad}_a$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren und damit eine Darstellung von L auf L, die **adjungierte Darstellung** von L. Ihr Kern ist $\{a \in L\colon\ \mathrm{ad}_a = 0\} = \{a \in L\colon [a,x] = 0\,\forall x \in L\} = Z(L)$.

Bemerkung
Wir werden die adjungierte Darstellung dazu benutzen, um Methoden der linearen Algebra auf Lie-Algebren anzuwenden.

Definition 2.2
Sei L eine Lie-Algebra. Ein L-**Modul** ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V mit einer bilinearen Abbildung $L \times V \to V, (a,v) \mapsto a \cdot v$ für die gilt

$$[a,b] \cdot v = a \cdot (b \cdot v) - b \cdot (a \cdot v) \quad a, b \in L, v \in V$$

Bemerkung
(i) Für $a \in L$ ist also dann die Abbildung $\Delta(a)\colon V \to V, v \mapsto av$ linear und gleichzeitig ist die Abbildung $\Delta\colon L \to \mathrm{gl}(V), a \mapsto \Delta(a)$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren, also eine Darstellung. Auf diese Weise liefert jeder L-Modul eine Darstellung.

(ii) Ist umgekehrt Δ eine Darstellung einer Lie-Algebra L auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V, so kann man V zu einem L-Modul machen, indem man definiert: $a \cdot v := (\Delta(a))(v)$ für $a \in L, v \in V$. Dies rechnet man leicht nach. Darstellungen einer Lie-Algebra L und L-Moduln beschreiben also den gleichen mathematischen Sachverhalt.

Beispiel
(i) Jede Lie-Algebra L ist selbst ein L-Modul, wenn man $a \cdot v := [a, v]$ für $a, v \in L$ setzt. Die entsprechende Darstellung ist die adjungierte Darstellung.

(ii) Jeder endlich-dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorraum V wird zu einem L-Modul, wenn man $a \cdot v = 0$ für $a \in L, v \in V$ definiert.

(iii) Für L-Moduln $V_1, \ldots, V_n$ ist auch das **direkte Produkt** $V_1 \times \ldots \times V_n$ ein L-Modul, wenn man definiert: $a \cdot (v_1, \ldots, v_n) := (a \cdot v_1, \ldots, a \cdot v_n)$ mit $a \in L, v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$.

(iv) Für L-Moduln V, W wird der $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ aller linearen Abbildungen von V nach W zu einem L-Modul, wenn man $a \cdot f$ für $a \in L$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ durch $(a \cdot f)(v) := a \cdot f(v) - f(a \cdot v)$ für $v \in V$ definiert. Dies rechnet man leicht nach.

Insbesondere ist $V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ ein L-Modul mit $(a \cdot f)(v) = -f(a \cdot v)$ für $a \in L$, $f \in V^*, v \in V$. V^* heißt **dualer Modul** zu V.

Definition 2.3
Seien L eine Lie-Algebra und $n \in \mathbb{N}$. Eine **Matrixdarstellung** des Grades n von L ist ein Homomorphismus $\Lambda\colon L \to \mathrm{gl}_n$.

Bemerkung
(i) Für jede Matrixdarstellung Λ des Grades n von L wird der $\mathbb{C}^n$ zu einem L-Modul, wenn man definiert: $a \cdot v := \Lambda(a)v$ für $a \in L, v \in \mathbb{C}^n$.

(ii) Ist umgekehrt V ein L-Modul, $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V und $a \cdot b_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij}(a) \cdot b_i$ mit $\lambda_{ij}(a) \in \mathbb{C}$, so ist die Abbildung $\Lambda\colon L \to \mathrm{gl}_n, a \mapsto (\lambda_{ij}(a))$ eine Matrixdarstellung von L. Daher besteht kein großer Unterschied zwischen Darstellungen, Matrixdarstellungen und Moduln. Wir werden meist mit Moduln arbeiten.

Definition 2.4
Seien L eine Lie-Algebra und V ein L-Modul. Ein **Untermodul** von V ist ein Untervektorraum $U \subseteq V$ mit $a \cdot u \in U$ für alle $a \in L, u \in U$.

Bemerkung 2.5
(i) Gegebenenfalls ist U selbst ein L-Modul mit den entspechend eingeschränkten Verknüpfungen.

(ii) Für jeden Untermodul $U \subseteq V$ wird die Menge $V/_U = \{v + U \colon v \in V\}$ zu einem L-Modul, wenn man definiert:

$$\begin{aligned} (v + U) + (v' + U) &:= (v + v') + U \\ \alpha(v + U) &:= \alpha v + U \\ a \cdot (v + U) &:= (a \cdot v) + U \qquad v, v' \in V, \alpha \in \mathbb{C}, a \in L \end{aligned}$$

Man bezeichnet diese Menge als **Faktormodul** von V modulo U.

Beispiel
(i) $0, V$ sind stets Untermoduln. Sind dies die einzigen Untermoduln und ist außerdem $V \neq 0$, so nennt man V **einfach** oder **irreduzibel**.

(ii) Die Untermoduln von L selbst sind genau die Ideale von L.

(iii) Für jede Menge $\mathfrak{U}$ von Untermoduln von V ist auch $\bigcap_{U\in\mathfrak{U}} U$ Untermodul von V.

(iv) Für Untermoduln $U_1, \ldots, U_n$ von V ist auch die Summe $U_1 + \cdots + U_n$ ein Untermodul von V.

Definition 2.6
Seien L eine Lie-Algebra, V, W seien L-Moduln und $\varphi\colon V \to W$ linear mit $\varphi(a \cdot v) = a \cdot \varphi(v)$ für $a \in L, v \in V$. Dann nennt man φ einen L-**Homomorphismus**. Wie üblich definiert man **Monomorphismen**, **Epimorphismen**, **Isomorphismen**, **Endomorphismen** und **Automorphismen** von L-Moduln.

Bemerkung

(i) Für jeden L-Homomorphismus $\varphi\colon V \to W$ und Untermoduln $X \subseteq V, Y \subseteq W$ sind $\varphi(X) \subseteq W$ und $\varphi^{-1}(Y) \subseteq V$ Untermoduln, wie man leicht nachrechnet. Insbesondere sind Kern und Bild von L-Homomorphismen Untermoduln.

(ii) Für L-Moduln V, W bilden die L-Homomorphismen $V \to W$ einen Untervektorraum $\mathrm{Hom}_L(V, W)$ von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$.

(iii) Für L-Moduln U, V, W und L-Homomorphismen $\varphi\colon U \to V, \psi\colon V \to W$ ist auch $\psi \circ \varphi\colon U \to W$ ein L-Homomorphismus und stets ist id_V ein L-Automorphismus.

(iv) Für L-Moduln V, W und jeden L-Isomorphismus $\varphi\colon V \to W$ ist auch $\varphi^{-1}\colon W \to V$ ein L-Isomorphismus.

Beispiel
Für jeden Untermodul U eines L-Moduls V ist die kanonische Abbildung $V \to V/_U$ ein L-Epimorphismus.

Definition 2.7
Sei L eine Lie-Algebra. Man nennt die L-Moduln V, W **isomorph** und schreibt $V \cong W$, falls ein L-Isomorphismus $V \to W$ existiert.

Bemerkung
Die Relation $\cong$ ist eine Äquivalenzrelation.

Satz (Homomorphiesatz)
Seien L eine Lie-Algebra, V, W L-Moduln und $\varphi\colon V \to W$ ein L-Homomorphismus. Dann ist die Abbildung $\overline{\varphi}\colon V/_{\ker(\varphi)} \to \varphi(V), v + \ker(\varphi) \mapsto \varphi(v)$ ein L- Isomorphismus. Insbesondere ist $V/_{\ker(\varphi)} \cong \varphi(V)$.

BEWEIS:
Der Beweis erfolgt analog zu Satz 1.7. ∎

Satz 2.8 (Isomorphiesätze)
Seien L eine Lie-Algebra, W ein L-Modul und $U, V \subseteq W$ Untermoduln. Dann ist $U + V/_V \cong U/_{U\cap V}$. Im Fall $U \subseteq V$ ist $V/_U \subseteq W/_U$ ein Untermodul mit $(W/_U)/_{(V/_U)} \cong W/_V$.

BEWEIS:
Analog zu Satz 1.8 und Satz 1.9 ∎

Satz 2.9 (Lemma von Schur)
Seien L eine Lie-Algebra, V, W irreduzible L-Moduln und $\varphi \in \mathrm{Hom}_L(V, W)$. Im Fall $V \not\cong W$ ist dann $\varphi = 0$ und im Fall $V = W$ ist $\varphi = \alpha \,\mathrm{id}_V$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}$.

BEWEIS:
Sei $\varphi \neq 0$. Dann ist $\ker(\varphi) \subsetneq V$ ein Untermodul, also $\ker(\varphi) = 0$ wegen der Irreduzibilität von V. Analog ist $0 \neq \varphi(V) \subseteq W$ Untermodul, also $\varphi(V) = W$ wegen der Irreduzibilität von W. Daher ist φ ein L-Homomorphismus.

Sei außerdem $V = W$ und α ein Eigenwert von φ. Dann ist $\varphi - \alpha \,\mathrm{id}_V$ ein L-Endomorphismus von V, der nicht bijektiv ist. Also ist $\varphi - \alpha \,\mathrm{id}_V = 0$. ∎

Satz 2.10
Für eine Lie-Algebra L und einen L-Modul V sind äquivalent:

(1) Es existieren irreduzible Untermoduln $U_1, \ldots, U_k \subseteq V$ mit $V = U_1 + \cdots + U_k$.

(2) Es existieren irreduzible Untermoduln $V_1, \ldots, V_l \subseteq V$ mit $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_l$.

(3) Zu jedem Untermodul $U \subseteq V$ existiert ein Untermodul $W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$.

BEWEIS:
(3)⇒(2) Sei (3) erfüllt und $V_1 \subseteq V$ ein irreduzibler Untermodul. Dann existiert ein Untermodul $W_1 \subseteq V$ mit $V = V_1 \oplus W_1$. Sei $V_2 \subseteq W_1$ ein irreduzibler Untermodul. Dann existiert ein Untermodul $W_2 \subseteq V$ mit $V = V_1 \oplus V_2 \oplus W_2$. Auf diese Weise fährt man fort und erhält so irreduzible Untermoduln $V_1, \ldots, V_l \subseteq V$ mit $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_l$.

(2)⇒(1) klar

(1)⇒(3) Sei (1) erfüllt und $U \subseteq V$ ein Untermodul. Im Fall $U_1 \subseteq U$ setzen wir $W_1 := 0$ und im Fall $U_1 \not\subseteq U$, d. h. $U_1 \cap U = 0$, setzen wir $W_2 := U_1$. Dann ist $U + W_1 = U \oplus W_1$. Im Fall $U_2 \subseteq U \oplus W_1$ setzen wir $W_2 := 0$ und im Fall $U_2 \not\subseteq U \oplus W_1$, d. h. $(U \oplus W_1) \cap U_2 = 0$, setzen wir $W_2 := U_2$. Dann ist $U + W_1 + W_2 = U \oplus W_1 \oplus W_2$. Auf diese Weise fahren wir fort und erhalten so die Untermoduln $W_1, \ldots, W_k \subseteq V$ mit $V = U \oplus W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$. ∎

Definition 2.11
Gegebenenfalls heißt V **vollständig reduzibel** oder **halbeinfach**.

3 Nilpotente Lie-Algebren

Definition 3.1
Eine Lie-Algebra L mit $L^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ heißt **nilpotent**. Im Falle $L^2 = 0$ wird diese als **kommutativ** oder **abelsch** bezeichnet.

Beispiel

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ bilden die oberen Dreiecksmatrizen mit Hauptdiagonale 0 eine Unteralgebra $L = \mathfrak{n}_n$ von $\mathfrak{b}_n$. Ist $\{e_{ij} \colon i, j = 1, \ldots, n\}$ die Standardbasis von gl_n, so ist $\{e_{ij} \colon 1 \leq i < j \leq n\}$ eine Basis von L. Wir behaupten, dass für $m \in \mathbb{N}$ die Matrizen e_{ij} mit $j - i \geq m$ eine Basis von L^m bilden.

Für $m = 1$ ist das richtig. Sei also $m > 1$ und bereits gezeigt, dass die e_{ij} mit $j - i \geq m - 1$ eine Basis von L^{m-1} bilden. Dann besteht $L^m = [L^{m-1}, L]$ aus den Linearkombinationen der Elemente $[e_{ij}, e_{kl}] = e_{ij}e_{kl} - e_{kl}e_{ij} = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{il}e_{kj}$ mit $j - i \geq m - 1$ und $k < l$. Im Fall $j = k$ ist $l - i \geq k + 1 - i = j - i + 1 \geq m$ und im Fall $i = l$ ist $j - k \geq j + 1 - l = j + 1 - i \geq m$. Daher ist $[e_{ij}, e_{kl}]$ stets Linearkombination der e_{rs} mit $s - r \geq m$.

Für $r, s \in \{1, \ldots, n\}$ mit $s - r \geq m$ ist umgekehrt $e_{rs} = [e_{r,s-1}, e_{s-1,s}] \in L^m$. Damit ist die Behauptung gezeigt. Im Fall $m \geq n$ ist insbesondere $L^n = 0$, d. h. L ist nilpotent.

(ii) Dagegen ist die Lie-Algebra $\mathfrak{b}_n$ aller oberen Dreiecksmatrizen für $n > 1$ nicht nilpotent. Denn $\{e_{ij} \colon 1 \leq i \leq j \leq n\}$ ist eine Basis von $\mathfrak{b}_n$ und für $i \leq j$ und $k \leq l$ ist $[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{il}e_{kj}$. Dieses Element liegt in $\mathfrak{n}_n$ im Fall $j \neq k, i \neq l$, aber auch im Fall $j = k, i = l$. Daher ist $\mathfrak{b}_n^2 \subseteq \mathfrak{n}_n$. Andererseits ist $[e_{ii}, e_{ij}] = e_{ij}$ für $i < j$, d. h. $\mathfrak{b}_n^2 \supseteq \mathfrak{n}_n$. Insgesamt ist also $\mathfrak{b}_n^2 = \mathfrak{n}_n$. Das gleiche Argument zeigt aber auch $\mathfrak{n}_n \subseteq [\mathfrak{n}_n, \mathfrak{b}_n] = [\mathfrak{b}_n^2, \mathfrak{b}_n] = \mathfrak{b}_n^3$ und umgekehrt ist $\mathfrak{b}_n^3 \subseteq \mathfrak{b}_n^2 = \mathfrak{n}_n$. Folglich ist $\mathfrak{b}_n^3 = \mathfrak{n}_n = \mathfrak{b}_n^2$. Obiger Schluss lässt sich weiter fortsetzen und man erhält $\mathfrak{b}_n^m = \mathfrak{n}_n$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$. Für $n > 1$ ist $\mathfrak{b}_n$ daher nicht nilpotent.

Bemerkung 3.2

(i) Eine Lie-Algebra L ist genau dann abelsch, wenn $[a, b] = 0$ für alle $a, b \in L$ ist.

(ii) Ist L nilpotent, so auch jede Unteralgebra $K \subseteq L$. Denn induktiv zeigt man leicht $K^n \subseteq L^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Für jeden Homomorphismus von Lie-Algebren $\varphi \colon L \to M$ und $n \in \mathbb{N}$ ist analog $\varphi(L^n) = \varphi(L)^n$. Mit L ist also auch $\varphi(L)$ nilpotent.

(iv) Ist $L/_{Z(L)}$ nilpotent, so auch L. Denn ist $k \in \mathbb{N}$ mit $0 = (L/_{Z(L)})^k = L^k + Z(L)/_{Z(L)}$, so ist $L^k \subseteq Z(L)$ und $L^{k+1} = [L^k, L] \subseteq [Z(L), L] = 0$.

Bemerkung 3.3
Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{gl}(V)$ mit $\varphi^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt φ **nilpotent**. Für $\psi \in \mathrm{gl}(V)$ ist gegebenenfalls $\mathrm{ad}_\varphi(\psi) = [\varphi, \psi] = \varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi$. Induktiv folgt daraus, dass $(\mathrm{ad}_\varphi)^k(\psi)$ für $k \in \mathbb{N}$ eine Summe von Termen der Form $\pm\varphi^i \circ \psi \circ \varphi^j$ mit $i + j = k$ ist. Im Fall $k = 2n$ ist also $i \geq n$ oder $j \geq n$. Daher ist $(\mathrm{ad}_\varphi)^{2n} = 0$, d. h. die lineare Abbildung $\mathrm{ad}_\varphi\colon \mathrm{gl}(V) \to \mathrm{gl}(V)$ ist auch nilpotent.

Satz
Sei $V \neq 0$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und sei $L \subseteq \mathrm{gl}(V)$ eine Unteralgebra, in der jedes Element nilpotent ist. Dann existiert ein $v \in V \setminus \{0\}$ mit $\varphi(v) = 0$ für alle $\varphi \in L$.

Beweis:
Der Beweis erfolgt per Induktion nach $n := \dim L$. Für den Induktionsanfang $n = 0$ ist alles klar. Sei also $n > 0$ und der Satz bewiesen für Lie-Algebren kleinerer Dimension. Sei $K \subset L$ eine echte Unteralgebra möglichst großer Dimension. Jedes $\varphi \in K$ induziert wegen $\mathrm{ad}_\varphi(K) \subseteq K$ eine lineare Abbildung:

$$\overline{\varphi}\colon L/_K \to L/_K, \psi \mapsto \mathrm{ad}_\varphi(\psi) + K = [\varphi, \psi] + K$$

Nach Bemerkung 3.3 sind mit φ auch ad_φ und $\overline{\varphi}$ nilpotent, und die Abbildung:

$$\Phi\colon K \to \mathrm{gl}(L/_K), \varphi \mapsto \overline{\varphi}$$

ist ein Homomorphismus von Lie-Algebren. Wegen $\dim \Phi(K) \leq \dim K < n$ können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten ein $\psi + K \in L/_K \setminus \{0\}$ mit

$$0 = (\Phi(\varphi))(\psi + K) = \overline{\varphi}(\psi + K) = [\varphi, \psi] + K$$

d. h. $[\varphi, \psi] \in K$ für $\varphi \in K$. Folglich gilt für $\varphi, \varphi' \in K, \alpha, \alpha' \in \mathbb{C}$:

$$[\varphi + \alpha\psi, \varphi' + \alpha'\psi] = [\varphi, \varphi'] + \alpha'[\varphi, \psi] - \alpha[\varphi', \psi] \in K$$

Daher ist $K + \mathbb{C}\psi \subseteq L$ eine Unteralgebra, die K echt enthält. Nach der Wahl von K ist also $L = K + \mathbb{C}\psi$.

Für $\varphi, \varphi' \in K, \alpha \in \mathbb{C}$ ist außerdem $[\varphi, \varphi' + \alpha\psi] = [\varphi, \varphi'] + \alpha[\varphi, \psi] \in K$. Daher ist $K \subseteq L$ Ideal. Wir wenden jetzt die Induktionsvoraussetzungen auf die Unteralgebra $K \subseteq \mathrm{gl}(V)$ an und erhalten so $W := \{v \in V\colon \varphi(v) = 0 \text{ für } \varphi \in K\} \neq \emptyset$. Offenbar ist $W \subseteq V$ Untervektorraum und für $\varphi \in K, w \in W$ gilt:

$$\varphi(\psi(w)) = [\varphi, \psi](w) + \psi(\varphi(w)) = [\varphi, \psi](w) = 0$$

wegen $[\varphi, \psi] \in K$. Daher ist $\psi(W) \subseteq W$ und die Einschränkung $\omega\colon W \to W$ von ψ ist nilpotent. Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $\omega^m = 0 \neq \omega^{m-1}$ und sei $\omega \in W$ mit $v := w^{m-1}(w) \neq 0$. Dann ist $\psi(v) = 0$ und $\varphi(v) = 0$ für $v \in K$. Wegen $L = K + \mathbb{C}\psi$ folgt die Behauptung. ∎

Satz 3.4 (Engel)
Eine Lie-Algebra L ist genau dann nilpotent, wenn $\mathrm{ad}_a\colon L \to L$ für alle $a \in L$ nilpotent ist.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Für $a \in L$ ist $(\mathrm{ad}_a)^0(L) = L$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und bereits $(\mathrm{ad}_a)^{n-1}(L) \subseteq L^n$ bewiesen. Für $b \in L$ ist dann

$$(\mathrm{ad}_a)^n(b) = \mathrm{ad}_a(\mathrm{ad}_a^{n-1}(b)) = [a, \mathrm{ad}_a^{n-1}(b)] \in [L, L^n] = L^{n+1}$$

Folglich ist $(\mathrm{ad}_a)^n(L) \subseteq L^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Ist L nilpotent, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $L^{m+1} = 0$. Dann ist aber $(\mathrm{ad}_a)^m = 0$ für $a \in L$.

„$\Leftarrow$" Wir führen den Beweis per Induktion nach $n := \dim L$ durch. Sei o. B. d. A. dabei $n \neq 0$. Nach der Voraussetzung sind alle Elemente in der Unteralgebra $\mathrm{ad}(L) \subseteq \mathrm{gl}(L)$ nilpotent. Nach Satz 2.10 existiert also ein $z \in L \setminus \{0\}$ mit $0 = \mathrm{ad}_x(z) = [x, z]$ für alle $x \in L$. Dann ist $z \in Z(L)$, d. h. $Z(L) \neq 0$. Für $a \in L$ ist auch $\mathrm{ad}_{a+Z(L)} \colon L/_{Z(L)} \to L/_{Z(L)}$ nilpotent. Wegen $\dim L/_{Z(L)} < n$ kann man die Induktionsvoraussetzung auf $L/_{Z(L)}$ anwenden. Folglich ist $L/_{Z(L)}$ nilpotent, also auch L nach Bemerkung 3.2 (iv). ∎

Satz 3.5
Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, $a, b \in \mathrm{gl}(V), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$(b - (\alpha + \beta)\,\mathrm{id}_V)^n \circ a = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} ((\mathrm{ad}_b - \beta\,\mathrm{id}_{\mathrm{gl}(V)})^i(a)) \circ (b - \alpha\,\mathrm{id}_V)^{n-i}$$

Beweis:
Der Beweis erfolgt wieder per Induktion nach n. Im Fall $n = 0$ steht auf beiden Seiten a. Sei also die Formel bereits für ein $m \in \mathbb{N}$ bewiesen. Mit $f_i := (\mathrm{ad}_b - \beta\,\mathrm{id}_{\mathrm{gl}(V)})^i(a)$ ist dann:

$$\begin{aligned}(b - (\alpha + \beta)\,\mathrm{id}_V) \circ f_i &= b \circ f_i - \alpha f_i - \beta f_i \\ &= [b, f_i] + f_i \circ b - \alpha f_i - \beta f_i \\ &= (\mathrm{ad}_b - \beta\,\mathrm{id}_{\mathrm{gl}(V)})(f_i) + f_i \circ (b - \alpha\,\mathrm{id}_V) = f_{i+1} + f_i \circ (b - \alpha\,\mathrm{id}_V),\end{aligned}$$

also nach Induktion

$$\begin{aligned}(b - (\alpha + \beta)\,\mathrm{id}_V)^{n+1} \circ a &= (b - (\alpha + \beta)\,\mathrm{id}_V) \circ \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f_i \circ (b - \alpha\,\mathrm{id}_V)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f_{i+1} \circ (b - \alpha\,\mathrm{id}_V)^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f_i \circ (b - \alpha\,\mathrm{id}_V)^{n+1-i} \\ &= \cdots = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} f_{i+1} \circ (b - \alpha\,\mathrm{id}_V)^{n+1-i}\end{aligned}$$ ∎

Bemerkung 3.6
Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt

$$V_\lambda(\varphi) := \{v \in V : (\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)^n(v) = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

Hauptraum von φ bezüglich λ. Aus der Linearen Algebra ist bekannt:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V_\lambda(\varphi)$$

Insbesondere ist $V_\lambda(\varphi) \neq 0$ für nur endlich viele $\lambda \in \mathbb{C}$, nämlich die Eigenwerte von φ.

Satz
Seien L eine nilpotente Lie-Algebra und $\Delta\colon L \to \mathrm{gl}(V)$ eine Darstellung. Für $b \in L$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist dann $V_\lambda(\Delta(b))$ ein L-Untermodul von V.

BEWEIS:
Nach Satz 3.5 gilt für $n \in \mathbb{N}, a \in L$ und $u \in V_\lambda(\Delta(b))$:

$$((\Delta(b) - \lambda \operatorname{id}_V)^n \circ \Delta(a))(u) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (((\operatorname{ad}_{\Delta(b)})^i(\Delta(a))) \circ (\Delta(b) - \lambda \operatorname{id}_V)^{n-i})(u)$$

Für $n - i \gg 0$ ist aber $(\Delta(b) - \lambda \operatorname{id}_V)^{n-i}(u) = 0$ und für $i \gg 0$ ist $(\operatorname{ad}_{\Delta(b)})^i(\Delta(a)) = 0$ wegen der Nilpotenz von $\Delta(L)$. Daher ist $a \cdot u = (\Delta(a))(u) \in V_\lambda(\Delta(b))$. ∎

Definition 3.7
Sei L eine Lie-Algebra. Ein L-Modul $V \neq 0$ heißt **unzerlegbar**, falls keine echten Untermoduln $U, W \subsetneq V$ mit $V = U \oplus W$ existieren.

Bemerkung 3.8
Seien L eine nilpotente Lie-Algebra, V ein unzerlegbarer L-Modul und $\Delta\colon L \to \mathrm{gl}(V)$ die entsprechende Darstellung. Nach Bemerkung 3.6 hat $\Delta(a)$ für $a \in L$ genau einen Eigenwert $\lambda(a)$. Mit $n := \dim V$ gilt also $\operatorname{Spur}(\Delta(a)) = n\lambda(a)$. Folglich ist die Abbildung:

$$\lambda\colon L \to \mathbb{C}, a \mapsto \lambda(a)$$

linear und für $a, b \in L$ gilt:

$$\lambda([a,b]) = 1/n \operatorname{Spur}(\Delta([a,b])) = 1/n \operatorname{Spur}(\Delta(a) \circ \Delta(b) - \Delta(b) \circ \Delta(a)) = 0$$

Daher ist $\lambda\colon L \to \mathbb{C}$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren und $\lambda(L') = 0$.

Für $a \in L$ ist auch $\Gamma(a) := \Delta(a) - \lambda(a) \operatorname{id}_V$ linear und für $a, b \in L$ gilt:

$$[\Gamma(a), \Gamma(b)] = [\Delta(a), \Delta(b)] = \Delta([a,b]) = \Gamma([a,b])$$

Daher ist Γ eine weitere Darstellung von L auf V und für $a \in L$ ist $\Gamma(a)$ eine nilpotente lineare Abbildung.

Definition 3.9
Sei $\Delta\colon L \to \mathrm{gl}(V)$ eine Darstellung einer Lie-Algebra L. Ist $\Delta(a)$ nilpotent für alle $a \in L$, dann heißt Δ im folgenden **Nildarstellung**.

Satz 3.10
Sei $\Delta\colon L \to \mathrm{gl}(V)$ eine Nildarstellung einer Lie-Algebra L mit der Eigenschaft, dass der entsprechende L-Modul V irreduzibel ist. Dann ist $\dim V = 1$ und daher $\Delta(a) = 0$ für alle $a \in L$.
BEWEIS:
Nach Voraussetzung ist jedes Element in $\Delta(L)$ nilpotent. Nach Satz 2.10 existiert also ein $v \in V \setminus \{0\}$ mit $a \cdot v = 0$ für alle $a \in L$. Dann ist also $\mathbb{C}v \subseteq V$ Untermodul. Da V irreduzibel, folgt $V = \mathbb{C}v$. ∎

Satz 3.11
Sei $\Delta\colon L \to \mathrm{gl}(V)$ eine Nildarstellung einer Lie-Algebra L. Dann existiert eine Basis B von V mit der Eigenschaft, dass für jedes $a \in L$ die Matrix von $\Delta(a)$ bzgl. B eine obere Dreiecksmatrix mit Hauptdiagonale 0 ist.

BEWEIS:
Setze $V_0 := V$ und wähle, soweit möglich, für $i = 1, 2, \ldots$ einen Untermodul $V_i \subsetneq V_{i-1}$ möglichst großer Dimension.. Dann ist $V = V_0 \supset V_1 \supset \ldots \supset V_{n-1} \supset V_n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Für $i = 1, \ldots, n$ ist $V_{i-1}/_{V_i}$ ein irreduzibler L-Modul und die Darstellung von L auf $V_{i-1}/_{V_i}$ ist eine Nildarstellung. Nach dem Satz 3.10 ist also $\dim V_{i-1}/_{V_i} = 1$ und $0 = a \cdot (v + V_i) = av + V_i$ für alle $a \in L, v \in V_{i-1}$, d. h. $a \cdot V_{i-1} \subseteq V_i$. Wir wählen eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von V mit der Eigenschaft, dass $b_1, \ldots, b_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ eine Basis von V_{n-i} ist. Dann folgt die Behauptung. ∎

Bemerkung 3.12
Aus Bemerkung 3.8 und Satz 3.11 folgt also, dass zu jeder nilpotenten Lie-Algebra L und jedem unzerlegbaren L-Modul V ein Homomorphismus $\lambda\colon L \to \mathbb{C}$ und eine Basis von V existieren mit der Eigenschaft, dass in der entsprechenden Matrixdarstellung Λ von L die Matrix $\Lambda(a)$ für $a \in L$ die folgende Form hat:

$$\Lambda(a) = \begin{pmatrix} \lambda(a) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda(a) \end{pmatrix}$$

Definition 3.13
Sei $\Delta\colon L \to \mathrm{gl}(V)$ eine Darstellung einer nilpotenten Lie-Algebra L. Für $L^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(L, \mathbb{C})$ mit $\lambda \in L^*$ heißt $V_\lambda := \{v \in V \colon \forall a \in L\, \exists n \in \mathbb{N} \colon (\Delta(a) - \lambda(a)\,\mathrm{id}_V)^n(v) = 0\}$ **Gewichtsraum** von V bzgl. λ. Im Fall $V_\lambda \neq 0$ heißt λ **Gewicht** von V.

Satz 3.14
Seien L eine nilpotente Lie-Algebra und V ein L-Modul. Für $\lambda \in L^*$ ist $V_\lambda \subseteq V$ Untermodul und

$$V = \bigoplus_{\lambda \in L^*} V_\lambda$$

Insbesondere hat V nur endlich viele Gewichte. Ferner ist jedes Gewicht ein Homomorphismus von Lie-Algebren.

BEWEIS:
Wir schreiben $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$ mit unzerlegbaren Untermoduln $U_1, \ldots, U_k$. Für $i = 1, \ldots, k$ liefert U_i einen Homomorphismus von Lie-Algebren $\lambda_i \colon L \to \mathbb{C}$ wie oben. Wir bezeichnen mit $U(\lambda_i)$ die Summe aller U_j mit $\lambda_i = \lambda_j$. Dann ist $U(\lambda_i) \subseteq V_{\lambda_i}$ und V ist die direkte Summe der verschiedenen $U(\lambda_i)$. O. B. d. A. sieht das so aus: $V = U(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus U(\lambda_l)$ für $l \leq k$.

Sei $\mu \in L^*$ und $v \in \mu$. Wir schreiben $v = \sum_{i=1}^{l} v_i$ mit $v_i \in U(\lambda_i)$ für $i = 1, \ldots, l$. Im Fall $\mu \neq \lambda_j$ wählen wir $a \in L$ mit $\mu(a) \neq \lambda_j(a)$. Sei Δ die Darstellung von L auf V und Δ_j die Darstellung von L auf $U(\lambda_j)$. Dann hat die Matrix von $\Delta_j(a) - \mu(a)\,\mathrm{id}_{U(\lambda_j)}$ bzgl. einer geeigneten Basis die Form:

$$\begin{pmatrix} \lambda_j(a) - \mu(a) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j(a) - \mu(a) \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist regulär. Andererseits existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 = (\Delta(a) - \mu(a)\,\mathrm{id}_V)^n(v) = \sum_{i=1}^{l} \underbrace{(\Delta(a) - \mu(a)\,\mathrm{id}_V)^n(v_i)}_{\in U(\lambda_i)}$. Daher ist $0 = (\Delta(a) - \mu(a)\,\mathrm{id}_V)^n(v_j) = (\Delta_j(a) - \mu(a) id_{U(\lambda_j)})^n(v_j)$, d. h. $v_j = 0$. Daher sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ die einzigen Gewichte und es ist $U(\lambda_i) = V_{\lambda_i}$ für $i = 1, \ldots, l$. ∎

4 Cartanalgebren

Definition 4.1
Eine **Derivation** einer Lie-Algebra L ist eine lineare Abbildung $\delta\colon L \to L$ mit $\delta([x,y]) = [\delta(x),y] + [x,\delta(y)]$ für alle $x,y \in L$.

Beispiel

(i) Für $a \in L$ ist ad_a eine Derivation von L. Denn für $x,y \in L$ gilt: $\mathrm{ad}_a([x,y]) = [a,[x,y]] = -[[x,y],a] = [[y,a],x]+[[a,x],y] = [x,\mathrm{ad}_a(y)]+[\mathrm{ad}_a(x),y]$. Man nennt ad_a eine **innere Derivation** von L.

(ii) Für Derivationen δ,δ' von L und $\alpha \in \mathbb{C}$ sind auch $\delta+\delta', \alpha\delta, [\delta,\delta']$ Derivationen von L. Denn für $x,y \in L$ gilt: $[\delta,\delta']([x,y]) = \delta(\delta'([x,y])) - \delta'(\delta([x,y])) = \delta([\delta'(x),y] + [x,\delta'(y)]) - \delta'([\delta(x),y]+[x,\delta(y)]) = [\delta(\delta'(x)),y]+[\delta'(x),\delta(y)]+[\delta(x),\delta'(y)]+[x,\delta(\delta'(y))] - [\delta'(\delta(x)),y] - [\delta(x),\delta'(y)] - [\delta'(x),\delta(y)] - [x,\delta'(\delta(y))] = [[\delta,\delta'](x),y] + [x,[\delta,\delta'](y)]$.

Daher bilden die Derivationen der Lie-Algebra L eine Unteralgebra $\mathrm{Der}(L) \subseteq \mathrm{gl}(V)$.

Bemerkung 4.2
Für $a \in L$ und $\delta \in \mathrm{Der}(K)$ ist

$$[\delta,\mathrm{ad}_a] = \mathrm{ad}_{\delta(a)}\,.$$

Denn für alle $x \in L$ gilt $[\delta,\mathrm{ad}_a](x) = \delta(\mathrm{ad}_a(x)) - \mathrm{ad}_a(\delta(x)) = \delta([a,x]) - [a,\delta(x)] = [\delta(a),x] = \mathrm{ad}_{\delta(a)}(x)$.

Daher bilden die inneren Derivationen von L ein Ideal in $\mathrm{Der}(L)$.

Satz 4.3
Seien L eine Lie-Algebra, $\delta \in \mathrm{Der}(L)$ und $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$[L_\lambda(\delta), L_\mu(\delta)] \subseteq L_{\lambda+\mu}(\delta)$$

Inbesondere ist $L_0(\delta) \subseteq L$ eine Unteralgebra.

Beweis:
Seien $x \in L_\lambda(\delta), y \in L_\mu(\delta)$ und $k,l \in \mathbb{N}_0$ mit $(\delta - \lambda\,\mathrm{id}_L)^k(x) = 0 = (\delta - \mu\,\mathrm{id}_L)^l(y)$. Wegen

$\mathrm{ad}_\delta(\mathrm{ad}_x) = [\delta, \mathrm{ad}_x] = \mathrm{ad}_{\delta(x)}$ ist $(\mathrm{ad}_\delta - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{gl}(L)})^i(\mathrm{ad}_x) = \mathrm{ad}_{(\delta-\lambda\,\mathrm{id}_L)^i(x)}$. Nach Satz 3.5 gilt also:

$$\begin{aligned}
(\delta - (\lambda+\mu)\,\mathrm{id}_L)^{k+l}([x,y]) &= \sum_{i=0}^{k+l} \binom{k+l}{i} \Big((\mathrm{ad}_\delta - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{gl}(L)})^i(\mathrm{ad}_x) \circ (\delta - \mu\,\mathrm{id}_L)^{k+l-i}\Big)(y) \\
&= \sum_{i=0}^{k+l} \binom{k+l}{i} \Big(\mathrm{ad}_{(\delta-\lambda\,\mathrm{id}_L)^i(x)} \circ (\delta - \mu\,\mathrm{id}_L)^{k+l-i}\Big)(y) \\
&= \sum_{i=0}^{k+l} \binom{k+l}{i} [(\delta - \lambda\,\mathrm{id}_L)^i(x), (\delta - \mu\,\mathrm{id}_L)^{k+l-i}(y)] = 0
\end{aligned}$$

Denn für $i \geq k$ ist $(\delta - \lambda\,\mathrm{id}_L)^i(x) = 0$ und für $i < k$ ist $(\delta - \mu\,\mathrm{id}_L)^{k+l-i}(y) = 0$. ∎

Definition 4.4
Für jede Lie-Algebra L und jedes Element $a \in L$ heißt

$$L_0(\mathrm{ad}_a) = \{x \in L \colon (\mathrm{ad}_a)^n(x) = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

Engelalgebra (oder a-Engelalgebra) von L.

Bemerkung 4.5

(i) Wegen $\mathrm{ad}_a(a) = [a,a] = 0$ ist stets $a \in L_0(\mathrm{ad}_a)$.

(ii) Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, $\varphi \in \mathrm{gl}(V)$ und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $\varphi(U) \subseteq U$. seien $\varphi_U \in \mathrm{gl}(U)$ die Einschränkung von φ und $\varphi^U \colon V/_U \to V/_U, v + U \mapsto \varphi(v) + U$ die von φ induzierte lineare Abbildung. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist dann $U_\lambda(\varphi_U) = U \cap V_\lambda(\varphi)$ und $(V/_U)_\lambda(\varphi^U) = V_\lambda(\varphi) + U/_U$. Das werden wir im folgenden benutzen.

Definition 4.6
Eine Unteralgebra K einer Lie-Algebra L mit $N_L(K) = K$ heißt **selbstnormalisierend** in L.

Satz 4.7
Sei E eine Engelalgebra einer Lie-Algebra L und sei $K \subseteq L$ eine Unteralgebra mit $E \subseteq K$. Dann ist K selbstnormalisierend in L. Insbesondere ist E selbstnormalisierend in L.

Beweis:
Sei $a \in L$ mit $E = L_0(\mathrm{ad}_a)$. Dann ist $a \in E \subseteq K \subseteq N_L(K)$. Also ist $a + K = 0$ in der Lie-Algebra $M := N_L(K)/_K$. Daher ist $\mathrm{ad}^M_{a+K} = \mathrm{ad}^M_0 = 0$. Aus Bemerkung 4.5 Punkt (ii) folgt:

$$\begin{aligned}
M &= M_0(\mathrm{ad}^M_{a+K}) = N_L(K)_0(\mathrm{ad}_a|N_L(K)) + K/_K \\
&\subseteq L_0(\mathrm{ad}_a) + K/_K = E + K/_K = 0
\end{aligned}$$

d. h. $N_L(K) = K$ ∎

Bemerkung 4.8
Seien V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension $n < \infty$ und $\varphi, \psi \in \mathrm{gl}(V)$. Dann existieren Polynome $p_1, \dots, p_n$ mit $\deg p_i \leq n$ für $i = 1, \dots, n$ und der Eigenschaft, dass für $\mu \in \mathbb{C}$ das charakteristische Polynom von $\varphi + \mu\psi$ die Form

$$\lambda^n + p_1(\mu)\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(\mu)\lambda + p_n(\mu)$$

hat. Dies erkennt man sofort durch Entwickeln von $\det(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi - \mu\psi)$.

Satz 4.9
Sei K eine Unteralgebra einer Lie-Algebra L und sei $z \in K$ mit $K \subseteq L_0(\mathrm{ad}_z)$. Für alle $x \in K$ mit $L_0(\mathrm{ad}_x) \subseteq L_0(\mathrm{ad}_z)$ sei ferner $L_0(\mathrm{ad}_x) = L_0(\mathrm{ad}_z)$. Dann ist $L_0(\mathrm{ad}_z) \subseteq L_0(\mathrm{ad}_x)$ für alle $x \in K$.

Beweis:
Nach Satz 4.3 ist $H := L_0(\mathrm{ad}_z) \subseteq L$ eine Unteralgebra mit $K \subseteq H$. Für $x \in K$ ist also $\mathrm{ad}_x(H) \subseteq H$. Daher sind die Abbildungen:

$$\varphi_x \colon H \to H, a \mapsto \mathrm{ad}_x(a) = [x, a]$$
$$\psi_x \colon L/_H \to L/_H, a + H \mapsto \mathrm{ad}_x(a) + H = [x, a] + H$$

wohldefiniert und linear. Setze $m := \dim H, n := \dim L$ und $y := x - z \in K$. Für $\mu \in \mathbb{C}$ ist dann $\varphi_{z+\mu y} = \varphi_z + \mu\varphi_y$ und $\psi_{z+\mu y} = \psi_z + \mu\psi_y$. Nach Bemerkung 4.8 existieren Polynome $f_1, \dots, f_m$ mit $\deg f_i \leq m$ für $i = 1, \dots, m$ und der Eigenschaft, dass das charakteristische Polynom von $\varphi_{z+\mu y}$ die folgende Form hat:

$$\lambda^m + f_1(\mu)\lambda^{m-1} + \cdots + f_m(\mu)$$

Analog existieren Polynome $g_1, \dots, g_{n-m}$ mit $\deg g_i \leq n - m$ für $i = 1, \dots, n - m$ und der Eigenschaft, dass das charakteristische Polynom von $\psi_{z+\mu y}$ die folgende Form hat:

$$\lambda^{n-m} + g_1(\mu)\lambda^{n-m-1} + \cdots + g_{n-m}(\mu)$$

Nach Bemerkung 4.5 ist $(L/_H)_0(\psi_z) = L_0(\mathrm{ad}_z) + H/_H = 0$, d. h. 0 ist kein Eigenwert von ψ_z. Folglich ist $g_{n-m}(0) \neq 0$. Insbesondere ist $g_{n-m} \neq 0$, d. h. g_{n-m} hat höchstens n Nullstellen. Seien $\mu_0, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}$ mit $g_{n-m}(\mu_i) \neq 0$ für $i = 0, \dots, n$. Dann ist jeweils 0 kein Eigenwert von $\psi_{z+\mu_i y}$, also

$$0 = (L/_H)_0(\psi_{z+\mu_i y}) = L_0(\mathrm{ad}_{z+\mu_i y}) + H/_H.$$

Folglich ist $L_0(\mathrm{ad}_{z+\mu_i y} \subseteq H$. Nach Voraussetzung ist daher:

$$H = L_0(\mathrm{ad}_{z+\mu_i y}) = \{a \in L \colon (\mathrm{ad}_{z+\mu_i y})^k(a) \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}$$

Zu jedem $a \in H$ existiert also ein $k \in \mathbb{N}$ mit $0 = (\varphi_{z+\mu_i y})^k(a)$. Daher ist $H = H_0(\varphi_{z+\mu_i y})$. Folglich ist $\varphi_{z+\mu_i y}$ nilpotent, d. h. das charakteristische Polynom von $\varphi_{z+\mu_i y}$ ist λ^m. Nach dem Identitätssatz für Polynome ist also $f_1(\mu_i) = \cdots = f_m(\mu_i) = 0$. Wegen $\deg f_j \leq m \leq n$ folgt: $f_j = 0$ für $j = 1, \dots, m$. Für $\mu \in \mathbb{C}$ ist also λ^m das charakteristische Polynom von $\varphi_{z+\mu y}$. Insbesondere ist 0 der einzige Eigenwert von $\varphi_{z+\mu y}$. Also ist $H = H_0(\varphi_{z+\mu y}) \subseteq L_0(\mathrm{ad}_{z+\mu y})$. Für $\mu = 1$ erhält man insbesondere $H \subseteq L_0(\mathrm{ad}_{z+y}) = L_0(\mathrm{ad}_x)$. ∎

Definition 4.10
Sei L eine Lie-Algebra. Eine Engelalgebra von L, die keine andere Engelalgebra von L echt enthält, heißt **minimale Engelalgebra** von L. Eine nilpotente selbstnormalisierende Unteralgebra von L heißt **Cartanalgebra** von L.

Satz 4.11
Für eine Unteralgebra H einer Lie-Algebra L sind äquivalent:

(i) H ist eine minimale Engelalgebra von L.

(ii) H ist eine Cartanalgebra von L.

BEWEIS:

(i)⇒(ii) Sei H eine minimale Engelalgebra von L und sei $z \in L$ mit $H = L_0(\mathrm{ad}_z)$, d. h. $z \in H$. Nach Satz 4.9 ist $H \subseteq L_0(\mathrm{ad}_x)$ für $x \in H$. Daher ist $\mathrm{ad}_x \colon H \to H$ für $x \in H$ nilpotent. Nach Satz 3.4 ist H nilpotent und nach Satz 4.7 ist H selbstnormalisierend.

(ii)⇒(i) Sei H eine Cartanalgebra von L, also insbesondere nilpotent. Für $x \in H$ ist dann $\mathrm{ad}_x \colon H \to H$ nilpotent, d. h. $H = H_0(\mathrm{ad}_x) \subseteq L_0(\mathrm{ad}_x)$. Wir wählen $z \in H$ so, dass $L_0(\mathrm{ad}_z)$ so klein wie möglich ist. Für $x \in H$ ist dann $L_0(\mathrm{ad}_z) \subseteq L_0(\mathrm{ad}_x)$ nach Satz 4.9. Ferner ist die Abbildung

$$\varphi_x \colon L_0(\mathrm{ad}_z)/_H \to L_0(\mathrm{ad}_z)/_H, y + H \mapsto \mathrm{ad}_x(y) + H = [x, y] + H$$

wohldefiniert und linear. Die Abbildung

$$\Phi \colon H \to \mathrm{gl}(L_0(\mathrm{ad}_x)/_H), x \mapsto \varphi_x$$

ist ein Homomorphismus. Für $x \in H$ ist ferner $\Phi(x) = \varphi_x$ nilpotent. Für $y \in L_0(\mathrm{ad}_z) \subseteq L_0(\mathrm{ad}_x)$ existiert nämlich ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(\mathrm{ad}_x)^n(y) = 0$, d. h. $0 = (\mathrm{ad}_x)^n(y)+H = \varphi_x^n(y+H)$. Daher ist jedes Element in $\Phi(H)$ nilpotent.

Wir nehmen an: $L_0(\mathrm{ad}_z) \neq H$. Nach Satz 2.10 existiert dann ein $y+H \in L_0(\mathrm{ad}_z)/_H \setminus \{0\}$ mit $0 = \varphi_x(y + H) = [x, y] + H$ für alle $x \in H$. Daher ist $[x, y] \in H$ für alle $x \in H$, also $y \in N_L(H) = H$ und $y + H = 0$.

Dies zeigt: $L_0(\mathrm{ad}_z) = H$, d. h. H ist eine Engelalgebra von L. Ist $L_0(\mathrm{ad}_a) \subseteq H$ für ein $a \in L$, so ist $a \in L_0(\mathrm{ad}_a) \subseteq H$ und daher $H = L_0(\mathrm{ad}_z) \subseteq L_0(\mathrm{ad}_a)$. Folglich ist H eine minimale Engelalgebra von L. ■

Beispiel 1
Für $n \in \mathbb{N}$ bilden die Diagonalmatrizen eine Cartanalgebra $H = \mathfrak{h}_n$ von $L = \mathrm{gl}_n$. Für $x, y \in H$ ist nämlich $[x, y] = xy - yx = 0$, d. h. H ist abelsch und damit nilpotent. Sei $a = (\alpha_{ij}) \in N_L(H)$ und $x = (\xi_{ij}) \in H$. Dann ist $ax - xa \in H$, d. h. für alle $i \neq k$ gilt:

$$0 = \sum_{j=1}^{n}(\alpha_{ij}\xi_{jk} - \xi_{ij}\alpha_{jk}) = \alpha_{ik}\xi_{kk} - \xi_{ii}\alpha_{ik} = \alpha_{ik}(\xi_{kk} - \xi_{ii})$$

Für $x = e_{kk}$ erhält man also $0 = \alpha_{ik}$. Also ist $a \in H$.

Definition 4.12
Sei H eine nilpotente Unteralgebra einer Lie-Algebra L. Für $\lambda \in H^*$ bezeichnet man mit $L_\lambda(H)$ den **Gewichtsraum** des H-Moduls L zum Gewicht λ. Offenbar ist

$$L_\lambda(H) = \bigcap_{z \in H} L_{\lambda(z)}(\mathrm{ad}_z^L)$$

Für $\lambda, \mu \in H^*$ folgt daher aus Satz 4.3: $[L_\lambda(H), L_\mu(H)] \subseteq L_{\lambda+\mu}(H)$.

Satz 4.13
Eine nilpotente Unteralgebra H einer Lie-Algebra L ist genau dann eine Cartanalgebra von L, wenn $H = L_0(H)$ gilt.

BEWEIS:
Für $x \in H$ und $y \in N_L(H)$ ist $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y] \in H$. Da H nilpotent ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(\mathrm{ad}_x)^n(y) = 0$. Daher ist $y \in L_0(H) =: J$. Dies zeigt: $H \subseteq N_L(H) \subseteq J$. Im Fall $H = J$ ist also H eine Cartanalgebra von L. Im Fall $H \neq J$ betrachten wir $J/_H$ als H-Modul. Die entsprechende Darstellung ist eine Nildarstellung. Daher existiert ein $z + H \in J/_H \setminus \{0\}$ mit $0 = a \cdot (z + H) = a \cdot z + H$, d. h. $[a, z] \in H$ für $a \in H$. Folglich ist $z \in N_L(H) \setminus H$, d. h. H ist keine Cartanalgebra von L. ■

Bemerkung 4.14
Sei H eine Cartanalgebra einer Lie-Algebra L. Betrachtet man L als H-Modul, liefert Satz 3.14 die Zerlegung:

(**Cartanzerlegung**)
$$L = \bigoplus_{\lambda \in H^*} L_\lambda(H)$$

Die entsprechenden Gewichte $\lambda \in H^* \setminus \{0\}$ heißen **Wurzeln** von L bezüglich H. Nach Satz 4.13 ist $L_0(H) = H$. Bezeichnet man die Menge aller Wurzeln von L bezüglich H mit Φ, so kann man die Cartanzerlegung auch in der folgenden Form schreiben:

$$L = H \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Phi} L_\lambda(H)$$

Dabei ist Φ endlich und $0 \notin \Phi$. Für $\alpha, \beta \in \Phi$ existieren eindeutig bestimmte $s, t \in \mathbb{N}_0$ mit $\beta - s\alpha, \ldots, \beta, \ldots, \beta + t\alpha \in \Phi$, aber $\beta - (s+1)\alpha, \beta + (t+1)\alpha \notin \Phi$. Man nennt $\beta - s\alpha, \ldots, \beta, \ldots, \beta + t\alpha \in \Phi$ die α-**Kette** durch β.

Beispiel
Seien $n \in \mathbb{N}, L = \mathrm{gl}_n, H = \mathfrak{h}_n, h \in H$ und $h = \sum_{i=1}^n \xi_i e_{ii}$ mit $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$. Für $j \neq k$ gilt dann:

$$\mathrm{ad}_h(e_{jk}) = [h, e_{jk}] = he_{jk} - e_{jk}h = (\xi_j - \xi_k)e_{jk}$$

Definiert man also $\alpha_{jk} \in H^*$ durch $\alpha_{jk}(\sum_{i=1}^n \xi_i e_{ii}) := \xi_j - \xi_k$, so ist $e_{jk} \in L_{\alpha_{jk}}(H)$. Wegen $L = H \oplus \bigoplus_{j \neq k} \mathbb{C}e_{jk} = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha(H)$ folgt sogar $L_{\alpha_{jk}}(H) = \mathbb{C}e_{jk}$. Daher gilt hier: $\Phi = \{\alpha_{jk} \colon j, k = 1, \ldots, n, j \neq k\}$

Satz 4.15
Seien H eine Cartanalgebra einer Lie-Algebra L und α,β Wurzeln von L bezüglich H. Dann existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $\beta|[L_{-\alpha}(H), L_\alpha(H)] = q\alpha|[L_{-\alpha}(H), L_\alpha(H)]$.

BEWEIS:
Seien $\beta - s\alpha, \ldots, \beta, \ldots, \beta + t\alpha$ die α-Kette durch β und

$$M := L_{\beta-s\alpha}(H) \oplus \ldots \oplus L_\beta(H) \oplus \ldots \oplus L_{\beta+t\alpha}(H)$$

Dann ist $[L_\alpha(H), M] \subseteq M, [L_{-\alpha}(H), M] \subseteq M$ und $[H, M] = [L_0(H), M] \subseteq M$. Für $y \in L_{-\alpha}(H), z \in L_\alpha(H)$ und $x := [y, z] \in L_0(H) = H$ ist $\mathrm{ad}_x = [\mathrm{ad}_y, \mathrm{ad}_x]$, also

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_z - \mathrm{ad}_z \circ \mathrm{ad}_y)|M = \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}_x\,|M) \\ &= \sum_{i=-s}^{t} \underbrace{(\dim L_{\beta+i\alpha}(H))}_{=:\, d_i} \cdot (\beta + i\alpha)(x) \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\beta(x) = -\frac{\sum_{i=-s}^{t} i d_i}{\sum_{i=-s}^{t} d_i}\alpha(x)$$

■

5 Auflösbare Lie-Algebren

Definition 5.1
Eine Lie-Algebra L mit $L^{(n)} = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ heißt **auflösbar** bzw. **auflösbare Lie-Algebra**.

Bemerkung

(i) Für jede Unteralgebra K einer Lie-Algebra L und $n \in \mathbb{N}$ ist $K^{(n)} \subseteq L^{(n)}$. Mit L ist also auch K auflösbar.

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ und jeden Homomorphismus von Lie-Algebren $\varphi\colon L \to M$ ist $\varphi(L^{(n)}) = \varphi(L)^{(n)}$ (nachrechnen!). Mit L ist also auch $\varphi(L)$ auflösbar.

(iii) Ist I ein auflösbares Ideal einer Lie-Algebra L mit der Eigenschaft, dass $L/_I$ auflösbar ist, so ist auch L auflösbar. Sind nämlich $m, n \in \mathbb{N}$ mit $0 = I^{(m)}$ und $0 = (L/_I)^{(n)} = L^{(n)} + I/_I$, so ist $L^{(n)} \subseteq I$ und $L^{(m+n)} = (L^{(n)})^{(m)} \subseteq I^{(m)} = 0$.

(iv) Sind I, J auflösbare Ideale von L, so auch $I + J$. Denn nach den obigen Erkenntnissen ist $I + J/_J \cong I/_{I \cap J}$ auflösbar und wegen (iii) ist dann $I + J$ auflösbar.

(v) Für jede Lie-Algebra L ist nach (iv) die Summe aller auflösbaren Ideale von L ein auflösbares Ideal $\operatorname{Rad} L$ von L. Dieses heißt **Radikal** von L. Nach (iii) ist stets $\operatorname{Rad}(L/_{\operatorname{Rad} L}) = 0$.

(vi) Eine Lie-Algebra L mit $\operatorname{Rad} L = 0$ heißt **halbeinfach** oder **halbeinfache Lie-Algebra**. Nach (v) ist $L/_{\operatorname{Rad} L}$ halbeinfach für jede Lie-Algebra L.

Beispiel

(a) Jede nilpotente Lie-Algebra L ist auflösbar. Denn für $n \in \mathbb{N}$ ist $L^{(n)} \subseteq L^n$ (nachrechnen!)

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathfrak{b}_n$ auflösbar. Denn nach dem ersten Beispiel im dritten Kapitel ist $\mathfrak{b}_n' = \mathfrak{n}_n$, also $\mathfrak{b}_n^{(n+1)} = (\mathfrak{b}_n')^{(n)} = \mathfrak{n}_n^{(n)} = 0$.

(c) Die Lie-Algebra sl_2 ist nicht auflösbar. Denn mit den üblichen Bezeichnungen bilden:

$$\begin{aligned} e_{11} - e_{22} &= [e_{12}, e_{21}] \\ 2e_{12} &= [e_{11} - e_{22}, e_{12}] \\ -2e_{21} &= [e_{11} - e_{22}, e_{21}] \end{aligned}$$

eine Basis von sl_2. Daher ist $\mathrm{sl}_2 = \mathrm{sl}_2' = \mathrm{sl}_2'' = \cdots$.

Satz 5.2 (Dynkins Lemma)
Seien L eine Lie-Algebra, V ein L-Modul, $I \subseteq L$ ein Ideal und $\lambda \in I^*$. Dann ist $U = \{v \in V : a \cdot v = \lambda(a)v \text{ für } a \in I\} \subseteq V$ ein Untermodul.

Beweis:
Offenbar ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und sei o. B. d. A. $U \neq 0$. Für $u \in U, x \in L, a \in I$ gilt:

$$\begin{aligned} a \cdot (x \cdot u) &= x \cdot (a \cdot u) + [a, x] \cdot u = x \cdot (\lambda(a)u) + \lambda([a, x])u \\ &= \lambda(a)x \cdot u + \lambda([a, x])u \end{aligned}$$

Für ein $i \in \mathbb{N}$ sei bereits gezeigt, dass die Elemente $\alpha_{ij}(a) \in \mathbb{C}$ existieren mit

$$a \cdot (x^i \cdot u) = \lambda(a)x^i \cdot i + \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{ij}(a)x^j \cdot u$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} a \cdot (x^{i+1} \cdot u) &= a \cdot (x \cdot (x^i \cdot u)) = x \cdot (a \cdot (x^i \cdot u)) + [a, x](x^i u) \\ &= x(\lambda(a)x^i u + \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{ij}(a)x^j u) + \lambda([a, x])x^i u + \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{ij}([a, x])x^j u \\ &= \lambda(a)x^{i+1}u + \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{ij}(a)x^{j+1}u + \lambda([a, x])x^i u + \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{ij}([a, x])x^j u \\ &= \lambda(a)x^{i+1}u + \sum_{j=0}^{i} \underbrace{\alpha_{i+1,j}(a)}_{\in \mathbb{C}} x^j u \end{aligned}$$

Wegen $\dim V < \infty$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $u, xu, \ldots, x^n u$ linear abhängig sind. Sei n minimal mit dieser Eigenschaft und $W := \operatorname{span}(u, xu, \ldots, x^{n-1}u)$. Dann bilden $u, xu, \ldots, x^{n-1}u$ eine Basis von W. Offenbar ist $xW \subseteq W$ und $aW \subseteq W$ für $a \in I$. Ist $\varDelta$ die Darstellung von L auf V, so gilt für $a \in I$: $\operatorname{Spur}(\varDelta(a)|W) = n\lambda(a)$. Insbesondere ist

$$n\lambda([a, x]) = \operatorname{Spur}(\varDelta([a, x])|W) = \operatorname{Spur}(\varDelta(a) \circ \varDelta(x) - \varDelta(x) \circ \varDelta(a)|W) = 0$$

Folglich ist $\lambda([a, x]) = 0$ und $a \cdot (x \cdot u) = \lambda(a)x \cdot u$. Dies zeigt $x \cdot u \in U$. ∎

Satz 5.3 (Lie)
Seien L eine auflösbare Lie-Algebra und $V \neq 0$ ein L-Modul. Dann existieren ein $v \in V \setminus \{0\}$ und ein $\lambda \in L^*$ mit $a \cdot v = \lambda(a)v$ für alle $a \in L$.

Beweis:
Der Beweis erfolgt per Induktion nach $n := \dim L$. O. B. d. A. sei $n \neq 0$. Da L auflösbar ist, ist $L \neq L'$. Sei $I \subseteq L$ ein Untervektorraum mit der Dimension $n - 1$ mit $L' \subseteq I$. Für beliebige Elemente $x, y \in L$ ist dann $[x, y] \in L' \subseteq I$. Insbesondere ist $I \subseteq L$ ein Ideal. Da

I auflösbar ist, existieren nach Induktion ein Element $w \in V \setminus \{0\}$ und ein $\mu \in I^*$ mit $a \cdot w = \mu(a)w$ für alle $a \in I$. Daher ist

$$W := \{v \in V \colon a \cdot v = \mu(a)v \, \forall a \in I\} \neq 0$$

Nach Satz 5.2 ist $W \subseteq V$ ein L-Untermodul. Offenbar ist $L = I \oplus \mathbb{C}b$ für ein $b \in L$. Wegen $b \cdot W \subseteq W$ hat die lineare Abbildung $W \to W, v \mapsto b \cdot v$ einen Eigenwert $\beta \in \mathbb{C}$ und eine entsprechenden Eigenvektor $v \in W \setminus \{0\}$. Die Abbildung $\lambda \colon L \to \mathbb{C}$ mit $\lambda(a + \gamma b) = \mu(a) + \gamma\beta$ für $a \in I, \gamma \in \mathbb{C}$ ist also linear. Es gilt $a \cdot v = \lambda(a)v$ für $a \in L$. ∎

Bemerkung 5.4
Für jede auflösbare Lie-Algebra L ist also jeder irreduzible L-Modul eindimensional.

Satz 5.5
Seien L eine auflösbare Lie-Algebra und V ein L-Modul. Dann existiert eine derartige Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V, dass $a \cdot v_j$ für $a \in L$ und $j = 1, \ldots, n$ eine Linearkombination von $v_1, \ldots, v_j$ ist.

Beweis:
Diesmal wird nach der Dimension des Vektorraums induziert: $n := \dim V$. o. B. d. A. sei $n \neq 0$. Nach Satz 5.3 existieren ein $v_1 \in V \setminus \{0\}$ und ein $\lambda \in L^*$ mit $a \cdot v_1 = \lambda(a)v_1$ für alle $a \in L$. Daher ist $U := \mathbb{C}v_1 \subseteq V$ ein Untermodul. Nach Induktion existiert eine Basis $v_2 + U, \ldots, v_n + U$ derart, dass $a \cdot (v_j + U) = a \cdot v_j + U$ für alle $a \in L$ und $j = 2, \ldots, n$ eine Linearkombination von $v_2 + U, \ldots, v_j + U$ ist. Dann bilden $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V mit der gewünschten Eigenschaft. ∎

Bemerkung 5.6
Bei der entsprechenden Matrixdarstellung werden also die Elemente in L durch obere Dreiecksmatrizen dargestellt.

Satz 5.7
In jeder auflösbaren Lie-Algebra L findet man Ideale $0 = I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_n = L$ mit $\dim I_k = k$ für $k = 0, \ldots, n$.

Beweis:
Setze $V := L$ und $I_k := \mathbb{C}v_1 + \cdots + \mathbb{C}v_k$ für $k = 0, \ldots, n$ in Satz 5.5. ∎

Satz 5.8
Sei L eine auflösbare Lie-Algebra. Für $x \in L'$ ist dann ad_x^L nilpotent. Insbesondere ist L' nilpotent.

Beweis:
Wir setzen $V := L$ in Satz 5.5 und betrachten die entsprechende Matrixdarstellung Λ. Dann ist $\Lambda(L) \subseteq b_n$. Folglich ist also $\Lambda(L') = \Lambda(L)' \subseteq f_n' \subseteq \mathfrak{n}_n$. Für $x \in L'$ ist also ad_x^L nilpotent. Insbesondere ist dann auch $\mathrm{ad}_x^{L'}$ nilpotent. Nach Satz 3.4 ist L' nilpotent. ∎

6 Die Killingform

Der Name geht auf einen deutschen Mathematiker zurück. Es ist eines der fundamentalen Hilfsmittel zur Untersuchung von Lie-Algebren.

Definition 6.1
Für jede Lie-Algebra L heißt die symmetrische Bilinearform

$$\kappa_L\colon L \times L \to \mathbb{C}, (a, b) \mapsto \operatorname{Spur}(\operatorname{ad}_a \circ \operatorname{ad}_b)$$

die **Killingform** von L.

Bemerkung 6.2

(i) Für $a, b \in L$ und $\delta \in \operatorname{Der}(L)$ gilt:

$$\begin{aligned}\kappa_L(\delta(a), b) + \kappa_L(a, \delta(b)) &= \operatorname{Spur}(\operatorname{ad}_{\delta(a)} \circ \operatorname{ad}_b + \operatorname{ad}_a \circ \operatorname{ad}_{\delta(b)})\\ &= \operatorname{Spur}([\delta, \operatorname{ad}_a] \circ \operatorname{ad}_b + \operatorname{ad}_a \circ [\delta, \operatorname{ad}_b])\\ &= \operatorname{Spur}(\delta \circ \operatorname{ad}_a \circ \operatorname{ad}_b - \operatorname{ad}_a \circ \delta \circ \operatorname{ad}_b + \operatorname{ad}_a \circ \delta \circ \operatorname{ad}_b - \operatorname{ad}_a \circ \operatorname{ad}_b \circ \delta)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Insbesondere gilt für $a, b, c \in L$:

$$\kappa_L([a, b], c) = -\kappa_L([b, a], c) = -\kappa_L(\operatorname{ad}_b(a), c) = \kappa_L(a, \operatorname{ad}_b(c)) = \kappa_L(a, [b, c]).$$

Man diese Eigenschaft **Assoziativität**.

(ii) Für jedes Ideal $I \subseteq L$ ist $\kappa_I = \kappa_L/_{I\times I}$. Zum Beweis wählt man zunächst eine Basis $b_1, \ldots, b_m$ von I und ergänzt diese zu einer Basis $b_1, \ldots, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n$ von L. Man schreibt $[x, [y, b_j]] = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}(x, y) b_i$ mit $\alpha_{ij}(x, y) \in \mathbb{C}$ für $x, y \in I, i, j = 1, \ldots, n$. Dann ist $\kappa_L(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}(x, y)$. Da $I \subseteq L$ ein Ideal ist, gilt $\alpha_{ij}(x, y) = 0$ für alle i, j mit $i > m$. Daher ist $\kappa_I(x, y) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ii}(x, y) = \kappa_L(x, y)$.

(iii) Für jedes Ideal $I \subseteq L$ ist $I^\perp := \{y \in L\colon \kappa_L(x, y) = 0\, \forall x \in I\} \subseteq L$ ein Ideal. Für alle $a \in I^\perp, b \in L, c \in I$ ist nämlich $\kappa_L([a, b], c) = \kappa_L(a, [b, c]) = 0$. Insbesondere ist auch $L^\perp \subseteq L$ ein Ideal.

(iv) Sei $L^\perp = 0$ und $\delta \in \operatorname{Der}(L)$. Dann ist die Abbildung

$$\lambda\colon L \to \mathbb{C}, a \mapsto \operatorname{Spur}(\delta \circ \operatorname{ad}_a)$$

linear. Wegen $L^\perp = 0$ ist die Abbildung $L \to L^*, x \mapsto (L \to \mathbb{C}, y \mapsto \kappa_L(x, y))$ linear. Da der Kern der Abbildung 0 ist, ist sie injektiv. Somit auch bijektiv. Insbesondere existiert ein $x \in L$ mit $\kappa_L(x,y) = \lambda(y) = \mathrm{Spur}(\delta \circ \mathrm{ad}_y)$ für alle $y \in L$. Für $y, z \in L$ ist also: $\kappa_L(\delta(y), z) = \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}_{\delta(y)} \circ \mathrm{ad}_z) = \mathrm{Spur}([\delta, \mathrm{ad}_y] \circ \mathrm{ad}_z) = \mathrm{Spur}(\delta \circ \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_z - \mathrm{ad}_y \circ \delta \circ \mathrm{ad}_z) = \mathrm{Spur}(\delta \circ \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_z - \delta \circ \mathrm{ad}_z \circ \mathrm{ad}_y) = \mathrm{Spur}(\delta \circ [\mathrm{ad}_y, \mathrm{ad}_z]) = \mathrm{Spur}(\delta \circ \mathrm{ad}_{[y,z]}) = \kappa_L(x, [y,z]) = \kappa_L([x,y], z)$. Daher ist $\delta(y) = [x,y] = \mathrm{ad}_x(y)$. Dies zeigt, dass im Fall $L^\perp = 0$ jede Derivation von L eine innere Derivation ist.

Satz 6.3
Sei H eine Cartanalgebra einer Lie-Algebra L. Für alle $\alpha, \beta \in H^*$ mit $\alpha + \beta \neq 0$ gilt:

$$\kappa_L(L_\alpha(H), L_\beta(H)) = 0$$

Beweis:
Wir wählen eine Basis $b_1, \dots, b_n$ von L, die der Cartanzerlegung $L = \bigoplus_{\lambda \in H^*} L_\lambda(H)$ angepasst ist. Für $x \in L_\alpha(H), y \in L_\beta(H), \lambda \in H^*, z \in L_\lambda(H)$ ist dann $(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y)(z) = [x,[y,z]] \in L_{\alpha+\beta+\lambda}(H)$. Schreibt man also $(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y)(b_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i$ mit $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$, dann ist $\alpha_{ii} = 0$ für $i = 1, \dots, n$. Also ist $\kappa_L(x,y) = \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y) = \sum \alpha_{ii} = 0$. ∎

Satz 6.4
Sei H eine Cartanalgebra einer Lie-Algebra L mit $0 \neq L = L'$. Dann existiert ein $x \in H$ mit $\kappa_L(x,x) \neq 0$.

Beweis:
Nach der Voraussetzung ist $L = L' = [L,L] = \sum_{\lambda,\mu \in H^*} [L_\lambda(H), L_\mu(H)]$ mit $[L_\lambda(H), L_\mu(H)] \subseteq L_{\lambda+\mu}(H)$ für $\lambda, \mu \in H^*$. Daher ist $H = L_0(H) = \sum_{\alpha \in H^*} [L_\alpha(H), L_{-\alpha}(H)]$. Wegen $0 \neq L = L'$ ist L nicht nilpotent. Insbesondere ist dann $L \neq H$. Daher existiert wenigstens eine Wurzel β bezüglich H. Denn $L = \bigoplus_{\lambda \in H^*} L_\lambda(H)$. Wegen $\beta \neq 0$ existiert ein $\alpha \in H^*$ mit $\beta|[L_\alpha(H), L_{-\alpha}(H)] \neq 0$. Wähle $x \in [L_\alpha(H), L_{-\alpha}(H)]$ mit $\beta(x) \neq 0$. Wegen $\beta(H') = 0$ ist $\alpha \neq 0$, d. h. α ist auch Wurzel bezüglich H. Sei nun Φ die Menge aller Wurzeln bezüglich H. Für $\lambda \in \Phi$ existiert eine Zahl $r_{\lambda\alpha} \in \mathbb{Q}$ mit $\lambda|[L_\alpha(H), L_{-\alpha}(H)] = r_{\lambda\alpha}\alpha|[L_\alpha(H), L_{-\alpha}(H)]$ Insbesondere $0 \neq \beta(x) = r_{\beta\alpha}\alpha(x)$. Daher ist $\kappa_L(x,x) = \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_x) = \sum_{\lambda \in \Phi} \lambda(x)^2 \dim L_\lambda(H) = \alpha^2(x) \sum_{\lambda \in \Phi} r_{\lambda\alpha}^2 \dim L_\lambda(H) \neq 0$ (Vergleiche Satz 3.14) ∎

Satz 6.5 (I. Kriterium von Cartan)
Jede Lie-Algebra L mit $\kappa_L = 0$ ist auflösbar.

Beweis:
Beweis per Induktion über $n := \dim L$. O. B. d. A. sei $n \neq 0$. Nach dem Satz 6.4 ist $L \neq L'$. Damit ist die Ableitung echt kleiner als L. Nach Bemerkung 6.2 Punkt (ii) ist $\kappa_{L'} = \kappa_L|L' \times L' = 0$. Nach Induktion ist L' auflösbar, also auch L. ∎

Definition 6.6
Ein Untervektorraum I einer Lie-Algebra L mit $\delta(I) \subseteq I$ für alle $\delta \in \mathrm{Der}(L)$ heißt **charakteristisches Ideal** in L.

Bemerkung

(i) Gegebenenfalls ist $I \subseteq L$ Ideal. Denn $[a,x] = \mathrm{ad}_a(x) \in I$ für alle $a \in L, x \in I$.

(ii) Ist $I \subseteq L$ ein charakteristisches Ideal und $H \subseteq I$ ein charakteristisches Ideal, dann ist auch $H \subseteq L$ ein charakteristisches Ideal. Denn für $\delta \in \mathrm{Der}(L)$ ist nämlich $\delta|I \in \mathrm{Der}(I)$. Also ist $\delta(H) = (\delta|I)(H) \subseteq H$.

(iii) Ist $K \subseteq L$ ein Ideal und $I \subseteq K$ ein charakteristisches Ideal, so ist $I \subseteq L$ wieder ein Ideal. Denn für $a \in L$ ist $\mathrm{ad}_a|K \in \mathrm{Der}(K)$, also $\mathrm{ad}_a(I) = (\mathrm{ad}_a|K)(I) \subseteq I$.

Beispiel
Für $n \in \mathbb{N}$ sind L^n und $L^{(n)}$ charakteristische Ideale. (nachrechnen, Induktion nach n).

Satz 6.7 (II. Kriterium von Cartan)
Eine Lie-Algebra L ist genau dann halbeinfach, wenn die Killingform κ_L nicht ausgeartet ist, d. h. $L^\perp = 0$.

BEWEIS:

„$\Rightarrow$“ Ist κ_L ausgeartet, ist $L^\perp \neq 0$ ein Ideal in L mit $\kappa_{L^\perp} = \kappa_L|L^\perp \times L^\perp = 0$. Nach Satz 6.5 ist $L^\perp$ auflösbar. Also ist insgesamt $0 \neq L^\perp \subseteq \mathrm{Rad}(L)$. Folglich ist L nicht halbeinfach.

„$\Leftarrow$“ Sei L nicht halbeinfach. Dann ist $0 \neq \mathrm{Rad}(L) =: S$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $S^{(n)} = 0 \neq S^{(n-1)} =: A$. Wegen $A' = (S^{(n-1)})' = S^{(n)} = 0$ ist $A \subseteq L$ ein kommutatives Ideal (nach der obenstehenden Bemerkung Punkt (iii)). Für $a \in A$ und $x, y \in L$ ist $[a,[x,[a,y]]] \in [A,[L,A]] \subseteq [A,A] = A' = 0$. Daher ist $0 = \mathrm{ad}_a \circ \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_a$ und $0 = (\mathrm{ad}_a \circ \mathrm{ad}_x)^2$. Folglich ist $\mathrm{ad}_a \circ \mathrm{ad}_x$ nilpotent und $\kappa_L(a,x) = \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}_a \circ \mathrm{ad}_x) = 0$. Also ist $0 \neq A \subseteq L^\perp$, d. h. κ_L ist ausgeartet. ■

Satz 6.8
Jede Derivation einer halbeinfachen Lie-Algebra ist eine innere Derivation.

BEWEIS:
Nach Satz 6.7 und Bemerkung 6.2 (iv) ■

Satz 6.9
Sei H eine Cartanalgebra einer halbeinfachen Lie-Algebra L. Dann ist $\kappa_L|H \times H$ nicht ausgeartet und für jede Wurzel α von L bezüglich H ist auch $-\alpha$ eine Wurzel von L bezüglich H.

BEWEIS:
Sei $x \in H$ mit $\kappa_L(x, H) = 0$. Nach Satz 6.3 ist $\kappa_L(x, L_\lambda(H)) = 0$ für alle $\lambda \in H^* \setminus \{0\}$. Wegen $H = L_0(H)$ ist $\kappa_L(x, L) = 0$, d. h. $x = 0$. Aus $L_{-\alpha}(H) = 0$ folgt $\kappa_L(L_\alpha(H), L_\beta(H)) = 0$ für alle $\beta \in H^*$ nach Satz 6.3, also $L_\alpha(H) \subseteq L^\perp = 0$. ■

Bemerkung
Da $\kappa_L|H \times H$ nicht ausgeartet ist, ist die Abbildung $H \to H^*$, die jedem $h \in H$ die Linearform $H \to \mathbb{C}, h' \mapsto \kappa_L(h, h')$ zuordnet, eine lineare Bijektion. Daher existiert zu jedem $\lambda \in H^*$ genau ein Element h_λ in H mit

$$\lambda(h') = \kappa_L(h_\lambda, h')$$

für alle $h' \in H$. An diesen Bezeichnungen halten wir im folgenden fest.

Bemerkung 6.10
Sei H eine Cartanalgebra einer Lie-Algebra L. Für jedes $\lambda \in H^*$ existiert dann eine Basis von $L_\lambda(H)$, bezüglich der die Matrizen der Elemente $\mathrm{ad}_h |L_\lambda(H), h \in H$ obere Dreiecksgestalt mit Hauptdiagonale $\lambda(h)$ haben. Für $h, h' \in H$ gilt also:

$$\kappa_L(h, h') = \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}_h \circ \mathrm{ad}_{h'}) = \sum_{\lambda \in H^*} \lambda(h)\lambda(h') \dim L_\lambda(H).$$

Satz 6.11
Jede Cartanalgebra H einer halbeinfachen Lie-Algebra L ist kommutativ und H^* wird von den entsprechenden Wurzeln aufgespannt.

Beweis:
Für jede Wurzel α von L, bezüglich H ist $\alpha(H') = 0$. Folglich ist

$$\kappa_L(h, h') = \sum_{\lambda \in H^*} \lambda(h)\lambda(h') \dim L_\lambda(H) = 0$$

für $h \in H, h' \in H'$. Da $\kappa_L|H \times H$ nicht ausgeartet ist, folgt $h' = 0$.

Wird H^* *nicht* von den Wurzeln von L bezüglich H aufgespannt, dann existiert ein $h \in H \setminus \{0\}$ mit $\alpha(h) = 0$ für jede Wurzel α von L bezüglich H. Für $h' \in H$ ist also $\kappa_L(h, h') = \sum_{\lambda \in H^*} \lambda(h)\lambda(h') \dim L_\lambda(H) = 0$ im Widerspruch zu Satz 6.9. ∎

Satz 6.12
Sei H eine Cartanalgebra einer halbeinfachen Lie-Algebra L. Zu jeder Wurzel α von L bezüglich H existiert dann ein Element $e_\alpha \in L_\alpha(H) \setminus \{0\}$ mit $[h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha$ für alle $h \in H$. Gegebenenfalls ist $[e_\alpha, y] = \kappa_L(e_\alpha, y)h_\alpha$ für alle $y \in L_{-\alpha}(H)$ und es existiert ein $f_{-\alpha} \in L_{-\alpha}(H)$ mit $[e_\alpha, f_{-\alpha}] = h_\alpha$.

Beweis:
Sei α Wurzel von L bezüglich H. Dann existiert eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von $L_\alpha(H)$ bezüglich der die Matrizen der Elemente $\mathrm{ad}_h |L_\alpha(H), h \in H$ obere Dreiecksgestalt mit Hauptdiagonale $\alpha(h)$ haben. Sei $e_\alpha := b_1$. Dann ist $[h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha$.

Für $x \in H$ und $y \in L_{-\alpha}(H)$ gilt: $\kappa_L(x, [e_\alpha, y] - \kappa_L(e_\alpha, y)h_\alpha) = \kappa_L(x, [e_\alpha, y]) - \kappa_L(e_\alpha, y)\kappa_L(x, h_\alpha) = \kappa_L([x, e_\alpha], y) - \kappa_L(e_\alpha, y)\alpha(x) = \kappa_L(\underbrace{[x, e_\alpha] - \alpha(x)e_\alpha}_{=0}, y) = 0$. Da $\kappa_L|H \times H$ nicht ausgeartet ist, folgt die behauptete Gleichheit.

Da κ_L nicht ausgeartet ist, existiert nach Satz 6.3 ein Element aus $y \in L_{-\alpha}(H)$ mit $\kappa_L(e_\alpha, y) \neq 0$. Dann ist $f_{-\alpha} := \kappa_L(e_\alpha, y)^{-1}y \in L_{-\alpha}(H)$ mit $\kappa_L(e_\alpha, f_{-\alpha}) = 1$, d. h. $[e_\alpha, f_{-\alpha}] = h_\alpha$. ∎

Satz 6.13
Sei H eine Cartanalgebra einer halbeinfachen Lie-Algebra L und α eine entsprechende Wurzel. Dann gilt:

(i) $\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha) \neq 0$

(ii) $\dim L_\alpha(H) = 1$

(iii) $L_{i\alpha}(H) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Beweis:

(i) Zu jeder Wurzel β von L bezüglich H existiert nach Satz 4.15 ein $r_{\beta\alpha} \in \mathbb{Q}$ mit $\beta(x) = r_{\beta\alpha}\alpha(x)$ für alle $x \in [L_{-\alpha}(H), L_\alpha(H)]$. Nach Satz 6.12 ist $h_\alpha \in [L_{-\alpha}(H), L_\alpha(H)]$, d. h. $\beta(h_\alpha) = r_{\beta\alpha}\alpha(h_\alpha) = r_{\beta\alpha}\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)$. Im Fall $\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha) = 0$ wäre $\beta(h_\alpha) = 0$ für jede Wurzel β von L bezüglich H. Da H^* von diesen Wurzeln aufgespannt wird, wäre also $\lambda(h_\alpha) = 0$ für alle $\lambda \in H^*$, d. h. $h_\alpha = 0$ und $\alpha = 0$ im Widerspruch zur Definition von Wurzeln.

(ii) Wir beweisen hier gleich die Punkte (ii) und (iii).
Wähle e_α, $f_{-\alpha}$ wie in Satz 6.12. Setze $M := \mathbb{C}e_\alpha \oplus \mathbb{C}h_\alpha \oplus L_{-\alpha}(H) \oplus L_{-2\alpha}(H) \oplus \ldots$. Wegen $[h_\alpha, e_\alpha] = \alpha(h_\alpha)e_\alpha$ und $[e_\alpha, y] = \kappa_L(e_\alpha, y)h_\alpha$ für alle $y \in L_{-\alpha}(H)$ ist $\operatorname{ad}_{e_\alpha}(M) \subseteq M$ und $\operatorname{ad}_{h_\alpha}(M) \subseteq M$. Wegen $[e_\alpha, f_{-\alpha}] = h_\alpha$ ist auch $\operatorname{ad}_{f_{-\alpha}}(M) \subseteq M$. Daher ist

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Spur}((\operatorname{ad}_{e_\alpha} \circ \operatorname{ad}_{f_{-\alpha}} - \operatorname{ad}_{f_{-\alpha}} \circ \operatorname{ad}_{e_\alpha})|M) = \operatorname{Spur}([\operatorname{ad}_{e_\alpha}, \operatorname{ad}_{f_{-\alpha}}]|M) \\ &= \operatorname{Spur}(\operatorname{ad}_{[e_\alpha, f_{-\alpha}]}|M) = \operatorname{Spur}(\operatorname{ad}_{h_\alpha}|M) \end{aligned}$$

Andererseits existiert für $i \in \mathbb{N}$ eine Basis von $L_{-i\alpha}(H)$, bezüglich der die Matrizen von $\operatorname{ad}_{h_\alpha}$ obere Dreiecksgestalt mit Hauptdiagonale $-i\alpha(h_\alpha)$ hat. Daher ist

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Spur}((\operatorname{ad}_{h_\alpha} + i\alpha(h_\alpha)\operatorname{id}_L)|L_{-i\alpha}(H)) \\ &= \operatorname{Spur}(\operatorname{ad}_{h_\alpha}|L_{-i\alpha}(H)) + i\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)\dim L_{-i\alpha}(H) \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Spur}(\operatorname{ad}_{h_\alpha}|M) = \alpha(h_\alpha) + \sum_{i \in \mathbb{N}} -i\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)\dim L_{-i\alpha}(H) \\ &= \kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)(1 - \dim L_{-\alpha}(H) - 2\dim L_{-2\alpha}(H) - \cdots) \end{aligned}$$

Aus dem ersten Punkt folgt $\dim L_{-\alpha}(H) = 1$ und $L_{-i\alpha}(H) = 0$ für $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Da mit α auch $-\alpha$ Wurzel von L bezüglich H ist, folgt die Behauptung. ∎

Bemerkung

Mit e_α wie in Satz 6.12 ist also $L_\alpha(H) = \mathbb{C}e_\alpha$. Daher ist $[h, x] = \alpha(h)x$ für $h \in H$ und $x \in L_\alpha(H)$. Man kann also $e_{-\alpha} \in L_{-\alpha}(H)$ so wählen, dass gilt: $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$.

7 Halbeinfache Lie-Algebren

Satz 7.1
Sei H eine Cartanalgebra einer halbeinfachen Lie-Algebra L. Für entsprechende Wurzeln α, β gilt dann:

(i) Ist $\beta \notin \{\alpha, -\alpha\}$ und $\beta - s\alpha, \ldots, \beta, \ldots, \beta + t\alpha$ die α-Kette durch β, so ist

$$\frac{\kappa_L(h_\alpha, h_\beta)}{\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)} = \frac{1}{2}(s-t)$$

(ii) Für $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$ ist $\gamma\alpha$ keine Wurzel von L bezüglich H.

(iii) $\kappa_L(h_\alpha, h_\beta) \in \mathbb{Q}$.

Beweis:

(i) Wähle $e_\alpha \in L_\alpha(H), e_{-\alpha} \in L_{-\alpha}(H)$ mit $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$. Setze

$$M := L_{\beta - s\alpha}(H) \oplus \ldots \oplus L_\beta(H) \oplus \ldots \oplus L_{\beta + t\alpha}(H)$$

Dann ist $\mathrm{ad}_{h_\alpha}(M) \subseteq M, \mathrm{ad}_{e_\alpha}(M) \subseteq M, \mathrm{ad}_{e_{-\alpha}}(M) \subseteq M$. Daher ist

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Spur}((\mathrm{ad}_{e_\alpha} \circ \mathrm{ad}_{e_{-\alpha}} - \mathrm{ad}_{e_{-\alpha}} \circ \mathrm{ad}_{e_\alpha})|M) = \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}_{[e_\alpha, e_{-\alpha}]}|M) \\ &= \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}_{h_\alpha}|M) = \sum_{i=-s}^{t} (\beta + i\alpha)(h_\alpha) \\ &= (s+t+1)\kappa_L(h_\beta, h_\alpha) + \frac{t(t+1) - s(s+1)}{2}\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha) \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

(ii) Wir nehmen an, dass $\beta := \gamma\alpha$ für ein $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$ eine Wurzel von L bezüglich H ist. Nach Satz 6.13 ist $\gamma \notin \mathbb{Z}$ und nach dem ersten Punkt ist

$$\gamma = \frac{\kappa_L(h_\alpha, h_\beta)}{\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)} = \frac{s-t}{2}$$

Die α-Kette durch β hat die Form $\frac{-s-t}{2}\alpha, \ldots, \frac{s+t}{2}\alpha$, enthält also $\alpha/2$. Dann sind aber $\alpha/2$ und α Wurzeln von L bezüglich H im Widerspruch zu Satz 6.13.

(iii) Nach Bemerkung 6.10 ist

$$\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha) = \sum_{\lambda \in H^*} \lambda(h_\alpha)^2 \dim L_\lambda(H) = \sum_{\lambda \text{ Wurzel}} \kappa_L(h_\lambda, h_\alpha)^2,$$

also

$$\frac{1}{\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)} = \sum_{\lambda \text{ Wurzel}} \left(\frac{\kappa_L(h_\lambda, h_\alpha)}{\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)}\right)^2 \in \mathbb{Q}$$

nach (i) und damit $\kappa_L(h_\alpha, h_\beta) \in \mathbb{Q}$ wegen (i). ∎

Satz 7.2
Sei H eine Cartanalgebra einer halbeinfachen Lie-Algebra L und seien $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ entsprechende Wurzeln, die eine $\mathbb{C}$-Basis von H^* bilden. Dann gilt:

(i) $h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_l}$ bilden eine $\mathbb{C}$-Basis von H.

(ii) Auf $\mathbb{R}h_{\alpha_1} + \cdots + \mathbb{R}h_{\alpha_l}$ ist κ_L positiv definit.

(iii) Für jede Wurzel α von L bezüglich H ist h_α eine Linearkombination von $h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_l}$ in $\mathbb{Q}$.

Beweis:

(i) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_1 h_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_l h_{\alpha_l} = 0$. Für $h \in H$ gilt dann:

$$\begin{aligned} 0 &= \kappa_L(\lambda_1 h_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_l h_{\alpha_l}, h) = \lambda_1 \kappa_L(h_{\alpha_1}, h) + \cdots + \lambda_l \kappa_L(h_{\alpha_l}, h) \\ &= \lambda_1 \alpha_1(h) + \cdots + \lambda_l \alpha_l(h) \end{aligned}$$

Daher ist $\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_l\alpha_l = 0$, d. h. $\lambda_1 = \cdots = \lambda_l = 0$. Wegen $\dim H = \dim H^* = l$ bilden $h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_l}$ eine $\mathbb{C}$-Basis von H.

(ii) Für $\mu_1, \dots, \mu_l \in \mathbb{R}$ und $x := \mu_1 h_{\alpha_1} + \cdots + \mu_l h_{\alpha_l}$ gilt nach Bemerkung 6.10:

$$\begin{aligned} \kappa_L(x, x) &= \sum_{i,j=1}^{l} \mu_i \mu_j \kappa_L(h_{\alpha_i}, h_{\alpha_j}) = \sum_{i,j=1}^{l} \sum_{\alpha \text{ Wurzel}} \mu_i \mu_j \alpha(h_{\alpha_i}) \alpha(h_{\alpha_j}) \\ &= \sum_{\alpha \text{ Wurzel}} \left(\sum_{i=1}^{l} \mu_i \alpha(h_{\alpha_i})\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Im Fall $\kappa_L(x, x) = 0$ ist $0 = \sum_{i=1}^{l} \mu_i \alpha(h_{\alpha_i}) = \alpha(\sum_{i=1}^{l} \mu_i h_{\alpha_i}) = \alpha(x)$ für jede Wurzel α von L bezüglich H. Nach Satz 6.11 ist also $\alpha(x) = 0$ für $\alpha \in H^*$ und damit $x = 0$.

(iii) Zu jeder Wurzel α von L bezüglich H existieren nach (i) Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{C}$ mit $h_\alpha = \lambda_1 h_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_l h_{\alpha_l}$. Daher ist

$$\begin{gathered} \kappa_L(h_{\alpha_1}, h_\alpha) = \lambda_1 \kappa_L(h_{\alpha_1}, h_{\alpha_1}) + \cdots + \lambda_l \kappa_L(h_{\alpha_1}, h_{\alpha_l}) \\ \dots \\ \kappa_L(h_{\alpha_l}, h_\alpha) = \lambda_1 \kappa_L(h_{\alpha_l}, h_{\alpha_1}) + \cdots + \lambda_l \kappa_L(h_{\alpha_l}, h_{\alpha_l}) \end{gathered}$$

Folglich ist $(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ Lösung eines linearen Gleichungssystems mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$. Da $\kappa_L|H \times H$ nicht ausgeartet ist, ist die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems invertierbar. Folglich gilt: $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{Q}$. ∎

Bemerkung 7.3
Also ist $\mathbb{Q}h_{\alpha_1} + \dots + \mathbb{Q}h_{\alpha_l} = \sum_{\alpha \text{ Wurzel}} \mathbb{Q}h_\alpha =: H_\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}h_{\alpha_1} + \dots + \mathbb{R}h_{\alpha_l} = \sum_{\alpha \text{ Wurzel}} \mathbb{R}h_\alpha =: H_\mathbb{R}$ mit der entsprechenden Einschränkung von κ_L ein euklidischer Vektorraum.

Satz 7.4
Sei H eine Cartanalgebra einer halbeinfachen Lie-Algebra L und Φ die Menge der entsprechenden Wurzeln. Dann existiert eine Teilmenge $\Pi \subseteq \Phi$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Π ist eine $\mathbb{C}$-Basis von H^*.

(ii) Zu jedem $\beta \in \Phi$ existieren ein Vorzeichen $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ und Zahlen $n_\alpha \in \mathbb{N}_0$ mit $\beta = \varepsilon \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$.

Beweis:
Sei $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ eine $\mathbb{C}$-Basis von H^* mit $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \Phi$. Nach Satz 7.2 bilden $h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_l}$ eine $\mathbb{C}$-Basis von H und eine $\mathbb{R}$-Basis von $H_\mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $H_\mathbb{R}^+$ die Menge aller $\mathbb{R}$-Linearkombinationen $\lambda_1 h_{\alpha_1} + \dots + \lambda_l h_{\alpha_l}$ mit der Eigenschaft, dass ein $\in \{1, \dots, l\}$ existiert mit $\lambda_1 = \dots = \lambda_{j-1} = 0 < \lambda_j$. Dann ist $H_\mathbb{R} = H_\mathbb{R}^+ \dot\cup \{0\} \dot\cup (-H_\mathbb{R}^+)$. Für $x, y \in H_\mathbb{R}^+$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda > 0$ ist ferner $x + y, \lambda x \in H_\mathbb{R}^+$. Für beliebige $x, y \in H_\mathbb{R}$ definieren wir:

$$x < y :\Leftrightarrow y - x \in H_\mathbb{R}^+$$

Für $x, y \in H_\mathbb{R}$ ist dann entweder $x < y$ oder $x = y$ oder $y < x$, und die üblichen Eigenschaften einer Ordnung sind erfüllt. Setze:

$$\Pi := \{\alpha \in \Phi : h_\alpha \in H_\mathbb{R}^+ \text{ und für } \beta, \gamma \in \Phi \text{ mit } h_\beta, h_\gamma \in H_\mathbb{R}^+ \text{ ist } \alpha \neq \beta + \gamma\}$$

Wir nehmen zunächst an, dass ein $\alpha \in \Phi$ mit $h_\alpha \in H_\mathbb{R}^+$ existiert, das sich nicht als Summe von Elementen in Π schreiben lässt. Dabei wählen wir α so, dass h_α möglichst klein bezüglich $<$ ist. Dann ist $\alpha \notin \Pi$, d. h. es existieren $\beta, \gamma \in \Phi$ mit $h_\beta, h_\gamma \in H_\mathbb{R}^+$ und $\alpha = \beta + \gamma$. Wegen $h_\alpha - h_\beta = h_{\alpha-\beta} = h_\gamma \in H_\mathbb{R}^+$ ist $h_\beta < h_\alpha$ und analog ist $h_\gamma < h_\alpha$. Nach Wahl von α sind β und γ Summen von Elementen in Π, also auch α ↯

Ist $\alpha \in \Phi$ mit $h_\alpha \in -H_\mathbb{R}^+$, so ist $-\alpha \in \Phi$ mit $h_{-\alpha} = -h_\alpha \in H_\mathbb{R}^+$. Daher ist $-\alpha$ eine Summe von Elementen in Π. Dies zeigt, dass (ii) erfüllt ist.

Als nächstes nehmen wir an, dass $\alpha, \beta \in \Pi$ existieren mit $\beta - \alpha \in \Phi$. Dann ist auch $\alpha - \beta \in \Phi$, o. B. d. A. $h_{\alpha-\beta} \in H_\mathbb{R}^+$. Dann ist $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ mit $h_\beta, h_{\alpha-\beta} \in H_\mathbb{R}^+$ im Widerspruch zur Definition von Π.

Für $\alpha, \beta \in \Pi$ ist also $\beta - \alpha \notin \Phi$, d. h. die α-Kette durch β hat die Form $\beta, \beta + \alpha, \dots, \beta + t\alpha$. Nach Satz 7.1 gilt im Fall $\alpha \notin \{\beta, -\beta\}$:

$$\frac{\kappa_L(h_\alpha, h_\beta)}{\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)} = \frac{-t}{2} \leq 0$$

also auch $\kappa_L(h_\alpha, h_\beta) \le 0$.

Schließlich nehmen wir an, dass (i) nicht gilt. Dann ist $|\Pi| > \dim_{\mathbb{C}} H^* = \dim_{\mathbb{R}} H_{\mathbb{R}}$. Daher sind die Elemente h_α ($\alpha \in \Pi$) in $\mathbb{R}$ linear abhängig. Sei $\sum_{\alpha\in\Pi} \xi_\alpha h_\alpha = 0$ eine nichttriviale Relation mit $\xi_\alpha \in \mathbb{R}$ für $\alpha \in \Pi$. Dann ist

$$x := \sum_{\substack{\alpha\in\Pi\\ \xi_\alpha\ge 0}} \xi_\alpha h_\alpha = \sum_{\substack{\beta\in\Pi\\ \xi_\beta<0}} (-\xi_\beta) h_\beta \in H_{\mathbb{R}}^+$$

und

$$\kappa_L(x,x) = \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\Pi\\ \xi_\alpha\ge 0, \xi_\beta<0}} \xi_\alpha(-\xi_\beta)\kappa_L(h_\alpha, h_\beta) \le 0$$

im Widerspruch zu Satz 7.2 ∎

Definition 7.5
Das oben definierte Π heißt **Basis** (**Fundamentalsystem**) von Φ. Die Elemente in Π heißen **einfache** (**fundamentale**) Wurzeln. Die Elemente $\beta \in \Phi$ mit $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$) heißen **positive** (**negative**) Wurzeln bezüglich Π.

Satz 7.6
Sei H eine Cartanalgebra einer halbeinfachen Lie-Algebra L, Φ die Menge der entsprechenden Wurzeln und Π eine Basis von Φ. Für verschiedene $\alpha, \beta \in \Pi$ ist dann $\kappa_L(h_\alpha, h_\beta) \le 0$.

Beweis:
Die α-Kette durch β sei $\beta - s\alpha, \ldots, \beta, \ldots, \beta + t\alpha$. Im Fall $\kappa_L(h_\alpha, h_\beta) > 0$ wäre $(s-t)/2 > 0$ nach Satz 7.1, also $\beta - \alpha \in \Phi$ im Widerspruch zu Satz 7.4. ∎

Satz 7.7
Sei H eine Cartanalgebra einer halbeinfachen Lie-Algebra L, Φ die entsprechende Menge von Wurzeln und Π eine Basis von Φ. Für $\alpha \in \Phi$ definieren wir eine Abbildung

$$\sigma_\alpha\colon H_{\mathbb{R}} \to H_{\mathbb{R}}, x \mapsto x - \frac{2\kappa_L(h_\alpha, x)}{\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)} h_\alpha$$

Dann gilt:

(i) Für $\alpha \in \Phi$ ist σ_α linear mit $\sigma_\alpha(h_\alpha) = -h_\alpha$ und $\sigma_\alpha(x) = x$ für alle $x \in H_{\mathbb{R}}$ mit $\kappa_L(h_\alpha, x) = 0$.

(ii) Für $\alpha \in \Phi$ ist $\sigma_\alpha^2 = \mathrm{id}_{H_{\mathbb{R}}}$. Insbesondere ist σ_α bijektiv mit $\sigma_\alpha^{-1} = \sigma_\alpha$.

(iii) Für $\alpha \in \Phi$ und $x, y \in H_{\mathbb{R}}$ ist $\kappa_L(\sigma_\alpha(x), \sigma_\alpha(y)) = \kappa_L(x,y)$, d. h. σ_α ist eine Isometrie auf $H_{\mathbb{R}}$.

(iv) $W := \{\sigma_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \sigma_{\alpha_r} : r \in \mathbb{N}_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Phi\}$ ist eine Gruppe bezüglich $\circ$.

(v) Für $\sigma \in W$ und $\beta \in \Phi$ existiert ein $\gamma \in \Phi$ mit $\sigma(h_\beta) = h_\gamma$.

(vi) $|W| < \infty$

(vii) Für $\beta \in \Phi$ existieren $\alpha \in \Pi$ und $\sigma \in W$ mit $\sigma(h_\alpha) = h_\beta$.

(viii) $W = \{\sigma_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \sigma_{\alpha_r} : r \in \mathbb{N}_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Pi\}$

BEWEIS:

(i) ist offensichtlich.

(ii) Da $H_\mathbb{R}$ mit der Einschränkung von κ_L ein euklidischer Raum ist, gilt $H_\mathbb{R} := \mathbb{R}h_\alpha \oplus (\mathbb{R}h_\alpha)^\perp$. Wegen $\sigma_\alpha^2(h_\alpha) = h_\alpha$ und $\sigma_\alpha^2(x) = x$ für alle $x \in (\mathbb{R}h_\alpha)^\perp$ folgt die Behauptung.

(iii) Für $\alpha \in \Phi$ und $x, y \in (\mathbb{R}h_\alpha)^\perp$ gilt:

$$\kappa_L(\sigma_\alpha(h_\alpha), \sigma_\alpha(h_\alpha)) = \kappa_L(-h_\alpha, -h_\alpha) = \kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)$$
$$\kappa_L(\sigma_\alpha(x), \sigma_\alpha(y)) = \kappa_L(x, y)$$
$$\kappa_L(\sigma_\alpha(h_\alpha), \sigma_\alpha(x)) = \kappa_L(-h_\alpha, x) = -\kappa_L(h_\alpha, x) = 0 = \kappa_L(h_\alpha, x)$$

Wegen $H_\mathbb{R} = \mathbb{R}h_\alpha \oplus (\mathbb{R}h_\alpha)^\perp$ folgt die Behauptung.

(iv) Offenbar ist $\mathrm{id}_{H_\mathbb{R}} \in W$ und W ist abgeschlossen bezüglich der Verknüpfung $\circ$. Ferner gilt für $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Phi$:

$$(\sigma_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \sigma_{\alpha_r})^{-1} = \sigma_{\alpha_r}^{-1} \circ \ldots \circ \sigma_{\alpha_1}^{-1} = \sigma_{\alpha_r} \circ \ldots \circ \sigma_{\alpha_1} \in W$$

(v) Seien $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha \notin \{\beta, -\beta\}$ und sei $\beta - s\alpha, \ldots, \beta, \ldots, \beta + t\alpha$ die α-Kette durch β. Nach Satz 7.1 ist dann $\sigma_\alpha(h_\alpha) = h_\beta - (s-t)h_\alpha = h_{\beta-(s-t)\alpha}$ mit $\beta - (s-t)\alpha \in \Phi$.

(vi) Sei $X := \{h_\gamma : \gamma \in \Phi\}$. Nach dem fünften Punkt ist dann $\sigma(X) \subseteq X$ für $\sigma \in W$. Wir bezeichnen die Gruppe aller Bijektionen $X \to X$ mit $\mathrm{Sym}\,(X)$. Dann ist die Abbildung:

$$\omega : W \to \mathrm{Sym}\,(X), \sigma \mapsto \sigma|X$$

ein Gruppenhomomorphismus. Ist $\sigma \in W$ mit $\sigma|X = \mathrm{id}_X$, so ist $\sigma(h_\gamma) = h_\gamma$ für alle $\gamma \in \Phi$, also $\sigma = \mathrm{id}_{H_\mathbb{R}}$. Daher ist $\ker(\omega) = 1$, d. h. ω ist injektiv. Folglich ist:

$$|W| = |\omega(W)| \leq |\mathrm{Sym}\,(X)| = |X|! = |\Phi|! < \infty$$

(vii) Offenbar ist $U := \{\sigma_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \sigma_{\alpha_r} : r \in \mathbb{N}_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Pi\} \leq W$ eine Untergruppe. Wir zeigen zunächst, dass zu jeder bezüglich Π positiven Wurzel $\beta \in \Phi$ Elemente $\alpha \in \Pi$ und $\sigma \in U$ existieren mit $h_\beta = \sigma(h_\alpha)$. Ist dies nicht der Fall, so wählen wir ein Gegenbeispiel $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$ so, dass $\sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha$ möglichst klein ist. Wegen $0 < \kappa_L(h_\beta, h_\beta) = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \kappa_L(h_\alpha, h_\beta)$ existiert ein $\alpha \in \Pi$ mit $\kappa_L(h_\alpha, h_\beta) > 0$. Nach (v) existiert ein $\gamma \in \Phi$ mit

$$h_\gamma = \sigma_\alpha(h_\beta) = h_\beta - \frac{2\kappa_L(h_\alpha, h_\beta)}{\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)} h_\alpha$$

d. h. $\gamma = \beta - \lambda\alpha$ mit $\lambda := \frac{2\kappa_L(h_\alpha,h_\beta)}{\kappa_L(h_\alpha,h_\alpha)} > 0$. Ist γ positiv bezüglich Π, so ist γ nach Wahl von β kein Gegenbeispiel, also $h_\gamma = \sigma(h_\delta)$ für ein $\delta \in \Pi$ und ein $\sigma \in U$. Dann ist aber auch $h_\beta = \sigma_\alpha(h_\gamma) = (\sigma_\alpha \circ \sigma)(h_\gamma)$ kein Gegenbeispiel.

Daher ist γ negativ bezüglich Π. Nach Satz 7.4 ist also $\beta = n_\alpha\alpha$. Wegen $n\alpha \notin \Phi$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ folgt $\beta = \alpha$ und die Behauptung ist erfüllt mit $\sigma := \mathrm{id}_{H_\mathbb{R}} \in U$.

Ist $\beta \in \Phi$ negativ bezüglich Π, so ist $-\beta \in \Phi$ positiv bezüglich Π. Daher existieren $\alpha \in \Pi$ und $\sigma \in U$ mit $h_{-\beta} = \sigma(h_\alpha)$. Dann ist aber $h_\beta = -h_{-\beta} = \sigma(-h_\alpha) = (\sigma \circ \sigma_\alpha)(h_\alpha)$ mit $\sigma \circ \sigma_\alpha \in U$.

Wir haben also gezeigt, dass zu jedem $\beta \in \Phi$ Elemente $\alpha \in \Pi$ und $\sigma \in U$ existieren mit $h_\beta = \sigma(h_\alpha)$.

(viii) Es genügt zu zeigen: $\sigma_\beta \in U$ für $\beta \in \Phi$. Nach dem Beweis des obigen Punktes existieren ein $\alpha \in \Pi$ und ein $\sigma \in U$ mit $h_\beta = \sigma(h_\alpha)$. Dann ist $(\sigma \circ \sigma_\alpha \circ \sigma^{-1})(h_\beta) = \sigma(\sigma_\alpha(h_\alpha)) = \sigma(-h_\alpha) = -h_\beta$ und

$$\begin{aligned}(\sigma \circ \sigma_\alpha \circ \sigma^{-1})(x) &= \sigma\left(\sigma^{-1}(x) - \frac{2\kappa_L(h_\alpha, \sigma^{-1}(x))}{\kappa_L(h_\alpha,h_\alpha)}h_\alpha\right) = x - \frac{2\kappa_L(\sigma(h_\alpha), x)}{\kappa_L(h_\alpha,h_\alpha)}\sigma(h_\alpha)\\ &= x - \frac{2\kappa_L(h_\beta, x)}{\kappa_L(h_\alpha,h_\alpha)}\sigma(h_\alpha) = x\end{aligned}$$

für $x \in (\mathbb{R}h_\beta)^\perp$: Daher ist $\sigma_\beta = \sigma \circ \sigma_\alpha \circ \sigma^{-1} \in U$. ∎

Definition 7.8
Für $\alpha \in \Phi$ heißt σ_α **Spiegelung** an der zu h_α orthogonalen Hyperebene. Für $\alpha \in \Pi$ heißt σ_α **einfache** (**fundamentale**) Spiegelung bezüglich Π. Ferner heißt W **Weylgruppe** von L bezüglich H.

Satz 7.9
Bezeichnungen wie oben. Für $\alpha,\beta \in \Phi$ sei $A_{\alpha\beta} := \frac{2\kappa_L(h_\alpha,h_\beta)}{\kappa_L(h_\alpha,h_\beta)}$. Dann ist $A_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha} \in \{0,1,2,3,4\}$ und es gilt:

(i) Im Fall $A_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha} = 0$ ist $A_{\alpha\beta} = 0 = A_{\beta\alpha}$.

(ii) Im Fall $A_{\alpha\beta} = 1$ ist $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha} \in \{\pm 1\}$ und $\kappa_L(h_\alpha,h_\alpha) = \kappa_L(h_\beta,h_\beta)$.

(iii) Im Fall $A_{\alpha\beta} = 2$ ist $(A_{\alpha\beta}, A_{\beta\alpha}) \in \{\pm(1,2), \pm(2,1)\}$ und $\kappa_L(h_\alpha,h_\alpha)/_{\kappa_L(h_\beta,h_\beta)} \in \{1/2, 2\}$.

(iv) Im Fall $A_{\alpha\beta} = 3$ ist $(A_{\alpha\beta}, A_{\beta\alpha}) \in \{\pm(1,3), \pm(3,1)\}\}$ und $\kappa_L(h_\alpha,h_\alpha)/_{\kappa_L(h_\beta,h_\beta)} \in \{1/3, 3\})$.

(v) Im Fall $A_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha} = 4$ ist $\alpha = \beta$ (und $A_{\alpha\beta} = 2$) oder $\alpha = -\beta$ (und $A_{\alpha\beta} = -2$).

Beweis:
Nach Satz 7.1 ist $A_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$ und nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt:

$$A_{\alpha\beta} = \frac{4\kappa_L(h_\alpha,h_\beta)^2}{\kappa_L(h_\alpha,h_\alpha)\kappa_L(h_\beta,h_\beta)} \leq 4$$

Die einzelnen Aussagen folgen hieraus unmittelbar wegen $\frac{\kappa_L(h_\alpha,h_\alpha)}{\kappa_L(h_\beta,h_\beta)} = A_{\beta\alpha}/A_{\alpha\beta}$ im Fall $A_{\alpha\beta} \neq 0$. Im Fall $A_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha} = 4$ steht in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ein Gleichheitszeichen, d. h. die Vektoren h_α, h_β (also auch α,β) sind linear abhängig. Nach Satz 7.1 ist daher $\beta \in \{\alpha, -\alpha\}$ und die Behauptung folgt. ∎

Definition 7.10
Ist Π wie im Satz 7.4, so definiert man den **Coxetergraph** Γ von L bezüglich Π wie in Abbildung 7.1. Die Ecken von Γ sind die Elemente von Π und je zwei verschiedene

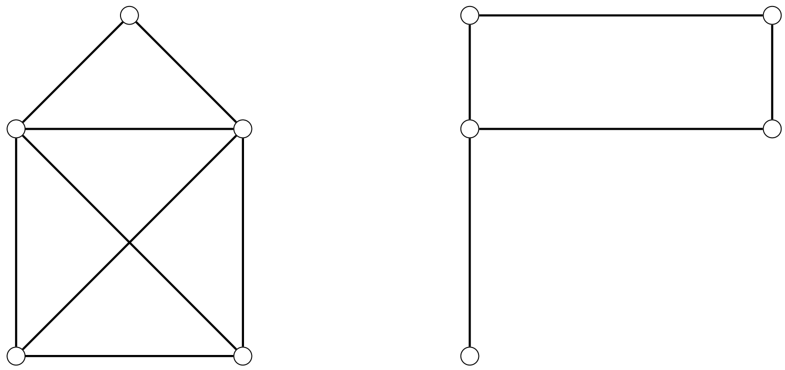


Abbildung 7.1: Zwei denkbare Coxetergraphen

Ecken von Γ sind durch $A_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha}$ Kanten verbunden.

Beispiel
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $S := \mathrm{Rad}(\mathrm{gl}_n)$. Dann sind einerseits $\mathfrak{b}_n + S/S \cong \mathfrak{b}_n/\mathfrak{b}_n \cap S$ und $\mathfrak{b}_n + S$ auflösbare Lie-Algebren. Nach Satz 5.5 existiert andererseits zu jedem $\mathbb{C}$-Vektorraum V der Dimension $n < \infty$ und jeder auflösbaren Unteralgebra $U \subseteq \mathrm{gl}(V)$ eine Basis von V, bezüglich der U durch obere Dreiecksmatrizen dargestellt wird. Daher ist $\dim U \leq \frac{n(n+1)}{2} = \dim \mathfrak{b}_n$. Insbesondere ist $S \subseteq \mathfrak{b}_n$. Analog $S \subseteq \mathfrak{b}_n^T$. Also $S \subseteq \mathfrak{b}_n \cap \mathfrak{b}_n^T = \mathfrak{h}_n$. Sei $0 \neq s \in S$. Schreibe $s = \sum_{i=1}^n \xi_i e_{ii}$ mit $\xi_i \in \mathbb{C}$. Für $i, j = 1, \ldots, n$ ist dann $S \ni [s, e_{ij}] = (\xi_i - \xi_j)e_{ij}$, d. h. $\xi_i = \xi_j$. Dies zeigt: $S \subseteq \mathbb{C}1_n$. Folglich ist $\mathrm{Rad}(\mathrm{gl}_n) = \mathbb{C}1_n$ und $\mathrm{Rad}(\mathrm{sl}_n) = 0$. Insbesondere ist sl_n eine halbeinfache Lie-Algebra.

Nach Beispiel 1 ist $\mathfrak{h}_n$ eine Cartanalgebra von gl_n. Wegen $\mathrm{gl}_n = \mathrm{sl}_n \oplus \mathbb{C}1_n$ ist daher $\mathfrak{h}_n \cap \mathrm{sl}_n$ eine Cartanalgebra von sl_n. Die entsprechenden Wurzeln sind die Abbildungen

$$\alpha_{jk} \colon \mathfrak{h}_n \cap \mathrm{sl}_n \to \mathbb{C}, \sum_{i=1}^n \xi_i e_{ii} \mapsto \xi_j - \xi_k \qquad j \neq k$$

Dabei ist jeweils $\mathbb{C}e_{jk}$ der Wurzelraum bezüglich α_{jk}. Man sieht leicht, dass

$$\Pi := \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \ldots, \alpha_{n-1,n}\}$$

eine Basis von Φ ist. Für $\alpha, \beta \in \Pi$ ist $\beta - \alpha \notin \Phi$. Daher hat die α-Kette durch β die Form $\beta, \ldots, \beta + t\alpha$. Die α_{23}-Kette durch α_{12} hat die Form α_{12}, α_{13} und für $i > 2$ hat die $\alpha_{i,i+1}$-Kette durch α_{12} die Form α_{12}. Daher $A_{\alpha_{23}\alpha_{12}} = -1$ und $A_{\alpha_{i,i+1}\alpha_{12}} = 0$. Analog hat die α_{12}-Kette durch α_{23} die Form α_{23}, α_{13} und man erhält $A_{\alpha_{12}\alpha_{23}} = -1$. Aus dem Satz 7.9 folgt $A_{\alpha_{12}\alpha_{i,i+1}} = 0$ für $i > 2$. Die übrigen Wurzeln kann man analog behandeln. Der Coxetergraph von sl_n bezüglich Π hat die Form in Abbildung 7.2 und wird in der Graphentheorie auch als offenes Polygon bezeichnet.

Abbildung 7.2: Coxetergraph von sl_n bezüglich Π

Definition 7.11
Man sagt, dass Ecken α, β in einem Graphen Γ in der gleichen **Zusammenhangskomponente** liegen, falls es Ecken $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_k = \beta$ von Γ gibt, so dass α_i und α_{i+1} jeweils durch eine Kante verbunden sind.

Bemerkung
Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Ecken von Γ. Hat Γ nur eine einzige Zusammenhangskomponente, dann heißt der Graph Γ **zusammenhängend**.

Beispiel
Der Coxetergraph im obigen Beispiel ist zusammenhängend.

Definition 7.12
Eine Lie-Algebra L mit der Eigenschaft $\dim L > 1$ heißt **einfach** oder **einfache Lie-Algebra**, falls 0 und L die einzigen Ideale von L sind.

Bemerkung
Jede einfache Lie-Algebra L ist auch halbeinfach. Denn sonst wäre $0 \neq \mathrm{Rad}(L) \subseteq L$ ein Ideal. Also $\mathrm{Rad}\, L = L$, d. h. L wäre auflösbar. Dann wäre aber $L' \subsetneq L$ ein Ideal, also $L' = 0$, d. h. die Lie-Algebra ist kommutativ. Für $0 \neq x \in L$ wäre $0 \neq \mathbb{C}x \subseteq L$ ein Ideal, d. h. $L = \mathbb{C}x$ wäre eindimensional. Dies ist ein Widerspruch zur Definition.

Satz 7.13
Sei L eine halbeinfache Lie-Algebra, H, Φ, Π, Γ wie oben. Ist Γ zusammenhängend, so ist die Lie-Algebra L einfach.

Beweis:
Wir betrachten die Cartanzerlegung $L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathbb{C}e_\alpha$. Sei $0 \neq I \subseteq L$ ein Ideal und $0 \neq x \in I$. Wir schreiben $x = h + \sum_{\alpha \in \Phi} \lambda_\alpha e_\alpha$ mit $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}, h \in H$. Dabei wähle x so, dass $\lambda_\alpha \neq 0$ für möglichst wenige $\alpha \in \Phi$.

Annahme: $\lambda_\alpha \neq 0$ für ein $\beta \in \Phi$. Dann gilt: $I \ni [h_\beta, x] = \sum_{\alpha \in \Phi} \lambda_\alpha \alpha(h_\beta) e_\alpha$ und $I \ni [[h_\beta, x], e_{-\beta}] = \underbrace{\lambda_\beta \kappa_L(h_\beta, h_\beta)}_{\neq 0} h_\beta + \sum_{\beta \neq \alpha \in \Phi, \alpha - \beta \in \Phi} \lambda_\alpha \alpha(h_\beta) \nu_{\alpha\beta} e_{\alpha-\beta} \neq 0$. Dies widerspricht der Wahl von x.

Also ist $x = h \in H$. Wegen $H^* = \operatorname{span}(\Pi)$ existiert ein $\alpha \in \Pi$ mit $\alpha(x) \neq 0$. Wegen $[x, e_\alpha] = \alpha(x)e_\alpha$ ist auch $e_\alpha \in I$. Daher ist auch $h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}] \in I$. Ist α mit einem $\beta \in \Pi$ durch eine Kante verbunden, so ist $A_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha} \neq 0$. Nach Definition heißt das $0 \neq \kappa_L(h_\alpha, h_\beta) = \beta(h_\alpha)$. Wegen $[h_\alpha, e_\beta] = \beta(h_\alpha)e_\beta$ ist also $e_\beta \in I$. Daher ist auch $h_\beta = [e_\beta, e_{-\beta}] \in I$. Da Γ zusammenhängend ist, folgt, $h_\gamma \in I$ für alle $\gamma \in \Pi$. Also ist auch $H \subseteq I$. Für $\lambda \in \Phi$ und $h \in H$ ist $[h, e_\lambda] = \lambda(h)e_\lambda$, also auch $e_\lambda \in I$. Folglich ist $I = L$. ∎

Beispiel
Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist sl_n eine einfache Lie-Algebra.

Satz 7.14
Sei L eine halbeinfache Lie-Algebra, H, Φ, Π, Γ wie üblich, die Cartanzerlegung sei $L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathbb{C}e_\alpha$. Die Zusammenhangskomponenten von Γ seien $\Pi_1, \ldots, \Pi_r$. Für $i = 1, \ldots, r$ sei

$$H_i := \sum_{\alpha \in \Pi_i} \mathbb{C}h_\alpha, \Phi_i := \{\alpha \in \Phi \colon h_\alpha \in H_i\}, L_i := H_i \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_i} \mathbb{C}e_\alpha$$

Dann ist $L_i \subseteq L$ ein einfaches Ideal mit Cartanalgebra H_i. Ferner ist $\Phi_i' := \{\alpha|H_i \colon \alpha \in \Phi_i\}$ die Menge aller entsprechenden Wurzeln, $\Pi_i' := \{\alpha|H_i \colon \alpha \in \Pi_i\}$ ist eine Basis von Φ_i und die Abbildung $\Pi_i \to \Pi_i', \alpha \mapsto \alpha|H_i$ liefert einen Isomorphismus zwischen dem vollen Teilgraphen von Γ mit Eckenmenge Π_i und dem Coxetergraphen von L_i bezüglich Π_i'. Ferner ist $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_r$ mit $[L_i, L_j] = 0$ für alle $i \neq j$.

Beweis:
Wegen $\Pi = \Pi_1 \mathbin{\dot\cup} \cdots \mathbin{\dot\cup} \Pi_r$ ist $H = H_1 \oplus \ldots \oplus H_r$. Dabei ist $\kappa_L(H_i, H_j) = 0$ für alle $i \neq j$. Für $i = 1, \ldots, r$ und $\alpha \in \Pi_i$ ist $\sigma_\alpha(H_i) \subseteq H_i$ und $\sigma_\alpha(x) = x$ für alle $x \in H_j$ mit $j \neq i$. Sei $\beta \in \Phi$ und $h_\beta = \sigma(h_\alpha)$ mit $\alpha \in \Pi$ und einem σ in der Weylgruppe W von L bezüglich H. Ist $\alpha \in \Pi_i$, so ist $h_\beta \in H_i$, d. h. $\beta \in \Phi_i$. Dies zeigt: $\Phi = \Phi_1 \mathbin{\dot\cup} \cdots \mathbin{\dot\cup} \Phi_r$. Folglich ist $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_r$.

Sei $i \in \{1, \ldots, r\}$. Für $\alpha, \beta \in \Pi_i$ ist dann $[h_\alpha, h_\beta] = 0 \in L_i$. Für $\alpha \in \Pi_i, \beta \in \Phi_i$ ist $[h_\alpha, e_\beta] = \beta(h_\alpha)e_\beta \in L_i$. Für $\alpha, \beta \in \Phi_i$ mit $\alpha + \beta \notin \Phi$ ist $[e_\alpha, e_\beta] = 0 \in L_i$ und für $\alpha, \beta \in \Phi_i$ mit $\alpha + \beta \in \Phi$ ist $\alpha + \beta \in \Phi_i$. Denn $h_{\alpha+\beta} = h_\alpha + h_\beta \in H_i$. Also ist insgesamt $[e_\alpha, e_\beta] \in \mathbb{C}e_{\alpha+\beta} \subseteq L_i$. Dies zeigt $L_i \subseteq L$ Unteralgebra.

Seien $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ mit $i \neq j$. Für $\alpha \in \Pi_i, \beta \in \Pi_j$ ist $[h_\alpha, h_\beta] = 0$. Für $\alpha \in \Pi_i, \beta \in \Phi_j$ ist $[h_\alpha, e_\beta] = \beta(h_\alpha)e_\beta = \kappa_L(h_\beta, h_\alpha)e_\beta = 0$. Für $\alpha \in \Phi_i, \beta \in \Phi_j$ ist $\alpha + \beta \notin \Phi$, also $[e_\alpha, e_\beta] = 0$. Daher ist also $[L_i, L_j] = 0$ für alle $i \neq j$. Insbesondere folgt daraus, dass die Unteralgebren $L_1, \ldots, L_r$ Ideale in L sind.

Für $i = 1, \ldots, r$ ist $\operatorname{Rad} L_i \subseteq L$ ein auflösbares Ideal wegen $[\operatorname{Rad} L_i, L_j] \subseteq [L_i, L_j] = 0$ für alle $j \neq i$. Daher ist $\operatorname{Rad} L_i \subseteq \operatorname{Rad} L = 0$, d. h. L_i ist halbeinfach.

Ferner ist $H_i \subseteq L_i$ eine abelsche Unteralgebra mit $N_{L_i}(H_i) \subseteq N_L(H) \cap L_i = H \cap L_i = H_i$, d. h. H_i ist eine Cartanalgebra von L_i. Daher ist $L_i = H_i \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_i} \mathbb{C}e_\alpha$ die entsprechende Cartanzerlegung und Φ_i' ist die zugehörige Menge von Wurzeln. Wegen $H_i = \bigoplus_{\alpha \in \Pi_i} \mathbb{C}h_\alpha$ ist Π_i' eine Basis von H_i^*. Ist $\beta \in \Phi_i$, so ist einerseits $\beta = \varepsilon \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$ mit $\varepsilon = \pm 1, n_\alpha \in \mathbb{N}_0 (\alpha \in \Pi)$. Andererseits ist h_β eine Linearkombination der $h_\alpha (\alpha \in \Pi_i)$, d. h. β ist eine Linearkombination von Π_i. Dies zeigt, dass Π_i' eine Basis von Φ_i' ist.

Bekanntlich ist $\kappa_{L_i} = \kappa_L | L_i \times L_i$. Daraus folgt leicht, dass der Coxetergraph von L_i bezüglich der Basis Π_i' zum vollen Teilgraphen von Γ mit Eckenmenge Π_i isomorph ist.

Nach Satz 7.13 ist L_i eine einfache Lie-Algebra. ∎

Bemerkung 7.15
Der obige Satz reduziert die Untersuchung halbeinfacher Lie-Algebren auf die Untersuchung einfacher Lie-Algebren.

Definition 7.16
Sei Γ ein Graph mit den Ecken $1, \ldots, l$ und jeweils n_{ij} Kanten zwischen Ecken i und j mit $i \neq j$. Setzt man $\omega_{ii} := 2$ für $i = 1, \ldots, l$ und $\omega_{ij} := -\sqrt{n_{ij}}$ für $i \neq j$, so nennt man die symmetrische Bilinearform

$$\omega \colon \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}, ((\xi_1, \ldots, \xi_l), (\eta_1, \ldots, \eta_l)) \mapsto \sum_{i,j=1}^{l} \omega_{ij} \xi_i \eta_j$$

die **Coxeterform** von Γ.

Satz
Sei L eine halbeinfache Lie-Algebra, H, Φ, Π, Γ wie oben. Dann ist die Coxeterform ω_Γ positiv definit.[1]

BEWEIS:
Für $\alpha, \beta \in \Pi$ mit $\alpha \neq \beta$ existieren in Γ genau $A_{\alpha\beta} A_{\beta\alpha} = \frac{4\kappa_L(h_\alpha, h_\beta)^2}{\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)\kappa_L(h_\beta, h_\beta)}$ Kanten zwischen α und β. Wegen $\kappa_L(h_\alpha, h_\beta) \leq 0$ ist also $\omega_{\alpha\beta} = \frac{2\kappa_L(h_\alpha, h_\beta)}{\sqrt{\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)}\sqrt{\kappa_L(h_\beta, h_\beta)}}$. Ferner ist $\omega_{\alpha\alpha} = 2 = \frac{2\kappa_L(h_\alpha, h_\beta)}{\sqrt{\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)}\sqrt{\kappa_L(h_\beta, h_\beta)}}$. Für Elemente $\xi_\alpha \in \mathbb{R}(\alpha \in \Pi)$ ist daher

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,\beta \in \Pi} \omega_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta &= \sum_{\alpha,\beta \in \Pi} \frac{2\kappa_L(h_\alpha, h_\beta)}{\sqrt{\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)}\sqrt{\kappa_L(h_\beta, h_\beta)}} \xi_\alpha \xi_\beta \\
&= 2\kappa_L \left(\sum_{\alpha \in \Pi} \frac{\xi_\alpha}{\sqrt{\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)}}, \sum_{\beta \in \Pi} \frac{\xi_\beta}{\sqrt{\kappa_L(h_\beta, h_\beta)}} \right) \geq 0
\end{aligned}$$

Mit $\kappa_L | H_\mathbb{R} \times H_\mathbb{R}$ ist auch ω_Γ positiv definit. ∎

[1] Der Satz ist das *wesentliche* Hilfsmittel, um die Form der Graphen im folgenden nachzuweisen.

8 Einfache Lie-Algebren

Satz 8.1
Sei Γ ein Graph mit positiv definiter Coxeterform ω_Γ und Γ' ein Teilgraph von Γ, d. h. jede Ecke von Γ' ist auch eine von Γ und für Ecken i, j von Γ' existieren in Γ' nicht mehr Kanten zwischen i, j als in Γ. Dann ist auch $\omega_{\Gamma'}$ positiv definit.

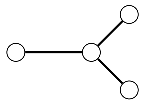
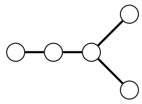
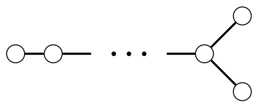
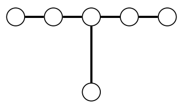
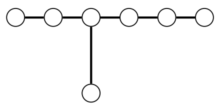
BEWEIS:
Es habe Γ' o. B. d. A. die Ecken $1, \dots, l'$ und Γ die Ecken $1, \dots, l', \dots, l$ und die Matrizen von ω_Γ bzw. $\omega_{\Gamma'}$ seien (ω_{ij}) bzw. (ω'_{ij}). Es ist $\omega'_{ij} \geq \omega_{ij}$ für alle $i, j = 1, \dots, l'$. Ist $\omega_{\Gamma'}$ nicht positiv definit, dann ist $\omega_{\Gamma'}(x,x) \leq 0$ für ein Element $x \in \mathbb{R}^{l'} \setminus \{0\}$. Schreibe $x = (\xi_1, \dots, \xi_{l'})$. Für $y := (|\xi_1|, \dots, |\xi_{l'}|, 0 \dots, 0) \in \mathbb{R}^l \setminus \{0\}$ gilt dann:

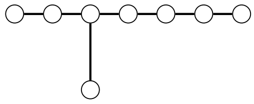
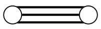
$$\begin{aligned}\omega_\Gamma(y,y) &= \sum_{i,j=1}^{l'} \omega_{ij}|\xi_i||\xi_j| \leq \sum_{i,j=1}^{l'} \omega'_{ij}|\xi_i||\xi_j| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{l'} \omega'_{ij}\xi_i\xi_j = \omega_{\Gamma'}(x,x) \leq 0\end{aligned}$$

Daher ist auch $\omega_{\Gamma'}$ nicht positiv definit. ∎

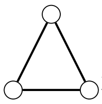
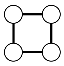
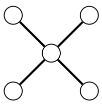
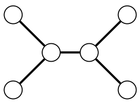
Beispiel
„Gute“ Beispiele

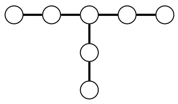
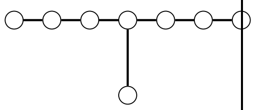
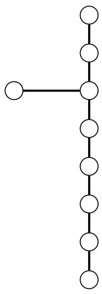
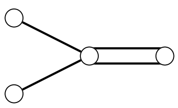
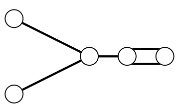
NAME	COXETERGRAPH	MATRIX	DETERMINANTE
A_1	o	(2)	2
A_2	o-o	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	3
A_l für $(l > 2)$	o-o-. . .-o-o	$\begin{pmatrix} A_{l-1} & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{l-2} & * & 0 \\ * & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det A_{l-1} - \det A_{l-2}$, Induktion: $\det A_l = l + 1$
B_2	o=o	$\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$	4-2=2
B_3	o-o=o	$\begin{pmatrix} B_2 & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & * & 0 \\ * & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det B_2 - \det A_1 = 4 - 2 = 2$

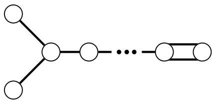
B_l für $l > 3$	o-...-o=o	$\begin{pmatrix} B_{l-1} & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{l-2} & * & 0 \\ * & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det B_{l-1} - \det B_{l-2} = 2$ (induktiv)
D_4		$\begin{pmatrix} A_3 & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & * & 0 \\ 0 & A_1 & * & 0 \\ * & * & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det A_3 - (\det A_1)^2 = 4$
D_5		$\begin{pmatrix} D_4 & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3 & * & 0 \\ * & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det D_4 - \det A_3 = 4$
D_l für $l > 5$		$\begin{pmatrix} D_{l-1} & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{l-2} & * & 0 \\ * & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det D_{l-1} - \det D_{l-2} = 4$
E_6		$\begin{pmatrix} D_5 & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_4 & * & 0 \\ * & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det D_5 - \det A_4 = 3$
E_7		$\begin{pmatrix} D_6 & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_5 & * & 0 \\ * & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det D_6 - \det A_5 = 2$

E_8		$\begin{pmatrix} D_7 & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_6 & * & 0 \\ * & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det D_7 - \det A_6 = 1$
F_4	o-o=o-o	$\begin{pmatrix} B_3 & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & * & 0 \\ * & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det B_3 - \det A_2 = 1$
G_2		$\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$	4-3=1

„Schlechte" Beispiele

Name	Coxetergraph	Matrix	Determinante
P_l für $l > 2$	 für $n = 3$  für $n = 4$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	Zeilen sind linear abhängig, da die Summe 0 ist $\Rightarrow$ Determinante 0
Q_5		$\begin{pmatrix} D_4 & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & * & 0 \\ * & * & * & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det D_4 - (\det A_1)^3 = 8 - 8 = 0$
Q_6		$\begin{pmatrix} D_5 & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & * & 0 \\ 0 & A_1 & * & 0 \\ * & * & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det D_5 - (\det A_3)(\det A_1) = 8 - 8 = 0$
Q_l für $l > 6$		$\begin{pmatrix} D_{l-1} & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{l-3} & 0 & * & 0 \\ 0 & A_1 & * & 0 \\ * & * & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det D_{l-1} - (\det D_{l-3})(\det A_1) = 0$

R_7		$\begin{pmatrix} E_6 & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_5 & * & 0 \\ * & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det E_6 - \det A_5 = 0$
R_8		$\begin{pmatrix} E_7 & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_6 & * & 0 \\ * & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det E_7 - \det D_6 = 0$
R_9		$\begin{pmatrix} E_8 & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_7 & * & 0 \\ * & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det E_8 - \det E_7 = 0$
S_3	o=o=o	$\begin{pmatrix} B_2 & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det B_2 - 2 \det A_1 = 0$
S_l für $l > 3$	o=o-o-...-o-o=o	$\begin{pmatrix} B_{l-1} & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{l-2} & * & 0 \\ * & 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det B_{l-1} - 2 \det B_{l-2} = 0$
T_4		$\begin{pmatrix} A_3 & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & * & 0 \\ 0 & A_1 & * & 0 \\ * & * & 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det A_3 - 2(\det A_1)^2 = 0$
T_5		$\begin{pmatrix} D_4 & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3 & * & 0 \\ * & 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det D_4 - 2 \det A_3 = 0$

T_l für $l > 5$		$\begin{pmatrix} D_{l-1} & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{l-2} & * & 0 \\ * & 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det D_{l-1} - 2 \det D_{l-2} = 0$
U_3	$o \equiv o - o$	$\begin{pmatrix} G_2 & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & * & 0 \\ * & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det G_2 - \det A_1 = 0$
V_5	o-o=o-o-o	$\begin{pmatrix} F_4 & * \\ * & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_3 & * & 0 \\ * & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$2 \det F_4 - \det B_3 = 0$

Satz 8.2
Sei Γ ein zusammenhängender Graph mit positiv definiter Coxeterform ω_Γ, in dem je zwei verschiedene Ecken durch höchstens drei Kanten verbunden sind. Dann ist Γ einer der folgenden Graphen:

- A_l mit $l \geq 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- B_l mit $l \geq 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{-2} & 2 \end{pmatrix}$$

- D_l mit $l \geq 4$

$$\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & \mathbf{-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & 2
\end{pmatrix}$$

- E_6

$$\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2
\end{pmatrix}$$

- E_7

$$\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{pmatrix}$$

- E_8

$$\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{pmatrix}$$

- F_4

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- G_2

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

BEWEIS:
Man macht Induktion nach der Zahl der Ecken. Nach Satz 8.1 ist $\omega_{\Gamma'}$ für jeden Teilgraphen Γ' von Γ ebenfalls positiv definit. Insbesondere ist die Matrix von $\omega_{\Gamma'}$ regulär. Daher kann Γ' keiner der Graphen vom Typ P, Q, R, S, T, V aus dem obigen Beispiel sein. Insbesondere hat Γ keine „Kreise" (Typ P_l).

Enthält Γ eine dreifache Kante (wie G_2), dann ist $\Gamma = G_2$. Denn sonst würde Γ einen Teilgraphen vom Typ U_3 enthalten. Daher können wir im folgenden annehmen, dass Γ keine dreifache Kante enthält.

Wir betrachten als nächstes den Fall, dass Γ eine zweifache Kante enthält. Dann enthält Γ *genau eine* doppelte Kante. Denn sonst würde Γ einen Teilgraphen vom Typ S_l enthalten. Ferner enthält Γ keinen „Verzweigungspunkt", d. h. eine Ecke, die mit mindestens drei weiteren Ecken durch eine Kante verbunden ist. Denn sonst würde Γ einen Teilgraphen vom Typ T_l enthalten. Liegt die doppelte Kante am „Rand" von Γ, so ist $\Gamma = B_l$ für ein $l \geq 2$. Liegt die doppelte Kante nicht am Rand von Γ, dann ist $\Gamma = F_4$. Denn sonst würde Γ einen Teilgraphen vom Typ V_5 enthalten.

Im folgenden können wir annehmen, dass alle Kanten von Γ einfach sind. Hat Γ keinen Verzweigungspunkt, dann ist $\Gamma = A_l$ für $l \in \mathbb{N}$. Daher können wir annehmen, dass Γ einen Verzweigungspunkt hat. Da Γ keinen Teilgraphen vom Typ Q_l enthält, hat Γ genau einen Verzweigungspunkt. Da Γ keinen Teilgraphen vom Typ Q_5 enthält, ist dieser Verzweigungspunkt mit genau drei weiteren Ecken durch einen Kante verbunden. Die Längen der drei „Zweige" bezeichnen wir mit n_1, n_2, n_3. Dabei sei o. B. d. A. $n_1 \leq n_2 \leq n_3$. Da Γ keinen Teilgraphen vom Typ R_7 enthält, ist auf jeden Fall $n_1 = 1$. Im Fall $n_2 = 1$ ist $\Gamma = D_l$ für $l \geq 4$. Daher können wir $n_2 \geq 2$ annehmen. Da Γ keinen Teilgraphen vom Typ R_8 enthält, muss $n_2 = 2$ sein. Da Γ keinen Teilgraphen vom Typ R_9 enthält, muss $n_3 \leq 4$ sein. Daher ist Γ vom Typ E_6, E_7 oder E_8. ■

Satz 8.3
Sei H eine Cartanalgebra einer einfachen Lie-Algebra L, Φ die entsprechende Menge von Wurzeln, Π eine Basis von Φ. Bei geeigneter Numerierung der Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \Pi$ hat dann die Matrix $A := (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ mit $A_{ij} := 2\kappa_L(h_{\alpha_i}, h_{\alpha_j})/\kappa_L(h_{\alpha_i}, h_{\alpha_i})$ für $i, j = 1, \ldots, l$ eine der folgenden Formen. (siehe Extrablatt)

Beweis:
Der Coxetergraph Γ von L bezüglich Π ist nach Satz 7.14 zusammenhängend. Nach Satz 7.9 und Satz 8.2 ist also Γ vom Typ A, B, D, E, F, G. Für $i = 1, \dots, l$ ist offenbar stets $A_{ii} = 2$. Für verschiedene $i, j \in \{1, \dots, l\}$ ist stets $A_{ij} \leq 0$ nach Satz 7.6. Im Fall $A_{ij}A_{ji} = 0$ ist $A_{ij} = A_{ji} = 0$ nach Satz 7.9. Im Fall $A_{ij}A_{ji} = 1$ ist $A_{ij} = -1 = A_{ji}$. Damit sind die Fälle erledigt, in denen Γ vom Typ A_l, D_l, E_6, E_7, E_8 ist.

Im Fall $\Gamma = G_2$ ist $(A_{12}, A_{21}) \in \{(-1, -3), (-3, -1)\}$ nach Satz 7.9. Durch geeignete Numerierung kann man $A_{12} = -1, A_{21} = -3$ erreichen.

Im Fall $\Gamma = F_4$ ist analog $(A_{23}, A_{32}) \in \{(-1, -2), (-2, -1)\}$. Durch geeignete Numerierung kann man $A_{23} = -1, A_{32} = -2$ erreichen.

Ebenso kann man im Fall $\Gamma = B_2$ annehmen, dass $A_{12} = -1, A_{21} = -2$ ist.

Im Fall $\Gamma = B_l$ für ein $l > 2$ erhält man jedoch die beiden Möglichkeiten $A_{l-1,l} = -1, A_{l,l-1} = -2$ oder $A_{l-1,l} = -2, A_{l,l-1} = -1$. ∎

Definition 8.4
Die Matrix A heißt **Cartanmatrix**, die A_{ij} heißen **Cartaninvarianten**.

Bemerkung
Im Fall B_l ist $\kappa_L(h_{\alpha_1}, h_{\alpha_1}) = \dots = \kappa_L(h_{\alpha_{l-1}}, h_{\alpha_{l-1}}) > \kappa_L(h_{\alpha_l}, h_{\alpha_l})$. Im Fall C_l ist $\kappa_L(h_{\alpha_1}, h_{\alpha_1}) = \dots = \kappa_L(h_{\alpha_{l-1}}, h_{\alpha_{l-1}}) < \kappa_L(h_{\alpha_l}, h_{\alpha_l})$. Im Fall F_4 ist $\kappa_L(h_{\alpha_1}, h_{\alpha_1}) = \kappa_L(h_{\alpha_2}, h_{\alpha_2}) > \kappa_L(h_{\alpha_3}, h_{\alpha_3}) = \kappa_L(h_{\alpha_4}, h_{\alpha_4})$. Im Fall G_2 ist $\kappa_L(h_{\alpha_1}, h_{\alpha_1}) > \kappa_L(h_{\alpha_2}, h_{\alpha_2})$.

Man ergänzt den Coxetergraphen durch einen Pfeil, dessen Spitze auf die „kürzere“ Wurzel zeigt und erhält so die sogenannten **Dynkindiagramme**:

- A_l mit $l > 0$: o-o-o-. . .-o-o
- B_l mit $l > 1$: o-o-o-. . .-o=>=o
- C_l mit $l > 2$: o-o-o-. . .-o=<=o
- D_l mit $l > 3$: o-o-o-. . .-o<8
- E_6, E_7, E_8 wie gehabt
- F_4: o-o=>=o
- G_2: *o* ≡>≡ *o*

Satz 8.5
Seien L eine halbeinfache Lie-Algebra, H, Φ, Π, Γ wie üblich und $\Pi_1, \dots, \Pi_r$ die Zusammenhangskomponenten von Π und $L_1, \dots, L_r$ die entsprechenden einfachen Ideale von L (siehe Satz 7.14). Bezeichnet $A^{(i)}$ für $i = 1, \dots, r$ die Cartanmatrix von L_i bezüglich Π_i,

dann hat die Cartanmatrix von A bezüglich Π bei passender Numerierung der Elemente in Π die Form:

$$A = \begin{pmatrix} A^{(1)} & & & \\ & A^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A^{(r)} \end{pmatrix}$$

BEWEIS:
Für Ecken α, β in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von Γ ist $A_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha} = 0$, d. h. $A_{\alpha\beta} = 0 = A_{\beta\alpha}$ nach Satz 7.9. Für $i = 1, \ldots, r$ ist außerdem $\kappa_{L_i} = \kappa_L|L_i \times L_i$. Daher stimmen für $\alpha, \beta \in \Pi$ die Cartaninvarianten bezüglich L und L_i überein. ∎

Bemerkung
Im Rest des Kapitels werden wir zeigen, dass die Cartanmatrix (bzw. das Dynkindiagramm) eine halbeinfache Lie-Algebra bis auf Isomorphie bestimmen.

Satz 8.6
Seien $H, \tilde{H}$ Cartanalgebren halbeinfacher Lie-Algebren $L, \tilde{L}$ und $\Phi, \tilde{\Phi}$ die entsprechenden Mengen von Wurzeln. Für $\lambda \in H^*$ sei $h_\lambda \in H$ mit $\kappa_L(h_\lambda, h) = \lambda(h)$ für alle $h \in H$ und für $\tilde{\lambda} \in \tilde{H}^*$ sei $\tilde{h}_{\tilde{\lambda}} \in \tilde{H}$ mit $\kappa_{\tilde{L}}(\tilde{h}_{\tilde{\lambda}}, \tilde{h}) = \tilde{\lambda}(\tilde{h})$ für $\tilde{h} \in \tilde{H}$. Seien $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}, \tilde{\Pi} = \{\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_l\}$ Basen von Φ bzw. $\tilde{\Phi}$ und seien $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^*, \tilde{H}^*), \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H, \tilde{H})$ mit $\varphi(\alpha_i) = \tilde{\alpha}_i, \psi(h_{\alpha_i}) = \tilde{h}_{\tilde{\alpha}_i}$ für $i = 1, \ldots, l$. Haben $L, \tilde{L}$ die gleiche Cartanmatrix bezüglich Π bzw. $\tilde{\Pi}$, dann gilt

(i) ψ ist eine Isometrie bezüglich κ_L und $\kappa_{\tilde{L}}$.

(ii) $\varphi(\Phi) = \tilde{\Phi}$

(iii) $\psi(h_\lambda) = \tilde{h}_{\varphi(\lambda)}$ für $\lambda \in H^*$

(iv) $\varphi(\lambda) = \lambda \circ \psi^{-1}$ für $\lambda \in H^*$

BEWEIS:
Die Abbildungen $\iota \colon H^* \to H, \lambda \mapsto h_\lambda$ und $\tilde{\iota} \colon \tilde{H}^* \to \tilde{H}, \tilde{\lambda} \mapsto \tilde{h}_{\tilde{\lambda}}$ sind offenbar lineare Bijektionen. Da Π und $\tilde{\Pi}$ Basen von H^* bzw. $\tilde{H}^*$ sind, ist φ eine lineare Bijektion. Da $\{h_{\alpha_1}, \ldots, h_{\alpha_l}\}$ und $\{\tilde{h}_{\tilde{\alpha}_1}, \ldots, \tilde{h}_{\tilde{\alpha}_l}\}$ Basen von H bzw. $\tilde{H}$ sind, ist ψ eine lineare Bijektion. Wegen $\psi(\iota(\alpha_i)) = \psi(h_{\alpha_i}) = \tilde{h}_{\tilde{\alpha}_i} = \tilde{\iota}(\varphi(\alpha_i))$ für $i = 1, \ldots, l$ ist $\psi \circ \iota = \tilde{\iota} \circ \varphi$. Daher gilt (iii).

Seien $W, \tilde{W}$ die Weylgruppen von L bzw. $\tilde{L}$ bezüglich H bzw. $\tilde{H}$. Für $i, j = 1, \ldots, l$ ist

$$\psi(\sigma_{\alpha_i}(h_{\alpha_j})) = \psi(h_{\alpha_j} - A_{ij}h_{\alpha_i}) = \tilde{h}_{\tilde{\alpha}_j} - A_{ij}\tilde{h}_{\tilde{\alpha}_i} = \sigma_{\tilde{\alpha}_i}(\tilde{h}_{\tilde{\alpha}_j}) = \sigma_{\tilde{\alpha}_i}(\psi(h_{\alpha_j}))$$

Daher ist $\psi \circ \sigma_{\alpha_i} = \sigma_{\tilde{\alpha}_i} \circ \psi$ auf $H_{\mathbb{R}}$.

Zu jedem $\beta \in \Phi$ existieren $i_1, \ldots, i_k, j \in \{1, \ldots, l\}$ mit $h_\beta = (\sigma_{\alpha_{i_1}} \circ \ldots \circ \sigma_{\alpha_{i_k}})(h_{\alpha_j})$. Dann ist

$$\tilde{h}_{\varphi(\beta)} = \psi(h_\beta) = \underbrace{(\sigma_{\tilde{\alpha}_{i_1}} \circ \ldots \circ \sigma_{\tilde{\alpha}_{i_k}})}_{=:\, \tilde{\sigma} \in \tilde{W}}(\psi(h_{\alpha_j})) = \tilde{\sigma}(\tilde{h}_{\tilde{\alpha}_j}) = h_{\tilde{\beta}}$$

für ein $\tilde{\beta} \in \tilde{\Phi}$. Also ist $\varphi(\beta) = \tilde{\beta} \in \tilde{\Phi}$. Dies zeigt: $\varphi(\Phi) \subseteq \tilde{\Phi}$. Insbesondere ist $|\Phi| \leq |\tilde{\Phi}|$. Aus Symmetriegründen folgt $|\Phi| = |\tilde{\Phi}|$, d. h. $\varphi(\Phi) = \tilde{\Phi}$. Also gilt (ii).

Da φ linear und bijektiv ist, geht für $\alpha,\beta \in \Phi$ die α-Kette durch β in die $\varphi(\alpha)$-Kette durch $\varphi(\beta)$ über. Nach Satz 7.1 ist also $\kappa_L(h_\alpha,h_\beta)/\kappa_L(h_\alpha,h_\alpha) = \kappa_{\tilde{L}}(\tilde{h}_{\varphi(\alpha)},\tilde{h}_{\varphi(\beta)})/\kappa_{\tilde{L}}(\tilde{h}_{\varphi(\alpha)},\tilde{h}_{\varphi(\alpha)})$. Für $\alpha \in \Phi$ gilt nach Bemerkung 6.10: $\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha) = \sum_{\beta\in\Phi} \kappa_L(h_\beta, h_\alpha)^2$. Daher ist:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\kappa_L(h_\alpha,h_\alpha)} &= \sum_{\beta\in\Phi} \frac{\kappa_L(h_\beta,h_\alpha)^2}{\kappa_L(h_\alpha,h_\alpha)^2} = \sum_{\beta\in\Phi} \frac{\kappa_{\tilde{L}}(\tilde{h}_{\varphi(\beta)},\tilde{h}_{\varphi(\alpha)})^2}{\kappa_{\tilde{L}}(\tilde{h}_{\varphi(\alpha)},\tilde{h}_{\varphi(\alpha)})^2} \\ &= \frac{1}{\kappa_{\tilde{L}}(\tilde{h}_{\varphi(\alpha)},\tilde{h}_{\varphi(\alpha)})}\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt $\kappa_L(h_\alpha, h_\beta) = \kappa_{\tilde{L}}(\tilde{h}_{\varphi(\alpha)}, \tilde{h}_{\varphi(\beta)})$ für alle $\alpha,\beta \in \Phi$. Insbesondere ist $\kappa_L(h_{\alpha_i}, h_{\alpha_j}) = \kappa_{\tilde{L}}(\tilde{h}_{\tilde{\alpha}_i}, \tilde{h}_{\tilde{\alpha}_j}) = \kappa_{\tilde{L}}(\psi(h_{\alpha_i}), \psi(h_{\alpha_j}))$ für $i, j = 1, \ldots, l$, d. h. ψ ist Isometrie. Also gilt (i).

Für $\lambda \in H^*$ und $\tilde{h} \in \tilde{H}$ ist

$$(\varphi(\lambda))(\tilde{h}) = \kappa_{\tilde{L}}(\tilde{h}_{\varphi(\lambda)}, \tilde{h}) = \kappa_{\tilde{L}}(\psi(h_\lambda), \tilde{h}) = \kappa_L(h_\lambda, \psi^{-1}(\tilde{h})) = \lambda(\psi^{-1}(\tilde{h}))$$

Folglich gilt (iv). ∎

Bemerkung
Im fogenden werden wir den Isomorphismus $\psi\colon H \to \tilde{H}$ zu einem Isomorphismus $L \to \tilde{L}$ fortsetzen. Dies ist nicht ganz selbstverständlich, da die Wahl der früher eingeführten Elemente $e_\alpha (\alpha \in \Phi)$ nicht ganz kanonisch war.

Satz 8.7
Sei L eine halbeinfache Lie-Algebra, $H, \Phi, h_\lambda, e_\alpha$ wie üblich. Für zwei Wurzeln α,β mit der Eigenschaft $\alpha + \beta \in \Phi$ sei $N_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ mit $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$. Dann gilt:

(i) $N_{\beta\alpha} = -N_{\alpha\beta}$ für alle $\alpha,\beta \in \Phi$ mit $\alpha + \beta \in \Phi$

(ii) $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha}$ für alle $\alpha,\beta,\gamma \in \Phi$ mit $\alpha + \beta + \gamma = 0$

(iii) $N_{\alpha\beta} N_{-\alpha,-\beta} = -(s + 1)t\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)^{1/2}$ für alle $\alpha,\beta \in \Phi$ mit $\alpha + \beta \in \Phi$. Dabei ist $\beta - s\alpha, \ldots, \beta, \ldots, \beta + t\alpha$ die α-Kette durch β. Insbesondere ist $N_{\alpha\beta} \neq 0$.

(iv) $N_{\alpha\beta} N_{\gamma\delta} + N_{\beta\gamma} N_{\alpha\delta} + N_{\gamma\alpha} N_{\beta\delta} = 0$ für alle $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \Phi$ mit $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \alpha + \gamma \in \Phi$ und $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$.

Beweis:
Man beachte, dass $N_{\lambda\mu}$ jeweils definiert ist.

(i) $N_{\beta\alpha} e_{\alpha+\beta} = [e_\beta, e_\alpha] = -[e_\alpha, e_\beta] = -N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$.

(ii) $0 = [[e_\alpha, e_\beta], e_\gamma] + [[e_\beta, e_\gamma], e_\alpha] + [[e_\gamma, e_\alpha], e_\beta] = N_{\alpha\beta}[e_{-\gamma}, e_\gamma] + N_{\beta\gamma}[e_{-\alpha}, e_\alpha] + N_{\gamma\alpha}[e_{-\beta}, e_\beta] = -N_{\alpha\beta}h_\gamma - N_{\beta\gamma}h_\alpha - N_{\gamma\alpha}h_\beta = N_{\alpha\beta}(h_\alpha + h_\beta) - N_{\beta\gamma}h_\alpha - N_{\gamma\alpha}h_\beta = (N_{\alpha\beta} - N_{\beta\gamma})h_\alpha + (N_{\alpha\beta} - N_{\gamma\alpha})h_\beta$.

Wären h_α, h_β linear abhängig, so auch α,β. Dann wäre aber doch $\beta = \alpha$ oder $\beta = -\alpha$ und $\underbrace{\alpha + \beta}_{-\gamma\in\Phi} \in \{2\alpha, 0\}$. ↯ Folglich sind h_α, h_β linear unabhängig und die Behauptung folgt.

(iii) Für alle $\lambda, \mu \in \Phi$ mit $\lambda + \mu, \lambda - \mu \in \Phi$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= [[e_{-\lambda}, e_\lambda], e_\mu] + [[e_\lambda, e_\mu], e_{-\lambda}] + [[e_\mu, e_{-\lambda}], e_\lambda] \\ &= [-h_\lambda, e_\mu] + N_{\lambda\mu}[e_{\lambda+\mu}, e_{-\lambda}] + N_{\mu,-\lambda}[e_{\mu-\lambda}, e_\lambda] \\ &= -\mu(h_\lambda)e_\mu + N_{\lambda\mu}N_{\lambda+\mu,-\lambda}e_\mu + N_{\mu,-\lambda}N_{\mu-\lambda,\lambda}e_\mu \\ &= (-\kappa_L(h_\mu, h_\lambda) + N_{\lambda\mu}N_{-\lambda,-\mu} - N_{\lambda,\mu-\lambda}N_{-\lambda,\lambda-\mu})e_\mu \end{aligned}$$

Daher ist $\kappa_L(h_\mu, h_\lambda) = N_{\lambda\mu}N_{-\lambda,-\mu} - N_{\lambda,\mu-\lambda}N_{-\lambda,\lambda-\mu}$. Im Fall $\lambda + \mu \in \Phi$, aber $\lambda - \mu \notin \Phi \cup \{0\}$ ist analog $\kappa_L(h_\mu, h_\lambda) = N_{\lambda\mu}N_{-\lambda,-\mu}$.

Dies wenden wir auf die α-Kette durch β an:

$$\begin{aligned} \kappa_L(h_\beta, h_\alpha) &= N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,-\beta} - N_{\alpha,\beta-\alpha}N_{-\alpha,\alpha-\beta} \\ \kappa_L(h_{\beta-\alpha}, h_\alpha) &= N_{\alpha,\beta-\alpha}N_{-\alpha,\alpha-\beta} - N_{\alpha,\beta-2\alpha}N_{-\alpha,2\alpha-\beta} \\ \kappa_L(h_{\beta-2\alpha}, h_\alpha) &= N_{\alpha,\beta-2\alpha}N_{-\alpha,2\alpha-\beta} - N_{\alpha,\beta-3\alpha}N_{-\alpha,3\alpha-\beta} \\ &\dots \\ \kappa_L(h_{\beta-s\alpha}, h_\alpha) &= N_{\alpha,\beta-s\alpha}N_{-\alpha,s\alpha-\beta} \end{aligned}$$

Die Addition der Gleichungen liefert:

$$(s+1)\kappa_L(h_\beta, h_\alpha) - \frac{s(s+1)}{2}\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha) = N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,-\beta}$$

Wegen $\frac{\kappa_L(h_\beta,h_\alpha)}{\kappa_L(h_\alpha,h_\alpha)} = {}^{(s-t)}/_2$ folgt die Behauptung.

(iv) Wir nutzen die Jacobi-Identität:

$$\begin{aligned} 0 &= [[e_\alpha, e_\beta], e_\gamma] + [[e_\beta, e_\gamma], e_\alpha] + [[e_\gamma, e_\alpha], e_\alpha] \\ &= N_{\alpha\beta}[e_{\alpha+\beta}, e_\gamma] + N_{\beta\gamma}[e_{\beta+\gamma}, e_\alpha] + N_{\gamma\alpha}[e_{\alpha+\gamma}, e_\beta] \\ &= N_{\alpha\beta}N_{\alpha+\beta,\gamma}e_{\alpha+\beta+\gamma} + N_{\beta\gamma}N_{\beta+\gamma,\alpha}e_{\alpha+\beta+\gamma} + N_{\gamma\alpha}N_{\gamma+\alpha,\beta}e_{\alpha+\beta+\gamma} \\ &= (N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta} + N_{\beta\gamma}N_{\alpha\delta} + N_{\gamma\alpha}N_{\beta\delta})e_{-\delta} \end{aligned}$$

■

Bemerkung
Setzt man $N_{\alpha\beta} := 0$ für alle $\alpha,\beta \in \Phi$ mit $\alpha + \beta \notin \Phi \cup \{0\}$., so gilt (i) für alle $\alpha,\beta \in \Phi$ mit $\alpha + \beta \neq 0$. Es gilt (iv) für alle $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Phi$ mit $\alpha + \beta \neq 0, \beta + \gamma \neq 0, \alpha + \gamma \neq 0, \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$. Dies folgt unmittelbar aus dem obigen Beweis.

Bemerkung 8.8
Sei L eine halbeinfache Lie-Algebra, $H, \Phi, \Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}, H_{\mathbb{R}}$ wie üblich. Setze

$$H_{\mathbb{R}}^+ := \{\sum_{i=1}^{l} \xi_i h_{\alpha_i} \in H_{\mathbb{R}} : \exists j \in \{1, \dots, l\} : \xi_1 = \dots = \xi_{j-1} = 0 < \xi_j\}$$

Definiere für $x, y \in H_{\mathbb{R}} : x < y : \Leftrightarrow y - x \in H_{\mathbb{R}}^+$. Dann gilt

(i) $H_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{R}}^+ \dot\cup \{0\} \dot\cup (-H_{\mathbb{R}}^+)$

(ii) Für $x, y \in H_{\mathbb{R}}^+$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda > 0$ ist $x + y, \lambda x \in H_{\mathbb{R}}^+$

(iii) Für jede bezüglich Π positive Wurzel α ist $h_\alpha \in H_{\mathbb{R}}^+$.

(iv) Für $x, y \in H_{\mathbb{R}}$ ist entweder $x < y$ oder $x = y$ oder $y < x$.

(v) Für $x, y, z \in H_{\mathbb{R}}$ mit $x < y, y < z$ ist auch $x < z$.

Definition 8.9
Ein Paar von Wurzeln $(\xi, \eta) \in \Phi \times \Phi$ mit $\xi + \eta \in \Phi$ und $0 < h_\xi < h_\eta$ heißt **speziell**. Ein spezielles Paar $(\xi, \eta) \in \Phi \times \Phi$ heißt **extraspeziell**, falls $h_\xi \leq h_\rho$ für jedes spezielle Paar $(\rho, \sigma) \in \Phi \times \Phi$ mit $\xi + \eta = \rho + \sigma$ gilt. (Diese Begriffe hängen von der Reihenfolge der Elemente $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ ab.)

Satz 8.10
Mit den obigen Bezeichnungen existiert zu jeder positiven Wurzel $\beta \in \Phi \setminus \Pi$ genau ein extraspezielles Paar $(\xi, \eta) \in \Phi \times \Phi$ mit $\beta = \xi + \eta$.

Beweis:
Schreibe $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$ mit $n_\alpha \in \mathbb{N}_0$ für $\alpha \in \Pi$. Wegen $0 < \kappa_L(h_\beta, h_\beta) = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \kappa_L(h_\alpha, h_\beta)$ existiert ein $\alpha \in \Pi$ mit $\kappa_L(h_\alpha, h_\beta) > 0$. Offenbar ist $\beta \notin \{\alpha, -\alpha\}$. Sei $\beta - s\alpha, \dots, \beta, \dots, \beta + t\alpha$ die α-Kette durch β. Dann ist $\frac{s-t}{2} = \frac{\kappa_L(h_\alpha, h_\beta)}{\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)} > 0$, also $s > 0$ und $\beta - \alpha \in \Phi$. Offenbar ist $\beta - \alpha$ eine positive Wurzel und $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha$. Dabei ist entweder $(\beta - \alpha, \alpha)$ oder $(\alpha, \beta - \alpha)$ speziell. Unter den speziellen Paaren $(\rho, \sigma) \in \Phi \times \Phi$ mit $\beta = \rho + \sigma$ wählen wir jetzt (ξ, η) so, dass h_ξ möglichst klein bezüglich $<$ ist. Dann ist (ξ, η) extraspeziell. ∎

Satz 8.11 (Isomorphiesatz für halbeinfache Lie-Algebren)
Seien $L, \tilde{L}$ halbeinfache Lie-Algebren mit Cartanzerlegungen $L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha(H), \tilde{L} = \tilde{H} \oplus \bigoplus_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\Phi}} \tilde{L}_{\tilde{\alpha}}(\tilde{H})$. Seien $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}, \tilde{\Pi} = \{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_l\}$ Basen von Φ bzw. $\tilde{\Phi}$. Haben $L, \tilde{L}$ die gleiche Cartanmatrix bezüglich Π bzw. $\tilde{\Pi}$, so sind $L, \tilde{L}$ isomorph.

Beweis:
Für $\lambda \in H^*, \tilde{\lambda} \in \tilde{H}^*$ seien $h_\lambda \in H, \tilde{h}_{\tilde{\lambda}} \in \tilde{H}$ wie üblich. Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^*, \tilde{H}^*)$ mit $\varphi(\alpha_i) = \tilde{\alpha}_i$ für $i = 1, \dots, l$. Nach Satz 8.6 ist $\varphi(\Phi) = \tilde{\Phi}$. Für $\alpha \in \Pi$ können wir $e_\alpha \in L_\alpha(H) \setminus \{0\}$ beliebig wählen. Dann numerieren wir die positiven Wurzeln $\beta_1, \beta_2, \dots$ in $\Phi \setminus \Pi$ so, dass $h_{\beta_1} < h_{\beta_2} < \cdots$ gilt und definieren e_{β_i} induktiv. Ist $\beta \in \Phi \setminus \Pi$ positiv, dann existiert genau ein extraspezielles Paar $(\xi, \eta) \in \Phi \times \Phi$ mit $\beta = \xi + \eta$. Dabei ist natürlich $h_\xi < h_\beta$ und $h_\eta < h_\beta$. Nach Induktion sind e_ξ und e_η bereits definiert. Setze $e_\beta := [e_\xi, e_\eta] \in L_\beta(H) \setminus \{0\}$.

Auf diese Weise erhalten wir Elemente e_β für alle positiven Wurzeln $\beta \in \Phi$. Für jedes solche β wählen wir schließlich das $e_{-\beta} \in L_{-\beta}(H)$ so, dass gilt: $[e_\beta, e_{-\beta}] = h_\beta$.

Analog konstruieren wir Elemente $\tilde{e}_{\tilde{\alpha}} \in \tilde{L}_{\tilde{\alpha}}(\tilde{H})$ für $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Phi}$. Schreibe $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$ mit $N_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha + \beta \in \Phi$. Schreibe weiter $[\tilde{e}_{\tilde{\alpha}}, \tilde{e}_{\tilde{\beta}}] = \tilde{N}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \tilde{e}_{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}$ mit $\tilde{N}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \in \mathbb{C}$ für alle $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \tilde{\Phi}$ mit $\tilde{\alpha}+\tilde{\beta} \in \tilde{\Phi}$. Setze zusätzlich: $N_{\alpha\beta} := 0 \tilde{N}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$ für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha+\beta \notin \Phi \cup \{0\}$ und alle $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \tilde{\Phi}$ mit $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \notin \tilde{\Phi} \cup \{0\}$. Definiere eine lineare Abbildung $\psi \colon L \to \tilde{L}$ durch $\psi(h_{\alpha_i}) := \tilde{h}_{\tilde{\alpha}_i}$ für $i = 1, \ldots, l$ und $\psi(e_\alpha) := \tilde{e}_{\varphi(\alpha)}$ für $\alpha \in \Phi$. Wir werden zeigen, dass ψ ein Isomorphismus von Lie-Algebren ist.

Wegen $\varphi(\Phi) = \tilde{\Phi}$ ist ψ bijektiv und nach Satz 8.6 ist die Einschränkung von ψ eine Isometrie $H \to \tilde{H}$ bezüglich κ_L und $\kappa_{\tilde{L}}$. Daher genügt es zu zeigen: $\psi([x,y]) = [\psi(x), \psi(y)]$ für alle $x, y \in L$. Dazu werden wir nachrechnen:

(i) $\psi([h_\alpha, h_\beta]) = [\psi(h_\alpha), \psi(h_\beta)]$ für $\alpha, \beta \in \Pi$
Trivial, da $H, \tilde{H}$ kommutativ.

(ii) $\psi([h_\alpha, e_\beta]) = [\psi(h_\alpha), \psi(e_\beta)]$ für $\alpha \in \Pi, \beta \in \Phi$
Nach Satz 8.6 gilt für $\alpha \in \Pi, \beta \in \Phi$:

$$\begin{aligned}\psi([h_\alpha, e_\beta]) &= \kappa_L(h_\beta, h_\alpha)\psi(e_\beta) = \kappa_{\tilde{L}}(\psi(h_\beta), \psi(h_\alpha))\tilde{e}_{\varphi(\beta)} = \kappa_{\tilde{L}}(\tilde{h}_{\varphi(\beta)}, \tilde{h}_{\varphi(\alpha)})\tilde{e}_{\varphi(\beta)} \\ &= (\varphi(\beta))(\tilde{h}_{\varphi(\alpha)})\tilde{e}_{\varphi(\beta)} = [\tilde{h}_{\varphi(\alpha)}, \tilde{e}_{\varphi(\beta)}] = [\psi(h_\alpha), \psi(e_\beta)]\end{aligned}$$

(iii) $\psi([e_\alpha, e_\beta]) = [\psi(e_\alpha), \psi(e_\beta)]$ für $\alpha, \beta \in \Phi$
Wir müssen wieder Fallunterscheidung machen. Für $\alpha \in \Phi$ gilt nach Satz 8.6:

$$\psi([e_\alpha, e_{-\alpha}]) = \psi(h_\alpha) = \tilde{h}_{\varphi(\alpha)} = [\tilde{e}_{\varphi(\alpha)}, \tilde{e}_{\varphi(-\alpha)}] = [\psi(e_\alpha), \psi(e_{-\alpha})]$$

Für $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha + \beta \notin \Phi \setminus \{0\}$ ist auch $\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) = \varphi(\alpha + \beta) \notin \tilde{\Phi} \cup \{0\}$, also $\psi([e_\alpha, e_\beta]) = \psi(0) = 0 = [\tilde{e}_{\varphi(\alpha)}, \tilde{e}_{\varphi(\beta)}] = [\psi(e_\alpha), \psi(e_\beta)]$. Daher können wir beim Beweis nunmehr $\alpha + \beta \in \Phi$ voraussetzen. Dann ist

$$\begin{aligned}\psi([e_\alpha, e_\beta]) = N_{\alpha\beta}\psi(e_{\alpha+\beta}) = N_{\alpha\beta}\tilde{e}_{\varphi(\alpha+\beta)} = N_{\alpha\beta}\tilde{e}_{\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)} \\ [\psi(e_\alpha), \psi(e_\beta)] = [\tilde{e}_{\varphi(\alpha)}, \tilde{e}_{\varphi(\beta)}] = \tilde{N}_{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}\tilde{e}_{\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)}\end{aligned}$$

Daher bleibt zu zeigen: $N_{\alpha\beta} = \tilde{N}_{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}$ für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha + \beta \in \Phi$. Offenbar ist $\psi(H_\mathbb{R}) = \tilde{H}_\mathbb{R}$ und $\psi(H_\mathbb{R}^+) = \tilde{H}_\mathbb{R}^+$. Für $x, y \in H_\mathbb{R}$ gilt also: $x < y \Leftrightarrow \psi(x) < \psi(y)$.

Für $\lambda, \mu \in \Phi$ gilt daher: $h_\lambda < h_\mu \Leftrightarrow \psi(h_\lambda) < \psi(h_\mu) \Leftrightarrow \tilde{h}_{\varphi(\lambda)} < \tilde{h}_{\varphi(\mu)}$. Folglich ist (λ, μ) genau dann speziell (extraspeziell), wenn $(\varphi(\lambda), \varphi(\mu))$ speziell (extraspeziell) ist. Wir zeigen zunächst: $N_{\alpha\beta} = \tilde{N}_{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}$ für alle *positiven* $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha + \beta \in \Phi$. dazu nehmen wir das Gegenteil an und wählen ein Gegenbeispiel (α, β) so, dass $h_{\alpha+\beta}$ möglichst klein bezüglich $<$ ist. Ist (α, β) extraspeziell, so ist $[e_\alpha, e_\beta] = e_{\alpha+\beta}$ nach Konstruktion. Also $N_{\alpha\beta} = 1$. Analog ist auch $\tilde{N}_{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)} = 1$. Daher ist (α, β) nicht extraspeziell. Entweder (α, β) oder (β, α) ist speziell. Wegen $N_{\beta\alpha} = -N_{\alpha\beta}$ und $\tilde{N}_{\varphi(\beta)\varphi(\alpha)} = -\tilde{N}_{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}$ können wir annehmen, dass (α, β) speziell ist. Wegen $\alpha + \beta \notin \Pi$

existiert genau ein extraspezielles Paar $(\xi,\eta) \in \Phi \times \Phi$ mit $\alpha + \beta = \xi + \eta$. Dann ist $0 < h_\xi < h_\alpha < h_\beta < h_\eta$ und nach Satz 8.7 gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= N_{\alpha\beta}N_{-\xi,-\eta} + N_{\beta,-\xi}N_{\alpha,-\eta} + N_{-\xi,\alpha}N_{\beta,-\eta}\\
0 &= \tilde{N}_{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}\tilde{N}_{\varphi(-\xi)\varphi(-\eta)} + \tilde{N}_{\varphi(\beta)\varphi(-\xi)}\tilde{N}_{\varphi(\alpha)\varphi(-\eta)} + \tilde{N}_{\varphi(-\xi)\varphi(\alpha)}\tilde{N}_{\varphi(\beta)\varphi(-\eta)}
\end{aligned}$$

Wir werden daher nacheinander $N_{-\xi,-\eta} = \tilde{N}_{\varphi(-\xi)\varphi(-\eta)}, \dots, \tilde{N}_{\beta,-\eta} = \tilde{N}_{\varphi(\beta)\varphi(-\eta)}$ zeigen. Wegen $N_{-\xi,-\eta} \neq 0$ wird daraus $N_{\alpha\beta} = \tilde{N}_{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}$ folgen.

- Bezeichnet man die ξ-Kette durch η mit $\eta - s\xi, \dots, \eta, \dots, \eta + t\xi$, so ist $\varphi(\eta) - s\varphi(\xi), \dots, \varphi(\eta), \dots, \varphi(\eta) + t\varphi(\xi)$ die $\varphi(\xi)$-Kette durch $\varphi(\eta)$. Nach Satz 8.6 und Satz 8.7 gilt also:

$$\begin{aligned}
N_{-\xi,-\eta} &= -(s+1)t\kappa_L(h_\xi,h_\xi)/2 = -(s+1)t\kappa_{\tilde{L}}(\psi(h_\xi),\psi(h_\xi))/2\\
&= -(s+1)t\kappa_{\tilde{L}}(\tilde{h}_{\varphi(\xi)},\tilde{h}_{\varphi(\xi)})/2 = \tilde{N}_{-\varphi(\xi),-\varphi(\eta)} = \tilde{N}_{\varphi(-\xi)\varphi(-\eta)}
\end{aligned}$$

- Ist $\beta - \xi \notin \Phi$, so ist $N_{\beta,-\xi} = 0 = N_{\varphi(\beta)\varphi(-\xi)}$. Ist $\beta - \xi \in \Phi$ so ist $(\xi, \beta - \xi)$ nach Wahl von (α,β) kein Gegenbeispiel. Bezeichnet man die ξ-Kette durch $\beta - \xi$ mit $\beta - \xi - s'\xi, \dots, \beta - \xi, \dots, \beta - \xi + t'\xi$, so gilt analog:

$$\begin{aligned}
N_{\beta,-\xi} = N_{-\xi,\xi-\beta} &= -(s'+1)t'\kappa_L(h_\xi,h_\xi)/(2N_{\xi,\beta-\xi})\\
&= -(s'+1)t'\kappa_{\tilde{L}}(\psi(h_\xi),\psi(h_\xi))/(2\tilde{N}_{\varphi(\xi)\varphi(\beta-\xi)})\\
&= -(s'+1)t'\kappa_{\tilde{L}}(\tilde{h}_{\varphi(\xi)},\tilde{h}_{\varphi(\xi)})/(2\tilde{N}_{\varphi(\xi),\varphi(\beta)-\varphi(\xi)}) = \tilde{N}_{-\varphi(\xi),\varphi(\xi)-\varphi(\beta)}\\
&= \tilde{N}_{\varphi(\beta)\varphi(-\xi)}
\end{aligned}$$

- Ist $\alpha - \eta \notin \Phi$, so ist $N_{\alpha,-\eta} = 0 = \tilde{N}_{\varphi(\alpha)\varphi(-\eta)}$. Ist $\alpha - \eta \in \Phi$, so ist $(\eta - \alpha, \alpha)$ kein Gegenbeispiel. Daher ist:

$$N_{\alpha,-\eta} = N_{-\eta,\eta-\alpha} = N_{\eta-\alpha,\alpha} = \tilde{N}_{\varphi(\eta-\alpha)\varphi(\alpha)} = \tilde{N}_{\varphi(\eta)-\varphi(\alpha),\varphi(\alpha)} = \tilde{N}_{\varphi(\alpha),\varphi(-\eta)}$$

- Ist $\alpha - \xi \notin \Phi$, so ist $N_{-\xi,\alpha} = 0 = \tilde{N}_{\varphi(-\xi)\varphi(\alpha)}$. Ist $\alpha - \xi \in \Phi$, so ist $(\xi, \alpha - \xi)$ kein Gegenbeispiel. Bezeichnet man die ξ-Kette durch $\alpha - \xi$ mit $\alpha - \xi - s''\xi, \dots, \alpha - \xi, \dots, \alpha - \xi + t''\xi$, so gilt also:

$$\begin{aligned}
N_{-\xi,\alpha} = N_{\alpha,\xi-\alpha} = N_{\xi-\alpha,-\xi} = -N_{-\xi,\xi-\alpha} &= (s''+1)t''\kappa_L(h_\xi,h_\xi)/(2N_{\xi,\alpha-\xi})\\
&= (s''+1)t''\kappa_{\tilde{L}}(\psi(h_\xi),\psi(h_\xi))/(2\tilde{N}_{\varphi(\xi)\varphi(\alpha-\xi)}) = \cdots = \tilde{N}_{\varphi(-\xi)\varphi(\alpha)}
\end{aligned}$$

- Ist $\beta - \eta \notin \Phi$, so ist $N_{\beta,-\eta}=0= N_{\varphi(\beta)\varphi(-\eta)}$. Ist $\beta - \eta \in \Phi$, so ist $(\eta - \beta, \beta)$ kein Gegenbeispiel. Daher gilt:

$$N_{\beta,-\eta} = N_{-\eta,\eta-\beta} = N_{\eta-\beta,\beta} = \tilde{N}_{\varphi(\eta-\beta)\varphi(\beta)} = \cdots = \tilde{N}_{\varphi(\beta)\varphi(-\eta)}$$

Wie bereits erwähnt, folgt aus diesen Gleichungen insgesamt $N_{\alpha\beta} = \tilde{N}_{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}$, d. h. (α, β) war doch kein Gegenbeispiel. Damit haben wir gezeigt, dass $N_{\alpha\beta} = \tilde{N}_{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}$ für alle positiven Wurzeln $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha + \beta \in \Phi$ gilt. Für solche α, β ergibt sich dann $N_{-\alpha,-\beta} = \tilde{N}_{\varphi(-\alpha)\varphi(-\beta)}$ aus Satz 8.7. Es bleibt $N_{\alpha\beta} = \tilde{N}_{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}$ in dem Fall zu zeigen, dass eine der Wurzeln α, β positiv, die andere negativ ist.

Wegen $N_{\alpha\beta} = -N_{\beta\alpha}$ können wir annehmen, dass α positiv und β negativ ist. Ist $\alpha + \beta$ positiv, so sei $\alpha + \beta - s(-\beta), \ldots, \alpha + \beta, \ldots, \alpha + \beta + t(-\beta)$ die $(-\beta)$-Kette durch $\alpha + \beta$. Dann ist

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} = N_{\beta,-\alpha-\beta} &= -(s+1)t\kappa_L(h_{-\beta}, h_{-\beta})/(2N_{-\beta,\alpha+\beta}) \\ &= -(s+1)t\kappa_{\tilde{L}}(\psi(h_{-\beta}), \psi(h_{-\beta}))/(2\tilde{N}_{\varphi(-\beta)\varphi(\alpha+\beta)}) = \cdots = \tilde{N}_{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)} \end{aligned}$$

Ist $\alpha + \beta$ negativ, so ist

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta,-\alpha-\beta} = N_{-\alpha-\beta,\alpha} = \tilde{N}_{\varphi(-\alpha-\beta)\varphi(\alpha)} = \cdots = \tilde{N}_{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}$$

und der Satz bewiesen. ■

9 Die klassischen Lie-Algebren

Bemerkung 9.1
Wir wissen schon, dass sl_{l+1} für $l \in \mathbb{N}$ eine einfache Lie-Algebra mit Dynkindiagramm A_l ist. Im folgenden werden Lie-Algebren mit Dynkindiagramm vom Typ B_l, C_l, D_l konstruieren. Dabei werden wir das folgende Kriterium zum Nachweis der Einfachheit verwenden.

Satz
Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $L \subseteq \mathrm{sl}(V)$ eine Unteralgebra. Ist V als L-Modul irreduzibel, so ist L halbeinfach.

Beweis:
Nach dem Satz von Lie (Satz 5.3) hat $S := \operatorname{Rad} L$ einen gemeinsamen Eigenvektor $v \in V$. Für $s \in S$ existiert also ein $\lambda(s) \in \mathbb{C}$ mit $sv = \lambda(s)v$. Für $x \in L$ ist $[s,x] \in S$, also $s(xv) = x(sv) + [s,x]v = \lambda(s)xv + \lambda([s,x])v$. Da V als L-Modul irreduzibel ist, wird V von den Elementen xv mit $x \in L$ aufgespannt. Daher hat V eine Basis bezüglich der jedes $s \in S$ durch eine obere Dreiecksmatrix mit Hauptdiagonale $\lambda(s)$ dargestellt wird. Wegen $L \subseteq \mathrm{sl}(V)$ folgt $\lambda(s) = 0$ für $s \in S$. Dann ist aber $s(xv) = 0$ für $s \in S, x \in L$. Wegen $V = \mathrm{span}(xv\colon x \in L)$ folgt $S = 0$. ∎

Beispiel
Für $n \in \mathbb{N}$ bilden die Matrizen $\begin{pmatrix} B & C \\ D & -B^T \end{pmatrix} \in \mathrm{gl}_{2n}$ mit $B, C, D \in \mathrm{gl}_n$ und $C^T = C, D^T = D$ eine Unteralgebra $\mathrm{sp}_{2n} \subseteq \mathrm{sl}_{2n}$; für $\begin{pmatrix} B & C \\ D & -B^T \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B' & C' \\ D' & -B'^T \end{pmatrix} \in \mathrm{sp}_{2n}$ ist nämlich:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} B & C \\ D & -B^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B' & C' \\ D' & -B'^T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B' & C' \\ D' & -B'^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C \\ D & -B^T \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} BB' + CD' & BC' - CB'^T \\ DB' - B^T D' & DC' + B^T B'^T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B'B + C'D & B'C' - C'B^T \\ D'B - B'^T D & D'C + B'^T B^T \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} BB' - B'B + CD' - C'D & BC' - B'C + C'B^T - CB'^T \\ DB' - D'B + B'^T D - B^T D' & DC' - D'C + B^T B'^T - B'^T B^T \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

sp_{2n} heißt **symplektische Lie-Algebra** des Grades $2n$. Offenbar ist

$$\dim \mathrm{sp}_{2n} = n^2 + 2\binom{n+1}{2} = n^2 + (n+1)n = 2n^2 + n.$$

Satz
Für $n \in \mathbb{N}$ ist sp_{2n} eine halbeinfache Lie-Algebra.

Beweis:
Wir zeigen, dass sp_{2n} irreduzibel auf dem Vektorraum $V = \mathbb{C}^{2n}$ operiert. Sei also $0 \neq U \subseteq V$ ein sp_{2n}-Untermodul und sei $0 \neq u \in U$. Nachdem man notfalls mit $\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{sp}_{2n}$ multipliziert hat, kann man annehmen, dass eine der ersten n Koordinaten von u von 0 verschieden ist. Nachdem man notfalls mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{sp}_{2n}$ multipliziert hat, kann man annehmen, dass die letzten n Koordinaten von u verschwinden. Durch Multiplikation mit Elementen der Form $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B^T \end{pmatrix} \in \mathrm{sp}_{2n}$ erhält man alle Elemente in V, deren n letzte Koordinaten verschwinden. Diese liegen also alle in U. Analog liegen alle Elemente in U, deren n erste Koordinaten verschwinden. Also ist $U = V$. ∎

Bemerkung
Die Diagonalmatrizen bilden eine kommutative Unteralgebra H der Dimension n von $L := \mathrm{sp}_{2n}$. Für $\begin{pmatrix} B & C \\ D & -B^T \end{pmatrix} \in N_L(H)$ enthält H das Element

$$\left[\begin{pmatrix} B & C \\ D & -B^T \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} B & -C \\ D & B^T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B & C \\ -D & B^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2C \\ 2D & 0 \end{pmatrix}$$

Daher ist $C = 0 = D$ und $B \in N_{\mathrm{gl}(\mathfrak{S}_n)} = \mathfrak{S}_n$, also $\begin{pmatrix} B & C \\ D & -B^T \end{pmatrix} \in H$. Folglich ist $H \subseteq L$ eine Cartanalgebra. Wir bezeichnen die Standardbasis von gl_n mit e_{ij} für $i, j = 1, \ldots, n$. Dann bilden die folgenden Elemente eine Basis von L:

$$\begin{pmatrix} e_{ij} & 0 \\ 0 & -e_{ij} \end{pmatrix} \qquad i, j = 1, \ldots, n$$
$$\begin{pmatrix} 0 & e_{ij} + e_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{ij} + e_{ji} & 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \leq i \leq j \leq n$$

Für $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$ und $x := \sum_{k=1}^n \xi_k e_{kk}$ gilt dabei:

$$\begin{aligned}
\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_{ij} & 0 \\ 0 & -e_{ji} \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} \xi_i e_{ij} & 0 \\ 0 & \xi_j e_{ji} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_j e_{ij} & 0 \\ 0 & \xi_i e_{ji} \end{pmatrix} \\
&= (\xi_i - \xi_j) \begin{pmatrix} e_{ij} & 0 \\ 0 & -e_{ji} \end{pmatrix}, \\
\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e_{ij} + e_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} 0 & \xi_i e_{ij} + \xi_j e_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\xi_j e_{ij} - \xi_i e_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (\xi_i + \xi_j) \begin{pmatrix} 0 & e_{ij} + e_{ji} \\ 0 & 0, \end{pmatrix} \\
\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{ij} + e_{ji} & 0 \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\xi_i e_{ij} - \xi_j e_{ji} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \xi_j e_{ij} + \xi_i e_{ji} & 0 \end{pmatrix} \\
&= (-\xi_i - \xi_j) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{ij} + e_{ji} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Daher sind die folgenden Abbildungen Wurzeln von L bezüglich H:

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij} \colon H \to \mathbb{C}, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix} &\mapsto \xi_i - \xi_j \qquad i \neq j \\
\beta_{ij} \colon H \to \mathbb{C}, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix} &\mapsto \xi_i + \xi_j \qquad i \leq j
\end{aligned}$$

sowie die Abbildungen $-\beta_{ij}$ für $i \leq j$. Damit haben wir die Menge Φ der Wurzeln und die Cartanzerlegung von L bezüglich H bestimmt. Dabei ist

$$\Pi := \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \ldots, \alpha_{n-1,n}\} \subseteq \Phi$$

eine Basis; denn es gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij} &= \alpha_{i,i+1} + \cdots + \alpha_{j-1,j} \qquad 1 \leq i < j \leq n \\
\beta_{in} &= \alpha_{in} + \beta_{nn} \qquad i = 1, \ldots, n-1 \\
\beta_{ii} &= \alpha_{in} + \beta_{in} \qquad i = 1, \ldots, n-1 \\
\beta_{ij} &= \alpha_{ij} + \beta_{jj} \qquad 1 \leq i < j \leq n
\end{aligned}$$

Wir berechnen jetzt die Cartanmatrizen $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ von L bezüglich Π:

- α_{nn}-Kette durch $\alpha_{n-1,n}$: $\alpha_{n-1,n}, \beta_{n-1,n} \Rightarrow A_{n,n-1} = -1$
- $\alpha_{n-1,n}$-Kette durch β_{nn}: $\beta_{nn}, \beta_{n-1,n}, \beta_{n-1,n-1} \Rightarrow A_{n-1,n} = -2$
- $\alpha_{n-2,n-1}$-Kette durch $\alpha_{n-1,n}$: $\alpha_{n-1,n}, \alpha_{n-2,n} \Rightarrow A_{n-2,n-1} = -1$
- $\alpha_{n-1,n}$-Kette durch $\alpha_{n-2,n-1}$: $\alpha_{n-2,n-1}, \alpha_{n-2,n} \Rightarrow A_{n-1,n-2} = -1$

Daher haben Cartanmatrizen und Dynkindiagramm von L bezüglich Π den Typ C_n, insbesondere ist sp_{2n} für $n \in \mathbb{N}$ eine einfache Lie-Algebra.

Beispiel
Wie im obigen Beispiel rechnet man nach, dass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix}$ mit $A, B, B \in \mathrm{gl}_n$ und $B^T = -B, C^T = -C$ eine Unteralgebra $o_{2n} \subseteq \mathrm{sl}_{2n}$ bilden. Diese heißt **orthogonale Lie-Algebra** des Grades $2n$. Offenbar ist $\dim o_{2n} = n^2 + 2\binom{n}{2} = n^2 + n(n-1) = 2n^2 - n$.

Ein Beweis, der analog wie oben geführt wird, zeigt, dass o_{2n} eine halbeinfache Lie-Algebra ist. Die Diagonalmatrizen bilden offenbar eine kommutative Unteralgebra H von $L := o_{2n}$. Wie oben ist H eine Cartanalgebra von L. Offenbar bilden die folgenden Elemente eine Basis von L:

$$\begin{pmatrix} e_{ij} & 0 \\ 0 & -e_{ji} \end{pmatrix} \qquad i, j = 1, \ldots, n$$
$$\begin{pmatrix} 0 & e_{ij} - e_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{ij} - e_{ji} & 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \leq i < j \leq n$$

Für $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$ und $x := \sum_{k=1}^n \xi_k e_{kk}$ gilt dabei:

$$\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_{ij} & 0 \\ 0 & -e_{ji} \end{pmatrix}\right] = (\xi_i - \xi_j)\begin{pmatrix} e_{ij} & 0 \\ 0 & -e_{ji} \end{pmatrix}$$
$$\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e_{ij} - e_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = (\xi_i + \xi_j)\begin{pmatrix} 0 & e_{ij} - e_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{ij} - e_{ji} & 0 \end{pmatrix}\right] = (-\xi_i - \xi_j)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{ij} - e_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

Daher sind die folgenden Linearformen Wurzeln von L bezüglich H:

$$\alpha_{ij} \colon H \to \mathbb{C}, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix} \mapsto \xi_i - \xi_j \qquad i \neq j$$
$$\beta_{ij} \colon H \to \mathbb{C}, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix} \mapsto \xi_i + \xi_j \qquad i < j$$

sowie die Abbildungen $-\beta_{ij}$ für $i < j$. Damit hat man die Menge Φ aller Wurzeln von L bezüglich H und die entsprechende Cartanzerlegung gefunden. Weil gilt:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \alpha_{i,i+1} + \cdots + \alpha_{j-1,j} && i < j \\ \beta_{in} &= \alpha_{i,n-1} + \beta_{n-1,n} && i = 1, \ldots, n-2 \\ \beta_{ij} &= \alpha_{in} + \beta_{jn} && i < j < n \end{aligned}$$

bilden die Elemente $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \ldots, \alpha_{n-1,n}, \beta_{n-1,n}$ eine Basis Π von Φ. Jetzt können wir die Cartanmatrizen $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ von L bezüglich Π bestimmen:

- $\alpha_{n-1,n}$-Kette durch $\beta_{n-1,n}$: $\beta_{n-1,n} \Rightarrow A_{n-1,n} = 0 = A_{n,n-1}$
- $\alpha_{n-1,n}$-Kette durch $\alpha_{n-2,n-1}$: $\alpha_{n-2,n-1}, \alpha_{n-2,n} \Rightarrow A_{n-1,n-2} = -1$

- $\alpha_{n-2,n-1}$-Kette durch $\alpha_{n-1,n}$: $\alpha_{n-1,n}\alpha_{n-2,n} \Rightarrow A_{n-2,n-1} = -1$
- $\alpha_{n-2,n-1}$-Kette durch $\beta_{n-1,n}$: $\beta_{n-1,n}, \beta_{n-2,n} \Rightarrow A_{n-2,n} = -1$
- $\beta_{n-1,n}$-Kette durch $\alpha_{n-2,n-1}$: $\alpha_{n-2,n-1}, \beta_{n-2,n} \Rightarrow A_{n,n-2} = -1$
- $\alpha_{n-3,n-2}$-Kette durch $\alpha_{n-2,n-1}$: $\alpha_{n-2,n-1}, \alpha_{n-3,n-1} \Rightarrow A_{n-3,n-2=-1}$
- $\alpha_{n-2,n-1}$-Kette durch $\alpha_{n-3,n-2}$: $\alpha_{n-3,n-2}, \alpha_{n-3,n-1} \Rightarrow A_{n-2,n-3} = -1$
- usw.

Für $n \geq 4$ erhält man also eine Cartanmatrix (oder ein Dynkindiagramm) vom Tyo D_n, insbesondere ist dann o_{2n} eine einfache Lie-Algebra.

Beispiel
Wie in 9.2 rechnet man nach, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -b^T & A & B \\ -a^T & C & -A^T \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{C}^n, A, B, C \in \mathrm{gl}_n, B^T = -B, C^T = -C$$

eine Unteralgebra o_{2n+1} von sl_{2n+1} bilden. Diese heißt **orthogonale Lie-Algebra** des Grades $2n+1$. Offenbar ist $\dim o_{2n+1} = 2n + n^2 + 2\binom{n}{2} = 2n + n^2 + n(n-1) = 2n^2 + 2n$. Ein zu 9.2 analoger Beweis zeigt, dass $L = o_{2n+1}$ eine halbeinfache Lie-Algebra ist. Offenbar bilden die Diagonalmatrizen eine kommutative Unteralgebra $H \subseteq L$. Für

$$\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -y^T & X & Y \\ -x^T & Z & -X^T \end{pmatrix} \in N_L(H)$$

ist

$$H \ni \left[\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -y^T & X & Y \\ -x^T & Z & -X^T \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & x & -y \\ y^T & 0 & -2Y \\ -x^T & 2Z & 0 \end{pmatrix}$$

d. h. $x = y = 0$ und $Y = Z = 0$. Ferner ist $X \in N_{\mathrm{gl}_n}(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{S}_n$. Dies zeigt: $N_L(H) = H$. Folglich ist $H \subseteq L$ eine Cartanalgebra. Offenbar bilden die Elemente:

$$\begin{pmatrix} 0 & e_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -e_i^T & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_i \\ -e_i^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & -e_{ji} \end{pmatrix} \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{ij} - e_{ji} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{ij} - e_{ji} & 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \leq i < j \leq n$$

eine Basis von L.Für $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$ und $x := \sum_{k=1}^n \xi_k e_{kk} \in \mathrm{gl}_n$ gilt dabei:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -e_i^T & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = -\xi_i \begin{pmatrix} 0 & e_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -e_i^T & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_i \\ -e_i^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \xi_i \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_i \\ -e_i^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & -e_{ji} \end{pmatrix}\right] = (\xi_i - \xi_j) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & -e_{ji} \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{ij} - e_{ji} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = (\xi_i + \xi_j) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{ij} - e_{ji} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{ij} - e_{ji} & 0 \end{pmatrix}\right] = (-\xi_i - \xi_j) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{ij} - e_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

Daher sind die folgenden Abbildungen Wurzeln von L bezüglich H:

$$\alpha_i \colon H \to \mathbb{C}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix} \mapsto \xi_i, (i = 1, \ldots, n)$$

$$\beta_{ij} \colon H \to \mathbb{C}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix} \mapsto \xi_i - \xi_j, (i \neq j)$$

$$\gamma_{ij} \colon H \to \mathbb{C}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix} \mapsto \xi_i + \xi_j, (1 \leq i < j \leq n)$$

sowie die Abbildungen $-\alpha_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $-\gamma_{ij}$ für $i < j$. Damit haben wir Wurzelsystem Φ und Cartanzerlegung gefunden. Die folgenden Elemente bilden eine Basis Π von Φ:

$$\beta_{12}, \beta_{23}, \ldots, \beta_{n-1,n}, \alpha_n$$

Es gilt nämlich: $\beta_{ij} = \beta_{i,i+1} + \cdots + \beta_{j-1,j}$ für $i < j$, $\alpha_i = \beta_{in} + \alpha_n$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $\gamma_{ij} = \alpha_i + \alpha_j$ für $i < j <$ Wir berechnen jetzt die Cartanmatrix $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ von L bezüglich Π:

- $\beta_{n-1,n}$-Kette durch α_n: $\alpha_n, \alpha_{n-1} \Rightarrow A_{n-1,n} = -1$
- α_n-Kette durch $\beta_{n-1,n}$: $\beta_{n-1,n}, \alpha_{n-1}, \gamma_{n-1,n} \Rightarrow A_{n,n-1} = -2$
- $\beta_{n-2,n-1}$-Kette durch $\beta_{n-1,n}$: $\beta_{n-1,n}, \beta_{n-2,n-1} \Rightarrow A_{n-2,n-1} = -1$

- $\beta_{n-1,n}$-Kette durch $\beta_{n-2,n-1}$: $\beta_{n-2,n-1}, \beta_{n-2,n} \Rightarrow A_{n-1,n-2} = -1$

Man erhält also eine Cartanmatrix und ein Dynkindiagramm vom Typ B_n. Insbesondere ist o_{2n+1} für $n \in \mathbb{N}$ eine einfache Lie-Algebra.

Satz
Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to \mathbb{C}$ eine Bilinearform. Dann ist

$$L := \{f \in \mathrm{gl}(V) \colon \beta(f(v), w) = -\beta(v, f(w))\,\forall v, w \in V\} \subseteq \mathrm{gl}(V)$$

eine Unteralgebra.

Beweis:
Offenbar ist $L \subseteq \mathrm{gl}(V)$ ein Untervektorraum. Wegen

$$\begin{aligned}\beta([f,g](v), w) &= \beta((f(g(v)), w) - \beta(g(f(v)), w) = -\beta(g(v), f(w)) + \beta(f(v), g(w))\\ &= \beta(v, g(f(w))) - \beta(v, f(g(w))) = -\beta(v, [f,g](w))\end{aligned}$$

für $f, g \in L, v, w \in V$ ist auch $[f,g] \in L$. ■

Bemerkung
Sei $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V und $\beta_{ij} := \beta(b_i, b_j)$ für $i, j = 1, \dots, n$, d. h. $B := (\beta_{ij})$ ist die Matrix von β bezüglich $b_1, \dots, b_n$. Sei $f \in \mathrm{gl}(V)$ und $f(b_j) := \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i$ mit $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$ für $i, j = 1, \dots, n$, d. h. $A := (\alpha_{ij})$ ist die Matrix von f bezüglich $b_1, \dots, b_n$. Für $j, k = 1, \dots, n$ gilt dann:

$$\begin{aligned}\beta(f(b_j), b_k) &= \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}\beta(b_i, b_k) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}\beta_{ik}\\ \beta(b_j, f(b_k)) &= \sum_{i=1}^n \alpha_{ik}\beta(b_j, b_i) = \sum_{i=1}^n \beta_{ji}\alpha_{ik}\end{aligned}$$

Daher ist $f \in L \Leftrightarrow A^T B = -BA$

Beispiel
Im folgenden sei β nicht ausgeartet, d. h. $\det B \neq 0$.

(i) Sei β **symplektisch**, d. h. $\beta(v, v) = 0$ für alle $v \in V$. Dann gilt für alle $x, y \in V$:

$$0 = \beta(x + y, x + y) = \beta(x, x) + \beta(y, y) + \beta(y, x) + \beta(x, y) \Rightarrow \beta(y, x) = -\beta(x, y)$$

Man zeigt leicht, dass eine Basis (**symplektische Basis**) $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m$ von V existiert, bezüglich der die Matrix B von β die folgende Form hat:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ -1_m & 0 \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist $n := \dim V = 2m$ gerade. Für $A = \begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix} \in \mathrm{gl}_n$ mit $W, X, Y, Z \in \mathrm{gl}_m$ gilt dann:

$$\begin{aligned} A^T B &= \begin{pmatrix} W^T & Y^T \\ X^T & Z^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ -1_m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Y^T & W^T \\ -Z^T & X^T \end{pmatrix}, \\ -BA &= \begin{pmatrix} 0 & -1_m \\ 1_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Y & -Z \\ W & X \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daher gilt: $A^T B = -BA \Leftrightarrow Y^T = Y, X^T = X, W = -Z^T$. Dies zeigt dass, sp_{2m} aus den Matrizen der Elemente in L bezüglich $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m$ besteht.

(ii) Sei β symmetrisch und $n = 2m$ gerade. Man zeigt leicht, dass man die Basis $b_1, \dots, b_n$ so wählen kann, dass gilt:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ 1_m & 0 \end{pmatrix}$$

Für $A = \begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix} \in \mathrm{gl}_n$ mit $W, X, Y, Z \in \mathrm{gl}_m$ gilt dann:

$$\begin{aligned} A^T B &= \begin{pmatrix} W^T & Y^T \\ X^T & Z^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ 1_m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^T & W^T \\ Z^T & X^T \end{pmatrix}, \\ -BA &= \begin{pmatrix} 0 & -1_m \\ -1_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Y & -Z \\ -W & -X \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daher gilt: $A^T B = -BA \Leftrightarrow Y^T = -Y, X^T = -X, W = -Z^T$. Dies zeigt, dass o_{2m} genau aus den Matrizen der Elemente in L bezüglich $b_1, \dots, b_n$ besteht.

(iii) Sei β symmetrisch und $n = 2m + 1$ ungerade. Man zeigt leicht, dass man die Basis $b_1, \dots, b_n$ so wählen kann, dass gilt:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_m \\ 0 & 1_m & 0 \end{pmatrix}$$

Für $A = \begin{pmatrix} a & u & v \\ w & W & X \\ x & Y & Z \end{pmatrix} \in \mathrm{gl}_n$ mit $a \in \mathbb{C}, u, v, w^T, x^T \in \mathbb{C}^m, W, X, Y, Z \in \mathrm{gl}_m$ gilt dann:

$$\begin{aligned} A^T B &= \begin{pmatrix} a & w^T & x^T \\ u^T & W^T & Y^T \\ v^T & X^T & Z^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_m \\ 0 & 1_m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & x^T & w^T \\ u^T & Y^T & W^T \\ v^T & Z^T & X^T \end{pmatrix} \\ -BA &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1_m \\ 0 & -1_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & u & v \\ w & W & X \\ x & Y & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -u & -v \\ -x & -Y & -Z \\ -w & -W & -X \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daher gilt: $A^T B = -BA \Leftrightarrow a = 0, x = -u^T, w = -v^T, Y^T = -Y, X^T = -X, W = -Z^T$. Dies zeigt, dass o_{2m+1} genau aus den Matrizen der Elemente in L bezüglich $b_1, \ldots, b_n$ besteht.

Satz 9.2
Für $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in L := \mathrm{gl}_n$ gilt: $\kappa_L(x,y) = 2n \operatorname{Spur}(xy) - 2 \operatorname{Spur}(x) \operatorname{Spur}(y)$.

BEWEIS:
Sei e_{ij} mit $i, j = 1, \ldots, n$ die Standardbasis von gl_n. Schreibe

$$x = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_{ij} e_{ij}, y = \sum_{i,j=1}^{n} \eta_{ij} e_{ij}$$

mit $\xi_{ij}, \eta_{ij} \in \mathbb{C}$ für alle i, j. Dann gilt für $r, s = 1, \ldots, n$:

$$[y, e_{rs}] = \sum_{k,l=1}^{n} \eta_{kl} e_{kl} e_{rs} - \sum_{k,l=1}^{n} \eta_{kl} e_{rs} e_{kl} = \sum_{k,l=1}^{n} \eta_{kr} e_{ks} - \sum_{k,l=1}^{n} \eta_{sl} e_{rl}$$

und

$$\begin{aligned}
[x, [y, e_{rs}]] &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \xi_{ij} \eta_{kr} e_{ij} e_{ks} - \sum_{i,j,l=1}^{n} \xi_{ij} \eta_{sl} e_{ij} e_{rl} - \sum_{i,j,k=1}^{n} \xi_{ij} \eta_{kr} e_{ks} e_{ij} + \sum_{i,j,l=1}^{n} \xi_{ij} \eta_{sl} e_{rl} e_{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_{ij} \eta_{jr} e_{is} - \sum_{i,l=1}^{n} \xi_{ir} \eta_{sl} e_{il} - \sum_{j,k=1}^{n} \xi_{sj} \eta_{kr} e_{kj} + \sum_{i,j=1}^{n} \xi_{ij} \eta_{si} e_{rj}
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
\kappa_L(x,y) &= \operatorname{Spur}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y) \\
&= \sum_{r,s=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_{rj} \eta_{jr} - \xi_{rr} \eta_{ss} - \xi_{ss} \eta_{rr} + \sum_{i=1}^{n} \xi_{is} \eta_{si} \right) \\
&= 2n \operatorname{Spur}(xy) - 2 \operatorname{Spur}(x) \operatorname{Spur}(y)
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 9.3
Für $x, y \in L' = \mathrm{sl}_n$ gilt also: $\kappa_{L'}(x,y) = \kappa_L(x,y) = 2n \operatorname{Spur}(xy)$.

10 Die Ausnahme-Lie-Algebren

Bemerkung 10.1
Seien L eine halbeinfache Lie-Algebra, V ein L-Modul und V^* der zu V duale L-Modul, d. h. $(af)(v) := -f(av)$ für $a \in L, v \in V, f \in V^*$. Für $v \in V$ und $f \in V^*$ ist die Abbildung $L \to \mathbb{C}, a \mapsto f(av)$ linear. Daher existiert genau ein Element $f \bullet v \in L$ mit $f(av) = \kappa_L(f \bullet v, a)$ für alle $a \in L$.

Man rechnet leicht nach, dass die folgende Abbildung bilinear ist: $V^* \times V \to L, (f, v) \mapsto f \bullet v$. Gegeben seien außerdem alternierende Trilinearformen:

$$V \times V \times V \to \mathbb{C}, (u, v, w) \mapsto \langle u, v, a\rangle$$
$$V^* \times V^* \times V^* \to \mathbb{C}, (f, g, h) \mapsto \langle f, g, h\rangle$$

derart, dass für alle $u, v, w \in V, f, g, h \in V^*, a \in L$ gilt:

$$\langle au, v, w\rangle + \langle u, av, w\rangle + \langle u, v, aw\rangle = 0$$
$$\langle af, g, h\rangle + \langle f, ag, h\rangle + \langle f, g, ah\rangle = 0$$

Dies bedeutet, dass für alle $u, v, w \in V$ gilt: $\langle u, u, v\rangle = 0, = \langle u, v, v\rangle, \langle u, v, w\rangle = -\langle v, u, w\rangle = -\langle u, w, v\rangle$. (Entsprechend für die andere Trilinearform)

Für $u, v \in V$ sei $u \times v \in V^*$ definiert durch $(u \times v)(w) := \langle u, v, w\rangle$ für $w \in V$ und für $f, g \in V^*$ sei $f \times g \in V$ definiert durch $h(f \times g) = \langle f, g, h\rangle$ für $h \in V^*$. Offenbar sind die Abbildungen

$$V \times V \to V^*, (u, v) \mapsto u \times v$$
$$V^* \times V^* \to V, (f, g) \mapsto f \times g$$

bilinear und alternierend. Wir setzen zusätzlich voraus:

$$(u \times v)(f \times g) = \kappa_L(f \bullet v, g \bullet u) - \kappa_L(f \bullet u, g \bullet v)$$

für alle $u, v \in V, f, g \in V^*$.

Dann setzen wir die Lie-Klammer von L bilinear fort auf

$$L \oplus V \oplus V^* = \{a + v + f : a \in L, v \in V, f \in V^*\}$$

durch:

$$[a, v] := -[v, a] := av \qquad [a, f] := -[f, a] := af$$
$$[v, w] := v \times w \qquad [f, g] := f \times g$$
$$[f, v] = -[v, f] := f \bullet v$$

Satz
$L \oplus V \oplus V^*$ wird so zu einer Lie-Algebra.

BEWEIS:
Offensichtlich ist [,] bilinear mit $[x,x] = 0$ für alle $x \in L \oplus V \oplus V^*$. Daher genügt zu zeigen:

$$[[x,y],z] + [[y,z]x] + [[z,x],y] = 0 \qquad x,y,z \in L \oplus V \oplus V^*$$

Wegen der Bilinearität der Lie-Klammer können wir annehmen, dass $x,y,z \in L \cup V \cup V^*$ liegt. Für $x,y,z \in L$ ist alles klar.

Wir betrachten als nächstes den Fall, dass zwei der Elemente x,y,z in L sind. Für $a,b \in L, v \in V$ gilt:

$$[[a,b],v] + [[b,v],a] + [[v,a],b] = [a,b]v + [bv,a] - [av,b] = [a,b]v - a(bv) + b(av) = 0.$$

Analog gilt für $a,b \in L$, $f \in V^*$:

$$[[a,b],f] + [[b,f],a] + [[f,a],b] = [a,b]f + [bf,a] - [af,b] = [a,b]f - a(bf) + b(af) = 0.$$

Als nächstes betrachten wir den Fall, dass genau eins der Elemente x,y,z in L liegt. Für $a \in L, v,w \in V$ gilt:

$$\begin{aligned}[][[a,v],w] + [[v,w],a] + [[w,a],v] &= [av,w] + [v \times w, a] - [aw,v] \\ &= (av) \times w - a(v \times w) - (aw) \times v = 0;\end{aligned}$$

denn für $u \in V$ gilt:

$$\begin{aligned}((av) \times w)(u) - (a(v \times w))(u) - ((aw) \times v)(u) &= \langle av,w,u\rangle + \underbrace{(v \times w)(au)}_{\langle v,w,au\rangle} - \langle aw,v,u\rangle \\ &= \langle av,w,u\rangle + \langle v,w,au\rangle + \langle v,aw,u\rangle = 0\end{aligned}$$

Analog gilt für $a \in L$, $f,g \in V^*$:

$$\begin{aligned}[][[a,f],g] + [[f,g],a] + [[g,a],f] &= [af,g] + [f \times g, a] - [ag,f] \\ &= (af) \times g - a(f \times g) - (ag) \times f = 0\end{aligned}$$

denn für $h \in V^*$ gilt:

$$\begin{aligned}h((af) \times g) - h(a(f \times g)) - h((ag) \times f) &= \langle af,g,h\rangle + \underbrace{(ah)(f \times g)}_{\langle f,g,ah\rangle} - \langle ag,f,h\rangle \\ &= \langle af,g,h\rangle + \langle f,g,ah\rangle + \langle f,ag,h\rangle = 0\end{aligned}$$

Für $a \in L, v \in V, f \in V^*$ gilt:

$$\begin{aligned}[][[a,v],f] + [[v,f],a] + [[f,a],v] &= [av,f] - [f \bullet v, a] - [af,v] \\ &= -f \bullet (av) - [f \bullet v, a] - (af) \bullet v = 0;\end{aligned}$$

denn für $b \in L$ gilt:

$$\begin{aligned}\kappa_L(f \bullet (av), b) + \kappa_L([f \bullet v, a], b) + \kappa_L((af) \bullet v, b) &= f(b(av)) + \underbrace{\kappa_L(f \bullet v, [a,b])}_{f([a,b]v)} + (af)(bv) \\ &= f(b(av)) + f([a,b]v) - f(a(bv)) = 0.\end{aligned}$$

Oben wird die Assoziativität der Killingform ausgenutzt (siehe Bemerkung 6.2). Der Fall, dass zunächst ein Element aus L mit einem aus V^* und dann mit einem aus V geklammert wird, können wir weglassen. Denn das entspricht im wesentlichen dem obigen Fall. Man handelt sich nur zusätzliche Minuszeichen ein.

Im folgenden können wir annehmen, dass $x, y, z \in V \cup V^*$ gilt. Für $v, w \in V$, $f \in V^*$ gilt:

$$\begin{aligned}[[v,w], f] + [[w,f], v] + [[f,v], w] &= [v \times w, f] - [f \bullet w, v] + [f \bullet v, w] \\ &= (v \times w) \times f - (f \bullet w)v + (f \bullet v)w = 0;\end{aligned}$$

denn für $h \in V^*$ gilt:

$$\begin{aligned}h((v \times w) \times f) - h((f \bullet w)v) + h((f \bullet v)w) &= \langle v \times w, f, h\rangle - \kappa_L(h \bullet v, f \bullet w) + \kappa_L(h \bullet w, f \bullet v) \\ &= \langle f, h, v \times w\rangle - (v \times w)(h \times f) = 0.\end{aligned}$$

Analog gilt für $f, g \in V^*, v \in V$:

$$\begin{aligned}[[f,g], v] + [[g,v], f] + [[v,f], g] &= [f \times g, v] + [g \bullet v, f] - [f \bullet v, g] \\ &= (f \times g) \times v + (g \bullet v)f - (f \bullet v)g = 0;\end{aligned}$$

denn für $w \in V$ gilt:

$$\begin{aligned}((f \times g) \times v)(w) + ((g \bullet v)f)(w) - ((f \bullet v)g)(w) &= \langle f \times g, v, w\rangle - f((g \bullet v)w) + g((f \bullet v)w) \\ &= \langle v, w, f \times g\rangle - \kappa_L(f \bullet w, g \bullet v) + \kappa_L(g \bullet w, f \bullet v) \\ &= (v \times w)(f \times g) - (v \times w)(f \times g) = 0.\end{aligned}$$

Für $u, v, w \in V$ gilt:

$$\begin{aligned}[[u,v], w] + [[v,w], u] + [[w,u], v] &= [u \times v, w] + [v \times w, u] + [w \times u, v] \\ &= (u \times v) \bullet w + (v \times w) \bullet u + (w \times u) \bullet v = 0;\end{aligned}$$

denn für $a \in L$ gilt:

$$\begin{aligned}\kappa_L((u \times v) \bullet w, a) + \kappa_L((v \times w) \bullet u, a) + \kappa_L((w \times u) \bullet v, a) &= (u \times v)(aw) + (v \times w)(au) + (w \times u)(av) \\ &= \langle u, v, aw\rangle + \underbrace{\langle v, w, au\rangle}_{=\langle au, v, w\rangle} + \underbrace{\langle w, u, av\rangle}_{=\langle u, av, w\rangle} = 0.\end{aligned}$$

Analog gilt für alle $f, g, h \in V^*$:

$$\begin{aligned}[[f,g], h] + [[g,h], f] + [[h,f], g] &= [f \times g, h] + [g \times h, f] + [h \times f, g] \\ &= -h \bullet (f \times g) - f \bullet (g \times h) - g \bullet (h \times f) = 0\end{aligned}$$

denn für $a \in L$ gilt:

$$\begin{aligned}
\kappa_L(h \bullet (f \times g), a) + \kappa_L(f \bullet (g \times h), a) + \kappa_L(g \bullet (h \times f), a) &= h(a(f \times g)) + f(a(g \times h)) + g(a(h \times f)) \\
&= -(ah)(f \times g) - (af)(g \times h) - (ag)(h \times f) \\
&= -\langle f, g, ah\rangle - \langle g, h, af\rangle - \langle h, f, ag\rangle \\
&= -\langle f, g, ah\rangle - \langle af, g, h\rangle - \langle f, ag, h\rangle = 0 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Beispiel

Seien $L := \mathrm{sl}_3$ und $V := \mathbb{C}^3$, betrachtet als L-Modul bezüglich der Matrixmultiplikation. Also $\dim L \oplus V \oplus V^* = 14$. Weiter sei e_1, e_2, e_3 die kanonische Basis von V und es sei e_1^*, e_2^*, e_3^* die dazu duale Basis von V^*. Seien $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}, v := \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3, f := \lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^* + \lambda_3 e_3^* \in V^*, \alpha_{ij} := \tfrac{1}{6}\xi_i\lambda_j - \tfrac{1}{18}\delta_{ij} f(v) \in \mathbb{C}$ und $a := (\alpha_{ij}) \in \mathrm{sl}_3$. Dann gilt:

$$6\,\mathrm{Spur}(a) = \sum_{i=1}^{3} \xi_i\lambda_i - f(v) = 0$$

Damit gilt $a \in \mathrm{sl}_3 = L$ und für $b = (\beta_{ij}) \in L$ gilt nach Bemerkung 9.3:

$$\begin{aligned}
\kappa_L(a, b) = 6\,\mathrm{Spur}(ab) = 6 \sum_{i,j=1}^{3} \alpha_{ij}\beta_{ji} &= \sum_{i,j=1}^{3} \xi_i\lambda_j\beta_{ji} - \tfrac{1}{3} f(v) \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \beta_{ii}}_{=0} \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{3} \xi_i\beta_{ji}\lambda_k e_k^*(e_j) \\
&= f(\sum_{i,j=1}^{3} \xi_i\beta_{ji}e_j) = f(\sum_{i=1}^{3} \xi_i b e_i) = f(bv).
\end{aligned}$$

Daher ist

$$f \bullet v = a = \tfrac{1}{6}\xi_i\lambda_j - \tfrac{1}{18}\delta_{ij} f(v) \in L.$$

Für $g = \mu_1 e_1^* + \mu_2 e_2^* + \mu_3 e_3^* \in V^*$ und $w = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \eta_3 e_3 \in V$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\kappa_L(f \bullet v, g \bullet w) = 6\,\mathrm{Spur}((f \bullet v)(g \bullet w)) &= \tfrac{1}{6} \sum_{i,j=1}^{3} (\xi_i\lambda_j - \tfrac{1}{3}\delta_{ij} f(v))(\eta_j\mu_i - \tfrac{1}{3}\delta_{ij} g(w)) \\
&= \tfrac{1}{6} \sum_{i,j=1}^{3} \xi_i\lambda_j\eta_j\mu_i - \tfrac{1}{18} g(w) \sum_{i=1}^{3} \xi_i\lambda_i - \tfrac{1}{18} f(v) \sum_{i=1}^{3} \eta_i\mu_i + \tfrac{1}{18} f(v)g(w) \\
&= \tfrac{1}{6} g(v) f(w) - \tfrac{1}{18} g(w) f(v) - \tfrac{1}{18} f(v) g(w) + \tfrac{1}{18} f(v) g(w) \\
&= \tfrac{1}{6} f(w) g(v) - \tfrac{1}{18} g(w) f(v).
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\kappa_L(f \bullet w, g \bullet v) - \kappa_L(f \bullet v, g \bullet w) &= {}^1\!/_6 f(v)g(w) - {}^1\!/_{18} g(v)f(w) - {}^1\!/_6 f(w)g(v) + {}^1\!/_{18} f(v)g(w)\\ &= {}^2\!/_9 f(v)g(w) - {}^2\!/_9 f(w)g(v)\end{aligned}$$

Für $v = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3, w = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \eta_3 e_3, u = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \zeta_3 e_3 \in V$ setzen wir $\langle v, w, u\rangle := \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}$. Wir erhalten so eine alternierende Trilinearform $V \times V \times V \to \mathbb{C}$. Wir zeigen, dass für $a = (\alpha_{ij}) \in L$ und $i, j, k = 1, 2, 3$ gilt: $\langle ae_i, e_j, e_k\rangle + \langle e_i, ae_j, e_k\rangle + \langle e_i, e_j, ae_k\rangle = 0$. Dabei kann man voraussetzen, dass i, j, k paarweise verschieden sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\langle ae_i, e_j, e_k\rangle + \langle e_i, ae_j, e_k\rangle + \langle e_i, e_j, ae_k\rangle &= \sum_{r=1}^{3} \alpha_{ri}\langle e_r, e_j, e_k\rangle + \sum_{r=1}^{3} \alpha_{rj}\langle e_i, e_r, e_k\rangle + \sum_{r=1}^{3} \alpha_{rk}\langle e_i, e_j, e_r\rangle\\ &= \alpha_{ii}\langle e_i, e_j, e_k\rangle + \alpha_{jj}\langle e_i, e_j, e_k\rangle + \alpha_{kk}\langle e_i, e_j, e_k\rangle\\ &= \operatorname{Spur}(a)\langle e_i, e_j, e_k\rangle = 0.\end{aligned}$$

Analog erhalten wir eine alternierende Trilinearform auf V^* durch:

$$\langle f, g, h\rangle := \frac{2}{9}\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} \text{ für}$$

$$\begin{aligned} f &= \xi_1 e_1^* + \xi_2 e_2^* + \xi_3 e_3^* \\ g &= \eta_1 e_1^* + \eta_2 e_2^* + \eta_3 e_3^* \qquad f, g, h \in V^* \\ h &= \zeta_1 e_1^* + \zeta_2 e_2^* + \zeta_3 e_3^* \end{aligned}$$

Man zeigt auch, dass $\langle af, g, h\rangle + \langle f, ag, h\rangle + \langle f, g, ah\rangle = 0$ für alle $a \in L$ gilt.

Seien $v = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3, w = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \eta_3 e_3 \in V$ und $f := \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(3)} (\operatorname{sgn}\sigma)\xi_{\sigma(1)}\eta_{\sigma(2)} e^*_{\sigma(3)} \in V^*$. Für $u = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \zeta_3 e_3 \in V$ gilt dann:

$$f(u) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(3)} (\operatorname{sgn}\sigma)\xi_{\sigma(1)}\eta_{\sigma(2)}\zeta_{\sigma(3)} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} = \langle v, w, u\rangle$$

Daher ist $v \times w = f = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(3)} (\operatorname{sgn}\sigma)\xi_{\sigma(1)}\eta_{\sigma(2)} e^*_{\sigma(3)}$. Analog zeigt man, dass für $f = \lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^* + \lambda_3 e_3^*, g = \mu_1 e_1^* + \mu_2 e_2^* + \mu_3 e_3^* \in V^*$ gilt:

$$f \times g = \frac{2}{9} \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(3)} (\operatorname{sgn}\sigma)\lambda_{\sigma(1)}\mu_{\sigma(2)} e_{\sigma(3)}$$

Schließlich ist

$$
\begin{aligned}
(v \times w)(f \times g) &= \frac{2}{9} \sum_{\sigma,\tau \in \mathrm{Sym}(3)} (\operatorname{sgn} \sigma)(\operatorname{sgn} \tau) \xi_{\sigma(1)} \eta_{\sigma(2)} \lambda_{\tau(1)} \mu_{\tau(2)} e^*_{\sigma(3)}(e_{\tau(3)}) \\
&= \frac{2}{9} \sum_{\substack{\sigma,\tau \in \mathrm{Sym}(3) \\ \sigma(3)=\tau(3)}} (\operatorname{sgn} \sigma)(\operatorname{sgn} \tau) \xi_{\sigma(1)} \eta_{\sigma(2)} \lambda_{\tau(1)} \mu_{\tau(2)} \\
&= \frac{2}{9} \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(3)} \xi_{\sigma(1)} \eta_{\sigma(2)} \lambda_{\sigma(1)} \mu_{\sigma(2)} - \frac{2}{9} \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(3)} \xi_{\sigma(1)} \eta_{\sigma(2)} \lambda_{\sigma(2)} \mu_{\sigma(1)} \\
&= \frac{2}{9} f(v) g(w) - \frac{2}{9} g(v) f(w) = \kappa_L(f \bullet w, g \bullet v) - \kappa_L(f \bullet v, g \bullet w)
\end{aligned}
$$

Aus dem Satz folgt also, dass $L \oplus V \oplus V^*$ eine Lie-Algebra ist. Wir werden zeigen, dass sie einfach vom Typ G_2 ist

Satz 10.2
Sei H eine kommutative Cartanalgebra einer Lie-Algebra L und Φ das entsprechende Wurzelsystem. Ferner gelte:

(i) Für $\alpha \in \Phi$ ist $\dim L_\alpha(H) = 1, -\alpha \in \Phi$ und $[L_\alpha(H), L_{-\alpha}(H)] \neq 0$.

(ii) Für $h \in H$ existiert $\overline{h} \in H$ mit $\alpha(\overline{h}) = \overline{\alpha(h)}$ für alle $\alpha \in \Phi$.

(iii) Ist $h \in H$ mit $\alpha(h) = 0$ für alle $\alpha \in \Phi$, so ist $h = 0$.

Dann ist die Lie-Algebra L halbeinfach.

BEWEIS:
Wir nehmen das Gegenteil an. Nach Cartan ist κ_L ausgeartet, d. h. es gibt einen Vektor, der auf allen senkrecht steht. Sei $0 \neq a \in L^\perp$. Schreibe $L_\alpha(H) = \mathbb{C} e_\alpha$ für $\alpha \in \Phi$ und $a = h + \sum_{\alpha \in \Phi} c_\alpha e_\alpha$ mit $h \in H, c_\alpha \in \mathbb{C}$ für $\alpha \in \Phi$. Für $h' \in H, c'_\alpha \in \mathbb{C}$ für $\alpha \in \Phi$ und $a' := h' + \sum_{\alpha \in \Phi} c'_\alpha e_\alpha \in L$ gilt nach den Sätzen Satz 6.3 und Satz 6.11:

$$
\begin{aligned}
0 = \kappa_L(a, a') = \kappa_L(h, h') + \sum_{\alpha \in \Phi} c_\alpha c'_{-\alpha} \kappa_L(e_\alpha, e_{-\alpha}) \\
= \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(h) \alpha(h') + \sum_{\alpha \in \Phi} c_\alpha c'_{-\alpha} \kappa_L(e_\alpha, e_{-\alpha}).
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist $0 = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(h) \alpha(\overline{h}) = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(h) \overline{\alpha(h)}$, d. h. $\alpha(h) = 0$ für alle $\alpha \in \Phi$. Wegen (iii) folgt $h = 0$. Somit hat a die Darstellung $a = \sum_{\alpha \in \Phi} c_\alpha e_\alpha$ (nach der obigen Festlegung). Folglich ist $0 = \sum_{\alpha \in \Phi} c_\alpha c'_\alpha \kappa_L(e_\alpha, e_{-\alpha})$ für alle $c'_\alpha \in \mathbb{C}$. Sei $\beta \in \Phi$ mit $c_\beta \neq 0$. Dann ist $\kappa_L(e_\beta, e_{-\beta}) = 0$, also $e_\beta \in L^\perp$ nach Satz 6.3. Da $L^\perp \subseteq L$ ein Ideal ist, enthält $L^\perp$ auch das Element $[e_\beta, e_{-\beta}] \in H \setminus \{0\}$ nach der Bedingung (i). Wir haben bereits gesehen, dass dies nicht geht.↯

■

Beispiel (Fortsetzung des obigen Beispiels)
Sei $L := \mathrm{sl}_3, V := \mathbb{C}^3$. Dann bilden die Diagonalmatrizen eine Cartanalgebra $H \subseteq L$. Wir wollen zeigen, dass H auch eine Cartanalgebra von $L \oplus V \oplus V^*$ ist. Sei $x = a + v + f \in N_{L\oplus V\oplus V^*}(H)$ mit $a \in L, v \in V, f \in V^*$. Für $h \in H$ gilt:

$$H \ni [h,x] = \underbrace{[h,a]}_{\in L} + \underbrace{[h,v]}_{hv\in V} + \underbrace{[h,f]}_{hf\in V^*}$$

d. h. $hv = 0$ und $hf = 0$ für alle $h \in H$. Daraus folgt leicht: $v = 0, f = 0$, d. h. $x = a \in N_L(H) = H$. Dies zeigt, dass H eine Cartanalgebra von $L \oplus V \oplus V^*$ ist.

Als nächstes bestimen wir die Cartanzerlegung von $L \oplus V \oplus V^*$ bezüglich H. Wir wissen, dass L die folgenden Wurzeln mit den entsprechenden Wurzelräumen bezüglich H hat:

$$\begin{array}{ll} \alpha_{12}\colon H \to \mathbb{C}, \mathrm{diag}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \mapsto \xi_1 - \xi_2 & \mathbb{C}e_{12} \\ \alpha_{13}\colon H \to \mathbb{C}, \mathrm{diag}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \mapsto \xi_1 - \xi_3 = 2\xi_1 + \xi_2 & \mathbb{C}e_{13} \\ \alpha_{23}\colon H \to \mathbb{C}, \mathrm{diag}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \mapsto \xi_2 - \xi_3 = \xi_1 + 2\xi_2 & \mathbb{C}e_{23} \end{array}$$

sowie $-\alpha_{12}, -\alpha_{13}, -\alpha_{23}$ mit Wurzelräumen $\mathbb{C}e_{21}, \mathbb{C}e_{31}, \mathbb{C}e_{32}$. Offenbar ist $\mathbb{C}e_1 \subseteq V$ im Wurzelraum von $l\oplus V\oplus V^*$ zur Wurzel $\beta_1\colon H \to \mathbb{C}, \mathrm{diag}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \mapsto \xi_1$ enthalten. Analog ist $\mathbb{C}e_2$ im Wurzelraum zur Wurzel $\beta_2\colon H \to \mathbb{C}, \mathrm{diag}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \mapsto \xi_2$ enthalten und $\mathbb{C}e_3$ ist enthalten im Wurzelraum zur Wurzel $\beta_3\colon H \to \mathbb{C}, \mathrm{diag}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \mapsto \xi_3 = -\xi_1 - \xi_2$. Man überlegt sich leicht, dass analog der Untervektorraum $\mathbb{C}e_i^* \subseteq V^*$ für $i = 1,2,3$ im Wurzelraum zur Wurzel $-\beta_i$ enthalten ist. Damit haben wir die Cartanzerlegung und das Wurzelsystem bestimmt. Alle Wurzelräume sind eindimensional. Nach dem ersten Beispiel im Kapitel ist $e_i^* \bullet e_i \neq 0$. NachSatz 10.2 ist also $L \oplus V \oplus V^*$ halbeinfach.

Ferner ist $\Pi := \{\alpha_{12}, \beta_2\}$ eine Basis von Φ. Denn es gilt:

$$\begin{array}{rlrl} \alpha_{13} &= 2\alpha_{12} + 3\beta_2 & \alpha_{23} &= \alpha_{12} + 3\beta_2 \\ \beta_1 &= \alpha_{12} + \beta_2 & -\beta_3 &= \alpha_{12} + 2\beta_2 \end{array}$$

Schließlich berechnen wir die Cartanmatrix $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ von $L \oplus V \oplus V^*$ bezüglich $\Pi = \{\alpha_{12}, \beta_2\}$. Die α_{12}-Kette durch β_2: $\beta_2, \beta_1 \Rightarrow A_{12} = -1$, β_2-Kette durch α_{12}: $\alpha_{12}, \beta_1, -\beta_3, \alpha_{23} \Rightarrow A_{21} = -3$. Damit ist gezeigt, dass $L \oplus V \oplus V^*$ eine einfache Lie-Algebra vom Typ G_2 ist. Wir haben gesehen: $\dim G_2 = 14, |\Phi| = 12$.

Bemerkung 10.3
Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension $n < \infty$. In der linearen Algebra konstruiert man für $k \in \mathbb{N}$ einen Vektorraum $\bigwedge^k V = V \wedge \cdots \wedge V$ (k Faktoren) der Dimension $\binom{n}{k}$ und eine multilineare alternierende Abbildung:

$$f\colon V^k = V \times \ldots \times V \to \bigwedge^k V, (v_1, \ldots, v_k) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$$

mit der folgenden „universellen" Eigenschaft: Zu jedem $\mathbb{C}$-Vektorraum W und jeder multilinearen alternierenden Abbildung $g\colon V^k \to W$ existiert genau eine lineare Abbildung $h\colon \bigwedge^k V \to W$ mit $g = h \circ f$:

$$\begin{tikzcd} V^k \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & \bigwedge^k V \arrow[dl, dotted, "h"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

Man zeigt ferner, dass für jede Basis $b_1, \dots, b_n$ von V die Elemente $b_{i_1} \wedge \cdots \wedge b_{i_k}$ mit $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ eine Basis von $\bigwedge^k V$ bilden. Jedes Element in $\bigwedge^k V$ lässt sich also als Summe von Elementen der Form $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ schreiben. Aber i. A. lässt sich *nicht* jedes Element in $\bigwedge^k V$ in der Form $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ mit $v_1, \dots, v_k \in V$ schreiben. $\bigwedge^k V$ heißt k-te **äußere Potenz** von V.

Satz
Für jede Lie-Algebra L und jeden L-Modul M ist auch $M \wedge M \wedge M$ ein L-Modul mit

$$a(x \wedge y \wedge z) = ax \wedge y \wedge z + x \wedge ay \wedge z + x \wedge y \wedge az \qquad \text{für } a \in L, x, y, z \in M$$

Beweis:
Für $a \in L$ ist die Abbildung $M^3 \to \bigwedge^3 M, (x, y, z) \mapsto ax \wedge y \wedge z + x \wedge ay \wedge z + x \wedge y \wedge az$ trilinear und alternierend. Daher existiert genau eine lineare Abbildung $\varphi_a\colon \bigwedge^3 M \to \bigwedge^3 M$ mit $\varphi_a(x \wedge y \wedge z) = ax \wedge y \wedge z + x \wedge ay \wedge z + x \wedge y \wedge az$ für $x, y, z \in M$. Man sieht leicht, dass die Abbildung $L \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\bigwedge^3 M), a \mapsto \varphi_a$ linear ist. Daher ist die Abbildung $L \times \bigwedge^3 M \to \bigwedge^3 M, (a, v) \mapsto av := \varphi_a(v)$ bilinear mit $a(x \wedge y \wedge z) = ax \wedge y \wedge z + x \wedge ay \wedge z + x \wedge y \wedge az$ für alle $a \in L, x, y, z \in M$. Ferner gilt für alle $a, b \in L, x, y, z \in M$:

$$\begin{aligned} a(b(x \wedge y \wedge z)) - b(a(x \wedge y \wedge z)) &= a(bx \wedge y \wedge z + x \wedge by \wedge z + x \wedge y \wedge bz) \\ &\quad - b(ax \wedge y \wedge z + x \wedge ay \wedge z + x \wedge y \wedge az) \\ &= a(bx) \wedge y \wedge z + bx \wedge ay \wedge z + bx \wedge y \wedge z + ax \wedge by \wedge z \\ &\quad + x \wedge a(by) \wedge z + x \wedge by \wedge az + ax \wedge y \wedge bz + x \wedge ay \wedge bz \\ &\quad + x \wedge y \wedge a(bz) - b(ax) \wedge y \wedge z - ax \wedge by \wedge z - ax \wedge y \wedge bz \\ &\quad - bx \wedge ay \wedge z - x \wedge b(ay) \wedge z - x \wedge ay \wedge bz - bx \wedge y \wedge az \\ &\quad - x \wedge by \wedge az - x \wedge y \wedge b(az) \\ &= a(bx) \wedge y \wedge z + x \wedge a(by) \wedge z + x \wedge y \wedge a(bz) - b(ax) \wedge y \wedge z \\ &\quad - x \wedge b(ay) \wedge -x \wedge y \wedge b(az) \\ &= [a, b]x \wedge y \wedge z + x \wedge [a, b]y \wedge z + x \wedge y \wedge [a, b]z \\ &= [a, b](x \wedge y \wedge z) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\bigwedge^3 M$ ein L-Modul ist. ∎

Bemerkung 10.4
Im obigen Satz sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von M. Dann bilden die Elemente $e_i \wedge e_j \wedge e_k$ mit $1 \leq i < j < k \leq n$ eine Basis von $\bigwedge^3 M$. Sei $a \in L$ und $ae_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i$ mit $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$ für alle i, j. Außerdem sei $v = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \xi_{ijk} e_i \wedge e_j \wedge e_k \in \bigwedge^3 M$ mit $\xi_{ijk} \in \mathbb{C}$ für alle i, j, k. Ist $1 \leq i < j < k \leq n$ und $\pi \in \mathrm{Sym}(\{i, j, k\})$, setzen wir $\xi_{\pi(i)\pi(j)\pi(k)} := (\operatorname{sgn} \pi) \xi_{ijk}$. Zusätzlich setzen wir $\xi_{ijk} = 0$, falls $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ nicht paarweise verschieden.

Satz
Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

$$av = \sum_{r<s<t} \left(\sum_q \alpha_{rq} \xi_{qst} + \sum_q \alpha_{sq} \xi_{rqt} + \sum_q \alpha_{tq} \xi_{rsq} \right) e_r \wedge e_s \wedge e_t$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
ac &= \sum_{i<j<k} \xi_{ijk} a(e_i \wedge e_j \wedge e_k) \\
&= \sum_{i<j<k} \xi_{ijk} (ae_i \wedge e_j \wedge e_k + e_i \wedge ae_j \wedge e_k + e_i \wedge e_j \wedge ae_k) \\
&= \sum_{i<j<k,l} \xi_{ijk} \alpha_{li} e_i \wedge e_j \wedge e_k + \sum_{i<j<k,l} \xi_{ijk} \alpha_{lj} e_i \wedge e_j \wedge e_k + \sum_{i<j<k,l} \xi_{ijk} \alpha_{lk} e_i \wedge e_j \wedge e_k \\
&= \sum_{i<j<k, j \neq l \neq k} \xi_{ijk} \alpha_{li} e_i \wedge e_j \wedge e_k + \sum_{i<j<k, j \neq l \neq k} \xi_{ijk} \alpha_{lj} e_i \wedge e_j \wedge e_k + \sum_{i<j<k, j \neq l \neq k} \xi_{ijk} \alpha_{lk} e_i \wedge e_j \wedge e_k \\
&= \sum_{i<j<k} \alpha_{ii} \xi_{ijk} e_i \wedge e_j \wedge e_k + \sum_{i<j<k} \alpha_{jj} \xi_{ijk} e_i \wedge e_j \wedge e_k + \sum_{i<j<k} \alpha_{kk} \xi_{ijk} e_i \wedge e_j \wedge e_k \\
&\quad + \sum_{l<i<j<k} \alpha_{li} \xi_{ijk} e_l \wedge e_j \wedge e_k - \sum_{l<i<j<k} \alpha_{lj} \xi_{ijk} e_l \wedge e_i \wedge e_k + \sum_{l<i<j<k} \alpha_{lk} \xi_{ijk} e_l \wedge e_i \wedge e_j \\
&\quad + \sum_{i<l<j<k} \alpha_{li} \xi_{ijk} e_l \wedge e_j \wedge e_k + \sum_{i<l<j<k} \alpha_{lj} \xi_{ijk} e_i \wedge e_l \wedge e_k - \sum_{i<l<j<k} \alpha_{lk} \xi_{ijk} e_i \wedge e_l \wedge e_j \\
&\quad - \sum_{i<j<l<k} \alpha_{li} \xi_{ijk} e_j \wedge e_l \wedge e_k + \sum_{i<j<l<k} \alpha_{lj} \xi_{ijk} e_i \wedge e_l \wedge e_k + \sum_{i<j<l<k} \alpha_{lk} \xi_{ijk} e_i \wedge e_j \wedge e_l \\
&\quad + \sum_{i<j<k<l} \alpha_{li} \xi_{ijk} e_j \wedge e_k \wedge e_l - \sum_{i<j<k<l} \alpha_{lj} \xi_{ijk} e_i \wedge e_k \wedge e_l + \sum_{i<j<k<l} \alpha_{lk} \xi_{ijk} e_i \wedge e_j \wedge e_l \\
&= \text{todo: umformen, dass am Ende der Summe } e_r \wedge e_s \wedge e_t \text{ steht} \\
&= \sum_{r<s<t} (\sum_{s \neq q \neq t} \alpha_{rq} \xi_{qst} + \sum_{r \neq q \neq t} \alpha_{sq} \xi_{rqt} + \sum_{r \neq q \neq s} \alpha_{tq} \xi_{rsq}) e_r \wedge e_s \wedge e_t
\end{aligned}$$

■

Beispiel
Seien $L := \mathfrak{sl}_9$ und $V := \bigwedge^3 \mathbb{C}^9$, also $\dim V = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$ und $\dim L \oplus V \oplus V^* = 80 + 84 + 84 = 248$. Wir werden $L \oplus V \oplus V^*$ mit der Methode aus Bemerkung 10.1 zu

einer einfachen Lie-Algebra vom Typ E_8 machen. dazu sei $e_1, \dots, e_9$ die Standardbasis von $\mathbb{C}^9$. Dann bilden die Elemente $e_i \wedge e_j \wedge e_k$ eine Basis von V. Die dazu duale Basis von V^* bezeichnen wir mit $(e_i \wedge e_j \wedge e_k)^*$ mit $1 \le i < j < k \le 9$. Seien $v = \sum_{i<j<k} \xi_{ijk} e_i \wedge e_j \wedge e_k \in V$, $f = \sum_{i<j<k} \lambda_{ijk} (e_i \wedge e_j \wedge e_k)^* \in V^*$.

Für $a = (\alpha_{ij}) \in L$ gilt dann:

$$f(av) = \sum_{r<s<t,q} (\lambda_{rst}\alpha_{rq}\xi_{qst} + \lambda_{rst}\alpha_{sq}\xi_{rqt} + \lambda_{rst}\alpha_{tq}\xi_{rsq}).$$

Sei $c = (\gamma_{ij}) \in \mathrm{gl}_9$ mit $\gamma_{ij} = \frac{1}{18}(\sum_{k<l} \lambda_{jkl}\xi_{ikl} - {}^1\!/\!{}_3\,\delta_{ij} f(v))$ für $i, j = 1, \dots, 9$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 18\,\mathrm{Spur}(c) &= \sum_{i=1}^{9} \left(\sum_{k<l} \lambda_{ikl}\xi_{ikl} - {}^1\!/\!{}_3\, f(v) \right) \\ &= \sum_{i<k<l} \lambda_{ikl}\xi_{ikl} + \sum_{k<i<l} \lambda_{ikl}\xi_{ikl} + \sum_{k<l<i} \lambda_{ikl}\xi_{ikl} - 3f(v) = 0 \end{aligned}$$

d. h. $c \in \mathrm{sl}_9$. Ferner ist

$$\begin{aligned} \kappa_L(c,a) &= 18\,\mathrm{Spur}(ca) = 18 \sum_{i,j=1}^{9} \gamma_{ij}\alpha_{ji} \\ &= \sum_{i,j=1}^{9} \left(\sum_{k<l} \lambda_{jkl}\xi_{ikl} - \frac{1}{3}\delta_{ij} f(v) \right) \alpha_{ji} = \sum_{\substack{i,j \\ k<l}} \lambda_{jkl}\alpha_{ji}\xi_{ikl} - \frac{1}{3} f(v) \underbrace{\sum_{i=1}^{9} \alpha_{ii}}_{=0} \\ &= \sum_{j<k<l,i} \lambda_{jkl}\alpha_{ji}\xi_{ikl} + \sum_{k<j<l,i} \lambda_{jkl}\alpha_{ji}\xi_{ikl} + \sum_{k<l<j,i} \lambda_{jkl}\alpha_{ji}\xi_{ikl} = f(av) \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$f \bullet v = c = \frac{1}{18} \left(\sum_{k<l} \lambda_{jkl}\xi_{ikl} - \frac{1}{3}\delta_{ij} f(v) \right)_{i,j=1}^{9}$$

Für $v = \sum_{i<j<k} \xi_{ijk} e_i \wedge e_j \wedge e_k, w = \sum_{i<j<k} \eta_{ijk} e_i \wedge e_j \wedge e_k, u = \sum_{i<j<k} \zeta_{ijk} e_i \wedge e_j \wedge e_k \in V$ mit $\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk} \in \mathbb{C}$ setzen wir:

$$\langle v, w, u \rangle := \sum_{\pi \in \mathrm{Sym}(9)} (\mathrm{sgn}\,\pi) \xi_{\pi(1)\pi(2)\pi(3)} \eta_{\pi(4)\pi(5)\pi(6)} \zeta_{\pi(7)\pi(8)\pi(9)}$$

Dann ist die Abbildung $V \times V \times V \to \mathbb{C}, (u, v, w) \mapsto \langle u, v, w \rangle$, trilinear und alternierend, und für $(\alpha_{ij}) = a \in L$ gilt:

$$\begin{aligned}
\langle av,w,u\rangle + \langle v,aw,u\rangle + \langle v,w,au\rangle = &\sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(9)}\sum_q (\operatorname{sgn}\pi)\alpha_{\pi(1)q}\xi_{q\pi(2)\pi(3)}\eta_{\pi(4)\pi(5)\pi(6)}\zeta_{\pi(7)\pi(8)\pi(9)}\\
&+\sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(9)}\sum_q (\operatorname{sgn}\pi)\alpha_{\pi(2)q}\xi_{\pi(1)q\pi(3)}\eta_{\pi(4)\pi(5)\pi(6)}\zeta_{\pi(7)\pi(8)\pi(9)}\\
&+\sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(9)}\sum_q (\operatorname{sgn}\pi)\alpha_{\pi(3)q}\xi_{\pi(1)\pi(2)q}\eta_{\pi(4)\pi(5)\pi(6)}\zeta_{\pi(7)\pi(8)\pi(9)}\\
&+\sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(9)}\sum_q (\operatorname{sgn}\pi)\alpha_{\pi(4)q}\xi_{\pi(1)\pi(2)\pi(3)}\eta_{q\pi(5)\pi(6)}\zeta_{\pi(7)\pi(8)\pi(9)}\\
&+\sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(9)}\sum_q (\operatorname{sgn}\pi)\alpha_{\pi(5)q}\xi_{\pi(1)\pi(2)\pi(3)}\eta_{\pi(4)q\pi(6)}\zeta_{\pi(7)\pi(8)\pi(9)}\\
&+\sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(9)}\sum_q (\operatorname{sgn}\pi)\alpha_{\pi(6)q}\xi_{\pi(1)\pi(2)\pi(3)}\eta_{\pi(4)\pi(5)q}\zeta_{\pi(7)\pi(8)\pi(9)}\\
&+\sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(9)}\sum_q (\operatorname{sgn}\pi)\alpha_{\pi(7)q}\xi_{\pi(1)\pi(2)\pi(3)}\eta_{\pi(4)\pi(5)\pi(6)}\zeta_{q\pi(8)\pi(9)}\\
&+\sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(9)}\sum_q (\operatorname{sgn}\pi)\alpha_{\pi(8)q}\xi_{\pi(1)\pi(2)\pi(3)}\eta_{\pi(4)\pi(5)\pi(6)}\zeta_{\pi(7)q\pi(9)}\\
&+\sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(9)}\sum_q (\operatorname{sgn}\pi)\alpha_{\pi(9)q}\xi_{\pi(1)\pi(2)\pi(3)}\eta_{\pi(4)\pi(5)\pi(6)}\zeta_{\pi(7)\pi(8)q}\\
= &\sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(9)}(\operatorname{sgn}\pi)\underbrace{\sum_{i=1}^{9}\alpha_{\pi(i)\pi(i)}}_{=\mathrm{Spur}(a)=0}\xi_{\pi(1)\pi(2)\pi(3)}\eta_{\pi(4)\pi(5)\pi(6)}\zeta_{\pi(7)\pi(8)\pi(9)}
\end{aligned}$$

Für $f = \sum_{i<j<k}\lambda_{ijk}(e_i\wedge e_j\wedge e_k)^*, g = \sum_{i<j<k}\mu_{ijk}(e_i\wedge e_j\wedge e_k)^*, k = \sum_{i<j<k}\nu_{ijk}(e_i\wedge e_j\wedge e_k)^* \in V^*$ mit $\lambda_{ijk},\mu_{ijk},\nu_{ijk}\in\mathbb{C}$ setzen wir analog:

$$\langle f,g,h\rangle := \gamma\sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(9)}(\operatorname{sgn}\pi)\lambda_{\pi(1)\pi(2)\pi(3)}\mu_{\pi(4)\pi(5)\pi(6)}\nu_{\pi(7)\pi(8)\pi(9)}\in\mathbb{C}$$

Dabei ist γ eine geeignet zu wählende Konstante in $\mathbb{C}$. Dann ist die Abbildung $V^*\times V^*\times V^*\to\mathbb{C}, (f,g,h)\mapsto\langle f,g,h\rangle$ trilinear und alternierend mit $\langle af,g,h\rangle+\langle f,ag,h\rangle+\langle f,g,ah\rangle = 0$ für alle $a\in L$, $f,g,h\in V^*$. Wir sparen uns den Nachweis von[1]:

$$(v\times w)(f\times g) = \kappa_L(f\bullet w, g\bullet v) - \kappa_L(f\bullet v, g\bullet w)\qquad f,g\in V^*, v,w\in V$$

Aus Bemerkung 10.1 folgt, dass $L\oplus V\oplus V^*$ eine Lie-Algebra ist. Sei H die Cartanalgebra aller Diagonalmatrizen in L und ferner sei e_{ij} mit $i,j = 1,\dots,9$ die Standardbasis von $\mathfrak{gl}_9$. Wir wissen, dass die Wurzeln von L bezüglich H die folgenden Abbildungen sind:

$$\alpha_{ij}\colon H\to\mathbb{C}, x = \operatorname{diag}(\xi_1,\dots,\xi_9)\mapsto\xi_i-\xi_j\qquad i\neq j$$

[1] siehe hierzu: M. Hausner und J. T. Schwartz. Lie groups, Lie algebras. Gordon and Breach 1989. pp. 129ff.

Dabei ist jeweils $\mathbb{C}e_{ij}$ der Wurzelraum zu α_{ij}. Man beachte: dass gilt, $\xi_9 = -\xi_1 - \cdots - \xi_8$. Außerdem gilt für $1 \leq i < j < k \leq 9$: $x(e_i \wedge e_j \wedge e_k) = (\xi_i + \xi_j + \xi_k)(e_i \wedge e_j \wedge e_k)$ sowie $x(e_i \wedge e_j \wedge e_k)^* = (-\xi_i - \xi_j - \xi_k)(e_i \wedge e_j \wedge e_k)^*$. Wie in Satz 10.2 folgt daraus, dass H auch eine Cartanalgebra von $L \oplus V \oplus V^*$ ist. Ferner ergeben die Abbildungen α_{ij} mit $i, j \in \{1, \ldots, 9\}$ verschieden, die Abbildungen $\beta_{ijk} \colon H \to \mathbb{C}, x = \operatorname{diag}(\xi_1, \ldots, \xi_9) \mapsto \xi_i + \xi_j + \xi_k$ mit $1 \leq i < j < k \leq 9$ und die Abbildungen $-\beta_{ijk}$ das Wurzelsystem Φ von $L \oplus V \oplus V^*$ bezüglich H. Alle Wurzelräume sind eindimensional und für $1 \leq i < j < k \leq 9$ gilt: $(e_i \wedge e_j \wedge e_k)^* \bullet (e_i \wedge e_j \wedge e_k) \neq 0$ nach den obigen Formeln. Aus Satz 10.2 folgt, dass $L \oplus V \oplus V^*$ halbeinfach ist.

Wir wollen zeigen, dass die folgenden Wurzeln eine Basis Π von Φ bilden:

$$\alpha_{12}, \alpha_{23}, \ldots, \alpha_{78}, \beta_{678}$$

Im Fall $1 \leq i < j < k \leq 8$ ist wie üblich $\alpha_{ij} = \alpha_{i,i+1} + \cdots + \alpha_{j-1,j}$. Addition von α_{i6} oder α_{j7} oder α_{k8} zu β_{678} ergibt β_{ijk} für $1 \leq i < j < k \leq 8$. Im Fall $\{i, j, k, l, m, r, s, t\} = \{1, \ldots, 8\}$ ist

$$\begin{aligned}
(\xi_i + \xi_j + \xi_k) + (\xi_i + \xi_l + \xi_m) + (\xi_r + \xi_s + \xi_t) &= \xi_i + (\xi_1 + \cdots + \xi_8) \\
&= \xi_i - \xi_9 \\
(\xi_k + \xi_l + \xi_m) + (\xi_r + \xi_s + \xi_t) &= (\xi_1 + \cdots + \xi_8) - \xi_i - \xi_j \\
&= -\xi_9 - \xi_i - \xi_j
\end{aligned}$$

Folglich kann man $\alpha_{19}, \ldots, \alpha_{89}$ und die Elemente $-\beta_{ij9}$ mit $1 \leq i < j \leq 8$ als Summen von Elementen der Form β_{rst} mit $1 \leq r < s < t \leq 8$ schreiben. Damit ist gezeigt, dass Π eine Basis von Φ ist.

Zum Schluss bestimmen wir noch die Cartanmatrix $A = (A_{ij})$ von $L \oplus V \oplus V^*$ bezüglich Π. Die β_{678}-Kette durch α_{56}: $\alpha_{56}, \beta_{578} \Rightarrow A_{8,5} = -1$, α_{56}-Kette durch β_{678}: $\beta_{678}, \beta_{578} \Rightarrow A_{58} = -1$. Daher hängt β_{678} an α_{56}, und die endgültige Form von E_8 ergibt sich.

Damit ist gezeigt, dass $L \oplus V \oplus V^*$ einfach vom Typ E_8 ist.

Satz 10.5
Seien L eine halbeinfache Lie-Algebra mit Cartanalgebra H, Wurzelsystem Φ, Basis $\Pi \subseteq \Phi$ und $0 \neq e_\alpha \in L_\alpha(H)$ für alle $\alpha \in \Phi$. Sei ferner $\Pi_0 \subseteq \Pi$ eine Teilmenge, $\Phi_0 := \{\alpha \in \Phi \colon \alpha \text{ Linearkombination von } \Pi_0\}$ und L_0 die von den Elementen e_α mit $\alpha \in \Pi_0 \cup (-\Pi_0)$ erzeugte Unteralgebra von L. Dann ist die Lie-Algebra L_0 halbeinfach, $H_0 = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(h_\alpha \colon \alpha \in \Pi_0)$ ist eine Cartanalgebra von L_0, die Elemente $\alpha|H_0$ ($\alpha \in \Phi_0$) sind die Wurzeln von L_0 bezüglich H_0 und die Elemente $\alpha|H_0$ ($\alpha \in \Pi_0$) bilden eine entsprechende Basis. Das Dynkindiagramm von L_0 bezüglich Π_0 entsteht aus dem Dynkindiagramm von L bezüglich Π dadurch, dass man die Ecken, die nicht zu Π_0 gehören und die entsprechenden Kanten weglässt.

Beweis:
Wir zeigen zunächst: $e_\alpha \in L_0$ für $\alpha \in \Phi_0$. Dazu nummerieren wir die Elemente in Π durch und betrachten die in Bemerkung 8.8 definierte Ordnung $<$ auf $H_{\mathbb{R}}$. Ferner nehmen wir

an, dass ein Gegenbeispiel $\alpha \in \Phi_0$ existiert und setzen o. B. d. A. voraus, dass α positiv ist. Der andere Fall kann äquivalent durchgeführt werden. Sicher ist $\alpha \notin \Pi_0$. Nach Satz 8.10 existieren also positive Wurzeln ξ, η mit $\alpha = \xi + \eta$. Mit α sind auch ξ, η nichtnegative Linearkombinationen von Π_0, d. h. $\xi, \eta \in \Phi_0$. Wählt man α minimal bezüglich $<$ mit $e_\alpha \notin L$, dann gilt: $e_\xi, e_\eta \in L_0$. Wegen $[L_\xi(H), L_\eta(H)] = L_{\xi+\eta}(H) = L_\alpha(H)$ ist dann auch $e_\alpha \in L_0$. ↯

Da die Elemente e_α $(\alpha \in \Phi_0)$ in L_0 liegen, ist $H_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_0} \mathbb{C} e_\alpha \subseteq L$ eine Unteralgebra. Also ist $L_0 = H_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_0} \mathbb{C} e_\alpha$. Für $\alpha \in \Phi_0$ ist $\alpha(h_\alpha) = \kappa_L(h_\alpha, h_\alpha) \neq 0$. Daher ist $\alpha|H_0 \neq 0$. Nach Satz 4.13 ist $H_0 \subseteq L_0$ eine Cartanalgebra. Also sind die Elemente $\alpha|H_0$ $(\alpha \in \Phi_0)$ die Wurzeln von L_0 bezüglich H_0.

Sind $\alpha, \beta \in \Phi_0$ mit $\alpha|H_0 = \beta|H_0$, so ist $0 = (\alpha - \beta)(h) = \kappa_L(h_\alpha - h_\beta, h)$ für alle $h \in H_0$. Insbesondere ist $0 = \kappa_L(h_\alpha - h_\beta, h_\alpha - h_\beta)$, also $h_\alpha = h_\beta$ und $\alpha = \beta$. Dies zeigt, dass Elemente $\alpha|H_0$ $(\alpha \in \Phi_0)$ paarweise verschieden sind. Die entsprechenden Wurzelräume sind also alle eindimensional.

Sei $h \in H_0$. Schreibe $h = \sum_{\alpha \in \Pi_0} z_\alpha h_\alpha$ mit $z_\alpha \in \mathbb{C}$ für $\alpha \in \Pi_0$. Dann ist $\overline{h} := \sum_{\alpha \in \Pi_0} \overline{z}_\alpha h_\alpha \in H_0$ mit

$$\beta(\overline{h}) = \sum_{\alpha \in \Pi_0} \overline{z}_\alpha \beta(h_\alpha) = \sum_{\alpha \in \Pi_0} \overline{z}_\alpha \kappa_L(h_\beta, h_\alpha) = \overline{\sum_{\alpha \in \Pi_0} z_\alpha \kappa_L(h_\beta, h_\alpha)} = \overline{\beta(h)}$$

für $\beta \in \Phi_0$. Ist $0 = \beta(h) = \kappa_L(h_\beta, h)$ für alle $\beta \in \Phi_0$, so ist $h = 0$. Nach Satz 10.2 ist also L_0 eine halbeinfache Lie-Algebra.

Offenbar bilden die Elemente $\alpha|H_0$ für $\alpha \in \Pi_0$ eine Basis für das Wurzelsystem $\{\beta|H_0 : \beta \in \Phi_0\}$ von L_0 bezüglich H_0. Sind $\alpha, \beta \in \Pi_0$ und ist $\beta, \ldots, \beta + t\alpha$ die α-Kette durch β in L, so ist $\beta|H_0, \ldots, \beta + t\alpha|H_0$ die $\alpha|H_0$-Kette durch $\beta|H_0$ in L_0. Daher ist die Cartanmatrix von L_0 bezüglich Π_0 genau die entsprechende Teilmatrix der Cartanmatrix von L bezüglich Π und die Behauptung folgt. ∎

Bemerkung
Als Anwendung konstruieren wir aus E_8 die einfache Lie-Algebra E_7 und E_6.

Beispiel
Sei $L = E_8$ wie in Beispiel 10. 3. Dann ergeben die Abbildungen

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &: H \to \mathbb{C}, \operatorname{diag}(\xi_1, \ldots, \xi_9) \mapsto \xi_i - \xi_j & i, j \in \{1, \ldots, 9\}, i \neq j \\ \beta_{ij} &: H \to \mathbb{C}, \operatorname{diag}(\xi_1, \ldots, \xi_9) \mapsto \xi_i + \xi_j + \xi_k & 1 \leq i < j < k \leq 9 \end{aligned}$$

und die Abbildung $-\beta_{ijk}$ für $1 \leq i < j < k \leq 9$ das Wurzelsystem Φ von L bezüglich H. Dabei beachte man $\xi_1 + \cdots + \xi_9 = 0$. Ferner ist $\Pi = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \ldots, \alpha_{78}, \beta_{678}\}$ eine Basis von Φ. Positiv bezüglich Π sind die Elemente α_{ij} mit $1 \leq i < j \leq 9$, die Elemente β_{ijk} mit $1 \leq i < j < k \leq 9$ sowie die Elemente $-\beta_{ij9}$ mit $1 \leq i < j \leq 8$. Dies haben wir in Beispiel 10.3 implizit als Linearkombination der Elemente in Π geschrieben.

Wie setzen $\Pi_0 := \{\alpha_{23}, \dots, \alpha_{78}, \beta_{678}\}$. Mit Beispiel 10.3 kann man leicht zeigen:

$$\begin{aligned}\Phi_0 &:= \{\alpha \in \Phi\colon \alpha \text{ Linearkombination von } \Pi_0\}\\ &= \{\pm\alpha_{ij}\colon 2 \leq i < j \leq 8\} \cup \{\pm\beta_{ijk}\colon 2 \leq i < j \leq 8\} \cup \{\pm\beta_{1j8}\colon 2 \leq j \leq 8\}.\end{aligned}$$

Daher ist $|\Phi_0| = 42 + 70 + 14 = 126$. Aus dem Satz 10.5 folgt, dass die so entstehenden Lie-Algebren L_0 einfach vom Typ E_7 ist. Also ist $\dim E_7 = 7 + 126 = 133$. Wir setzen jetzt $\Pi_1 := \{\alpha_{34}, \dots, \alpha_{78}, \beta_{678}\}$. Aus den in Beispiel 10.3 durchgeführten Berechnungen folgt dann:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &:= \{\alpha \in \Phi\colon \alpha \text{ Linearkombination von } \Pi_1\}\\ &= \{\pm\alpha_{ij}\colon 3 \leq i < j \leq 8\} \cup \{\pm\beta_{ijk}\colon 3 \leq i < j < k \leq 8\} \cup \{\pm\beta_{129}\}\end{aligned}$$

Dabei ist $|\Phi_1| = 30 + 40 + 2 = 72$. Aus dem Satz 10.5 folgt, dass die so entstehende Lie-Algebra L_1 einfach vom Typ E_6 ist. Also ist $\dim E_6 = 6 + 72 = 78$.

Bemerkung 10.6
Sei L eine Lie-Algebra vom Typ E_6, wie oben, mit Cartanalgebra H, Wurzelsystem $\Phi = \{\pm\alpha_{ij}\colon 3 \leq i < j \leq 8\} \cup \{\pm\beta_{ijk}\colon 3 \leq i < j < k \leq 8\} \cup \{\pm\beta_{129}\}$ und Basis $\Pi = \{\alpha_{34}, \dots, \alpha_{78}, \beta_{678}\}$ von Φ. Das Dynkindiagramm vom Typ E_6 hat die folgende Symmetrie: todo: zeichen help: Wie sah das Diagramm aus?. Diese setzen wir zu einer linearen Bijektion $\varphi\colon H^* \to H^*$ fort. Nach Satz 8.6 ist $\varphi(\Phi) = \varphi$. Die Wirkung von φ auf Wurzeln der Form $\alpha_{ij} = \alpha_{i,i+1}, \dots, \alpha_{j-1,j}$ ist offensichtlich. Die Wirkung von φ auf die Wurzeln der Form β_{ijk} bestimmen wir explizit:

- β_{678}
- $\beta_{578} = \alpha_{56} + \beta_{678}$
  $\beta_{478} = \alpha_{45} + \alpha_{56} + \beta_{678}$
  $\beta_{378} = \alpha_{34} + \alpha_{45} + \alpha_{56} + \beta_{678}$
  $\beta_{568} = \alpha_{56} + \alpha_{67} + \beta_{678}$
- $\beta_{468} = \alpha_{45} + \alpha_{56} + \alpha_{67} + \beta_{678}$
  $\beta_{368} = \alpha_{34} + \alpha_{45} + \alpha_{56} + \alpha_{67} + \beta_{678}$
- $\beta_{458} = \alpha_{45} + 2\alpha_{56} + \alpha_{67} + \beta_{678}$
  $\beta_{358} = \alpha_{34} + \alpha_{45} + 2\alpha_{56} + \alpha_{67} + \beta_{678}$
  $\beta_{348} = \alpha_{34} + 2\alpha_{45} + 2\alpha_{56} + \alpha_{67} + \beta_{678}$
  $\beta_{567} = \alpha_{56} + \alpha_{67} + \alpha_{78} + \beta_{678}$
  $\beta_{467} = \alpha_{45} + \alpha_{56} + \alpha_{67} + \alpha_{78} + \beta_{678}$
- $\beta_{367} = \alpha_{34} + \alpha_{45} + \alpha_{56} + \alpha_{67} + \alpha_{78} + \beta_{678}$
  $\beta_{457} = \alpha_{45} + 2\alpha_{56} + \alpha_{67} + \alpha_{78} + \beta_{678}$
- $\beta_{357} = \alpha_{34} + \alpha_{45} + 2\alpha_{56} + \alpha_{67} + \alpha_{78} + \beta_{678}$
  $\beta_{347} = \alpha_{34} + 2\alpha_{45} + 2\alpha_{56} + \alpha_{67} + \alpha_{78} + \beta_{678}$
  $\beta_{456} = \alpha_{45} + 2\alpha_{56} + 2\alpha_{67} + \alpha_{78} + \beta_{678}$
  $\beta_{356} = \alpha_{34} + \alpha_{45} + 2\alpha_{56} + 2\alpha_{67} + \alpha_{78} + \beta_{678}$

- $\beta_{346} = \alpha_{34} + 2\alpha_{45} + 2\alpha_{56} + 2\alpha_{67} + \alpha_{78} + \beta_{678}$
- $\beta_{345} = \alpha_{34} + 2\alpha_{45} + 3\alpha_{56} + 2\alpha_{67} + \alpha_{78} + \beta_{678}$
- $-\beta_{129} = \alpha_{34} + 2\alpha_{45} + 3\alpha_{56} + 2\alpha_{67} + \alpha_{78} + 2\beta_{678}$

Wir stellen fest, dass unter φ genau $2(3+9) = 24$ Wurzeln festbleiben und die übrigen 48 Wurzeln in Bahnen der Länge 2 zerfallen.

Wie in Satz 8.11 gezeigt, existiert genau ein Automorphismus ψ von L mit $\psi(h_\alpha) = h_{\varphi(\alpha)}$ und $\psi(e_\alpha) = e_{\varphi(\alpha)}$ für alle $\alpha \in \Pi$. Dieser erfüllt $\psi(h_\alpha) = h_{\varphi(\alpha)}$ und $\psi(L_\alpha(H)) = L_{\varphi(\alpha)}(H)$ für alle $\alpha \in \Phi$. Offenbar ist $\psi^2 = \mathrm{id}_L$.

Für $\alpha \in \Phi$ mit $\varphi(\alpha) = \alpha$ ist $\psi|L_\alpha(H) = \mathrm{id}_{L_\alpha(H)}$, denn z. B. ist

$$e_{\alpha_{47}} := [[e_{\alpha_{45}}, e_{\alpha_{56}}], e_{\alpha_{67}}] \in L_{\alpha_{47}}(H) \setminus \{0\}$$

und

$$\psi(e_{\alpha_{47}}) = [[e_{\alpha_{67}}, e_{\alpha_{56}}], e_{\alpha_{45}}] = -[[e_{\alpha_{56}}, e_{\alpha_{45}}], e_{\alpha_{67}}] - [\underbrace{[e_{\alpha_{45}}, e_{\alpha_{67}}]}_{=0}, e_{\alpha_{56}}] = e_{\alpha_{47}}$$

Analog ist $e_{\alpha_{38}} := [[e_{\alpha_{34}}, e_{\alpha_{47}}], e_{\alpha_{78}}] \in L_{\beta_{578}}(H) \setminus \{0\}$ mit $\psi(e_{\beta_{578}}) = e_{\beta_{578}}$. Die anderen $\alpha \in \Phi$ mit $\varphi(\alpha) = \alpha$ lassen sich ebenso behandeln.

Mit $\dot{L} := \{x \in L \colon \psi(x) = x\}, \dot{H} := \{x \in H \colon \psi(x) = x\}$ und $\dot{\Phi} := \{\alpha \in \Phi \colon \varphi(\alpha) = \alpha\}$ gilt also:

$$\dot{L} = \dot{H} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \dot{\Phi}} \mathbb{C} e_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi \setminus \dot{\Phi}} \mathbb{C}(e_\alpha + \psi(e_\alpha)) \tag{10.1}$$

Wegen $\psi(h_\alpha) = h_{\varphi(\alpha)}$ für $\alpha \in \Pi$ ist $\dim \dot{H} = 4$. Folglich ist

$$\dim \dot{L} = 4 + 24 + 24 = 52$$

Nach Satz 8.6 ist $\alpha|\dot{H} = \varphi(\alpha)|\dot{H}$ für $\alpha \in \Phi$. Aus $\alpha|\dot{H} = 0$ folgt also auch $\varphi(\alpha)|\dot{H} = 0$. Für $h \in \dot{H}$ gilt also:

$$0 = (\alpha + \varphi(\alpha))(h) = \kappa_L(h_\alpha + h_{\varphi(\alpha)}, h) = \kappa_L(h_\alpha + \psi(h_\alpha), h).$$

Setzt man $h := h_\alpha + \psi(h_\alpha)$, so folgt $0 = h_\alpha + \psi(h_\alpha) = h_\alpha + h_{\varphi(\alpha)}$, d. h. $\varphi(\alpha) = -\alpha$. Dies ist aber unmöglich, da φ positive Wurzeln auf positive Wurzeln abbildet. Dies zeigt: $\alpha|\dot{H} \neq 0$ für alle $\alpha \in \Phi$.

Für $\alpha \in \Phi \setminus \dot{\Phi}$ liegt $e_\alpha + \psi(e_\alpha)$ im Wurzelraum zur Wurzeln $\alpha|\dot{H} = \varphi(\alpha)|\dot{H}$. Nach Satz 4.13 ist also $\dot{H}$ eine Cartanalgebra von $\dot{L}$.

Seien $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha|\dot{H} = \beta|\dot{H}$, also auch $\varphi(\alpha)|\dot{H} = \varphi(\beta)|\dot{H}$. Für $h \in \dot{H}$ ist also

$$\kappa_L(h_\alpha + \psi(h_\alpha), h) = (\alpha + \varphi(\alpha))(h) = (\beta + \varphi(\beta))(h) = \kappa_L(h_\beta + \psi(h_\beta), h)$$

Daher ist $h_\alpha + h_{\varphi(\alpha)} = h_\beta + h_{\varphi(\beta)}$, d. h. $\alpha + \varphi(\alpha) = \beta + \varphi(\beta)$. Geht man die Liste unserer Wurzeln durch, so sieht man, dass daraus $\alpha = \beta$ oder $\alpha = \varphi(\beta)$ folgt.

Man hat also 48 verschiedene Wurzeln von $\dot{L}$ bezüglich $\dot{H}$; diese entstehen alle durch Einschränkung der Wurzeln von L bezüglich H. Ferner ist Gleichung 10.1 die Cartan-zerlegung von $\dot{L}$ bezüglich $\dot{H}$. Alle Wurzelräume sind eindimensional. Für $\alpha \in \varPhi \setminus \dot{\varPhi}$ ist

$$[e_\alpha + e_{\varphi(\alpha)}, e_{-\alpha} + e_{-\varphi(\alpha)}] = [e_\alpha, e_{-\alpha}] + [e_\alpha, e_{-\varphi(\alpha)}] + [e_{\varphi(\alpha)}, e_{-\alpha}] + [e_{\varphi(\alpha)}, e_{-\varphi(\alpha)}]$$

mit$[e_\alpha, e_{-\varphi(\alpha)}] \in L_{\alpha-\varphi(\alpha)}(H), [e_{\varphi(\alpha)}, e_{-\alpha}] \in L_{\varphi(\alpha)-\alpha}(H)$ und $[e_\alpha, e_{-\alpha}] + [e_{\varphi(\alpha)}, e_{-\varphi(\alpha)}] = h_\alpha + h_{-\varphi(\alpha)} \neq 0$ wegen $\varphi(\alpha) \neq -\alpha$. Folglich ist $[e_\alpha + e_{\varphi(\alpha)}, e_{-\alpha} + e_{-\varphi(\alpha)}] \neq 0$. Es folgt leicht, dass $\dot{L}$ die Voraussetzungen von Satz 10.2 erfüllt. Daher ist $\dot{L}$ eine halbeinfache Lie-Algebra. Offenbar ist $\dot{\varPi} := \{\alpha_{34}|\dot{H}, \alpha_{45}|\dot{H}, \alpha_{56}|\dot{H}, \beta_{678}|\dot{H}\}$ eine Basis von $\dot{\varPhi}$. Zur Bestimmung der Cartanmatrix von $\dot{L}$ bezüglich $\dot{\varPi}$ nutzen wir die folgenden Ketten aus:

- $\alpha_{34}|\dot{H}$-Kette durch $\alpha_{45}|\dot{H}$: $\alpha_{45}|\dot{H}, \alpha_{35}|\dot{H}$
- $\alpha_{45}|\dot{H}$-Kette durch $\alpha_{56}|\dot{H}$: $\alpha_{56}|\dot{H}, \alpha_{46}|\dot{H}, \alpha_{47}|\dot{H}$
- $\alpha_{56}|\dot{H}$-Kette durch $\beta_{678}|\dot{H}$: $\beta_{678}|\dot{H}, \beta_{578}|\dot{H}$

Daher hat der Coxetergraph von $\dot{H}$ bezüglich $\dot{\varPi}$ die Form o-o=o-o, d. h. $\dot{L}$ ist eine einfache Lie-Algebra vom Typ F_4.

Beispiel
Sei L eine Lie-Algebra vom Typ E_6 mit der üblichen Cartanzerlegung $L = H \oplus \bigoplus_{\alpha\in\varPhi_0} \mathbb{C}e_\alpha$, $|\varPhi| = 72$, Basis $\varPi \subseteq \varPhi$ mit $\varPi = \{\alpha_{34}, \dots, \alpha_{78}, \beta_{678}\}$. Wir haben eine lineare Bijektion $\varphi\colon H^* \to H^*$ konstruiert (wie im Diagramm). dazu haben wir weiter einen Automorphismus $\psi(h_\alpha) = h_{\varphi(\alpha)}$ unf $\psi(e_\alpha) = e_{\varphi(\alpha)}$ von L konstruiert. Es gilt $\psi^2 = \mathrm{id}_L$. Nehmen Fixpunkte unter ψ: $\dot{L} = \dot{H} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\dot{\varPhi}} \mathbb{C}e_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha\in\varPhi\setminus\dot{\varPhi}} \mathbb{C}(e_\alpha + \psi(e_\alpha))$ mit $\dot{L} := \{x \in L\colon \psi(x) = x\}, \dot{H} := \{x \in H\colon \psi(x) = x\}, \dot{\varPhi} := \{\alpha \in \varPhi\colon \varphi(\alpha) = \alpha\}$. Dann ist $\dim \dot{L} = 52, \dim \dot{H} = 4, |\dot{\varPhi}| = 24$. Ferner: $\alpha \in \varPhi \Rightarrow 0 \neq \alpha|\dot{H} = \varphi(\alpha)|\dot{H}$ und $\alpha, \beta \in \varPhi$ mit $\alpha|\dot{H} = \beta|\dot{H} \Rightarrow \beta \in \{\alpha, \varphi(\alpha)\}$. Man hat 48 verschiedene Wurzeln von $\dot{L}$ bezüglich $\dot{H}$. Diese entstehen alle durch Einschränkung der Wurzeln von L bezüglich H. Ferner ist die obige Formel die Cartanzerlegung von $\dot{L}$ bezüglich $\dot{H}$. Alle Wurzelräume sind eindimensional. Für $\alpha \in \varPhi \setminus \dot{\varPhi}$ ist $[e_\alpha + e_{\varphi(\alpha)}, e_{-\alpha} + e_{-\varphi(\alpha)}] = \underbrace{[e_\alpha, e_{-\alpha}]}_{h_\alpha} + \underbrace{[e_\alpha, e_{-\varphi(\alpha)}]}_{L_{\alpha-\varphi(\alpha)}(H)} + \underbrace{[e_{\varphi(\alpha)}, e_{-\alpha}]}_{\in L_{\varphi(\alpha)-\alpha}(H)} + \underbrace{[e_{\varphi(\alpha)}, e_{-\varphi(\alpha)}]}_{h_{\varphi(\alpha)}}$ mit $h_\alpha + h_{\varphi(\alpha)} \neq 0$ wegen $\alpha + \varphi(\alpha) \neq 0$. Folglich ist $[e_\alpha + e_{\varphi(\alpha)}, e_{-\alpha} + e_{-\varphi(\alpha)}] \neq 0$. Es folgt leicht, dass die Algebra $\dot{L}$ die Voraussetzungen von Satz 10.2 erfüllt. Daher ist die Lie-Algebra $\dot{L}$ halbeinfach. Offensichtlich ist $\dot{\varPi} = \{\alpha_{34}|\dot{H}, \alpha_{45}|\dot{H}, \alpha_{56}|\dot{H}, \beta_{678}|\dot{H}\}$ eine Basis von $\dot{\varPhi}$. Zur Bestimmung der Cartanmatrix von $\dot{L}$ rechnen wir die folgenden Ketten aus:

- $\alpha_{34}|\dot{H}$-Kette durch $\alpha_{45}|\dot{H}$: $\alpha_{45}|\dot{H}, \alpha_{35}|\dot{H}$
- $\alpha_{45}|\dot{H}$-Kette durch $\alpha_{56}|\dot{H}$: $\alpha_{56}|\dot{H}, \alpha_{46}|\dot{H}, \alpha_{47}|\dot{H}$
- $\alpha_{56}|\dot{H}$-Kette durch $\beta_{678}|\dot{H}$: $\beta_{678}|\dot{H}, \beta_{578}|\dot{H}$

Daher hat der Coxetergraph von $\dot{L}$ bezüglich $\dot{\Pi}$ die Form: o-o=o-o, d. h. $\dot{L}$ ist eine einfache Lie-Algebra vom Typ F_4.

11 Konjugationssätze

Bemerkung 11.1
Sei L eine halbeinfache Lie-Algebra mit Cartanalgebra H, Wurzelsystem Φ und Weylgruppe W. Dann ist die Abbildung $\mu\colon H^* \to H, \alpha \mapsto h_\alpha$ eine lineare Bijektion. Für $\sigma \in W$ setzen wir $\hat{\sigma} := \mu^{-1} \circ \sigma \circ \mu \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(H^*)$. Dann ist $\hat{\sigma} \circ \hat{\tau} = \widehat{\sigma \circ \tau}$ für $\sigma, \tau \in W$ und für $\alpha \in \Phi$ ist $h_{\hat{\sigma}(\alpha)} = \mu(\hat{\sigma})\alpha)) = \sigma(\mu(\alpha)) = \sigma(h_\alpha)$. Insbesondere ist $\hat{\sigma}(\Phi) = \Phi$.

Satz 11.2
Sei L eine halbeinfache Lie-Algebra mit Cartanalgebra H, Wurzelsystem Φ und Weylgruppe W. Zu je zwei Basen Π, Π' existiert ein $\sigma \in W$ mit $\hat{\sigma}(\Pi) = \Pi'$.

Beweis:
Beweis mit „versteckter“ Induktion: Seien $P(\Pi), P(\Pi')$ die Mengen der positiven Wurzeln in Φ bezüglich Π bzw. Π'. Im Fall $P(\Pi) = P(\Pi')$ existieren zu jedem $\alpha \in \Pi$ Elemente $n_{\beta'} \in \mathbb{N}_0$ mit $\alpha = \sum_{\beta' \in \Pi'} n_{\alpha\beta'}\beta'$ und umgekehrt. Daher ist $\Pi = \Pi'$.

Sei $P(\Pi) \neq P(\Pi')$, d. h. $P(\Pi) \nsubseteq P(\Pi')$ wegen $|P(\Pi)| = \frac{|\Phi|}{2} = |P(\Pi')|$. Dann ist auch $\Pi \nsubseteq P(\Pi')$. Wähle $\alpha \in \Pi \setminus P(\Pi')$. Sei $\beta \in P(\Pi)$ beliebig. Schreibe $\beta = \sum_{\gamma \in \Pi} n_\gamma \gamma$ für $n_\gamma \in \mathbb{N}_0, \gamma \in \Pi$. Dann ist $\Phi \ni \hat{\sigma}_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\kappa_L(h_\alpha, h_\beta)}{\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)}\alpha$. Daher ist $\hat{\sigma}_\alpha(\beta) \in P(\Pi)$ außer im Fall $\beta = \alpha$. Folglich ist $\hat{\sigma}_\alpha(P(\Pi) \cap P(\Pi')) \subseteq P(\Pi)$. Offenbar ist auch $\hat{\sigma}_\alpha(\Pi')$ eine Basis von Φ mit $\hat{\sigma}_\alpha(P(\Pi) \cap P(\Pi')) \subseteq \hat{\sigma}_\alpha(P(\Pi')) = P(\hat{\sigma}_\alpha(\Pi'))$, d. h. also $\hat{\sigma}_\alpha(P(\Pi) \cap P(\Pi')) \subseteq P(\Pi) \cap P(\hat{\sigma}_\alpha(\Pi'))$. Wegen $\hat{\sigma}_\alpha(\alpha) = -\alpha \in P(\Pi')$ ist $\alpha = \hat{\sigma}_\alpha(-\alpha) \in \hat{\sigma}_\alpha(P(\Pi')) = P(\hat{\sigma}_\alpha(\Pi'))$. Daher ist $|P(\Pi) \cap P(\Pi')| < |P(\Pi) \cap P(\hat{\sigma}_\alpha(\Pi'))|$.

So erhält man Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Phi$ mit $|P(\Pi) \cap P(\Pi')| < |P(\Pi) \cap P(\hat{\sigma}_{\alpha_1}(\Pi'))| < |P(\Pi) \cap P(\hat{\sigma}_{\alpha_2}(\hat{\sigma}_{\alpha_1}(\Pi')))| < \cdots$. Am Schluss hat man ein $\sigma \in W$ mit $P(\Pi) = P(\hat{\sigma}(\Pi'))$, d. h. $\Pi = \hat{\sigma}(\Pi')$. ∎

Bemerkung 11.3
Mit den obigen Bezeichnungen gilt für $\alpha, \beta \in \Pi$:

$$\frac{2\kappa_L(h_{\hat{\sigma}(\alpha)}, h_{\hat{\sigma}(\beta)})}{\kappa_L(h_{\hat{\sigma}(\alpha)}, h_{\hat{\sigma}(\alpha)})} = \frac{2\kappa_L(\sigma(h_\alpha), \sigma(h_\beta))}{\kappa_L(\sigma(h_\alpha), \sigma(h_\alpha))} = \frac{2\kappa_L(h_\alpha, h_\beta)}{\kappa_L(h_\alpha, h_\alpha)}$$

Dies zeigt, dass die Cartaninvarianten bezüglich Π und Π' übereinstimmen.

Satz
Seien L eine Lie-Algebra, $x, y \in L, \delta \in \operatorname{Der}(L)$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\delta^n([x,y]) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [\delta^i(x), \delta^{n-i}(y)]$$

BEWEIS:
Induktion nach n: Für $n = 0$ steht auf beiden Seien $[x, y]$. Sei also $n > 0$ und $\delta^{n-1}([x, y]) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} [\delta^i(x), \delta^{n-1-i}(y)]$. Dann ist:

$$
\begin{aligned}
\delta^n([x,y]) = \delta(\delta^{n-1}([x,y])) &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \delta([\delta^i(x), \delta^{n-1-i}(y)]) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} [\delta^{i+1}(x), \delta^{n-1-i}(y)] + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} [\delta^i(x), \delta^{n-i}(y)] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} [\delta^j(x), \delta^{n-j}(y)] + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} [\delta^j(x), \delta^{n-j}(y)] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} [\delta^j(x), \delta^{n-j}(y)]
\end{aligned}
$$

■

Bemerkung 11.4
Seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ nilpotent, d. h. $\varphi^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$
\exp(\varphi) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^k}{k!} = \mathrm{id}_V + \underbrace{\varphi + \frac{\varphi^2}{2} + \cdots + \frac{\varphi^n}{n!}}_{\text{nilpotent}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)
$$

Damit ist $\exp(\varphi)$ bijektiv. Für nilpotente Elemente $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ ist wie üblich $\varphi + \psi$ nilpotent und $\exp(\varphi + \psi) = \exp(\varphi)\exp(\psi)$.

Satz
Seien L eine Lie-Algebra, $x, y \in L$ und $\delta \in \mathrm{Der}(L)$ nilpotent. Dann gilt:

$$
[(\exp\delta)(x), (\exp\delta)(y)] = (\exp\delta)[x, y]
$$

Also ist $\exp(\delta)$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren.

BEWEIS:
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\delta^n = 0$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
[(\exp\delta)(x), (\exp\delta)(y)] &= \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\delta^i(x)}{i!}, \sum_{j=0}^{n} \frac{\delta^j(y)}{j!} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{l=0}^{k} \left[\frac{\delta^l(x)}{l!}, \frac{\delta^{k-l}(y)}{(k-l)!} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \frac{\delta^k([x,y])}{k!} = (\exp\delta)([x,y])
\end{aligned}
$$

■

Bemerkung 11.5
Nach dem obigen Satz gehört $\exp(\delta)$ für jede nilpotente Derivation δ einer Lie-Algebra L zur Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(L)$. Ein Element $a \in L$ heißt **ad-nilpotent**, falls die Abbildung $\mathrm{ad}_a \colon L \to L$ nilpotent ist. Für jedes ad-nilpotente Element $a \in L$ ist also $\exp(\mathrm{ad}_a) \in \mathrm{Aut}(L)$. Solche Automorphismen nennt man **innere Automorphismen** von L. Die von den inneren Automorphismen erzeugte Untergruppe von $\mathrm{Aut}(L)$ bezeichnet man mit $\mathrm{Int}(L)$. Für $a, b \in L$ und $\varphi \in \mathrm{Aut}(L)$ ist $(\varphi \circ \mathrm{ad}_a \circ \varphi^{-1})(b) = \varphi([a, \varphi^{-1}(b)]) = [\varphi(a), b] = \mathrm{ad}_{\varphi(a)}(b)$, also $\varphi \circ \mathrm{ad}_a \circ \varphi^{-1} = \mathrm{ad}_{\varphi(a)}$ und daher $\varphi \circ \exp(\mathrm{ad}_a) \circ \varphi^{-1} = \exp(\mathrm{ad}_{\varphi(a)})$, falls a ad-nilpotent. Dies zeigt, dass $\mathrm{Int}(L)$ ein Normalteiler von $\mathrm{Aut}(L)$ ist: $\mathrm{Int}(L) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(L)$.

Bemerkung 11.6
Sei L eine Lie-Algebra. Ein Element $x \in L$ heißt **stark ad-nilpotent**, falls Elemente $y \in L, \alpha \in \mathbb{C}^\times$ existieren mit $x \in L_\alpha(\mathrm{ad}_y)$. Für $\beta \in \mathbb{C}$ ist dann

$$\mathrm{ad}_x(L_\beta(\mathrm{ad}_y)) = [x, L_\beta(\mathrm{ad}_y)] \subseteq [L_\alpha(\mathrm{ad}_y), L_\beta(\mathrm{ad}_y)] \subseteq L_{\alpha+\beta}(\mathrm{ad}_y)$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist also $(\mathrm{ad}_x)^n(L_\beta(\mathrm{ad}_y)) \subseteq L_{n\alpha+\beta}(\mathrm{ad}_y)$. Wegen $L = \sum_{\beta \in \mathbb{C}} L_\beta(\mathrm{ad}_y)$ existiert also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(\mathrm{ad}_x)^n = 0$, d. h. x ist ad-nilpotent.

Wir setzen $\mathfrak{N}(L) := \{x \in L \colon x \text{ stark ad-nilpotent}\}$ und bezeichnen mit $\mathfrak{E}(L)$ die von den inneren Automorphismen $\exp(\mathrm{ad}_x)$ mit $x \in \mathfrak{N}(L)$ erzeugte Untergruppe von $\mathrm{Int}(L)$.

Satz
Sei $\varphi \colon K \to L$ ein Epimorphismus von Lie-Algebren. Dann ist $\varphi(\mathfrak{N}(K)) = \mathfrak{N}(L)$ und zu jedem $\tau \in \mathfrak{E}(L)$ existiert ein $\sigma \in \mathfrak{E}(K)$ mit $\tau \circ \varphi = \varphi \circ \sigma$. todo: Diagramm einfügenhelp: Wie sah das Diagramm aus?

BEWEIS:
Bekanntlich gilt für $\alpha \in \mathbb{C}^*, y \in K$: $\varphi(K_\alpha(\mathrm{ad}_y)) = L_\alpha(\mathrm{ad}_{\varphi(y)})$. Daher ist $\varphi(\mathfrak{N}(K)) = \mathfrak{N}(L)$.

Sei $\tau \in \mathfrak{E}(L)$. Sei o. B. d. A. $\tau = \exp(\mathrm{ad}_b)$ für ein $b \in \mathfrak{N}(L)$. Wähle $a \in K$ mit $b = \varphi(a)$. Für $z \in K$ gilt:

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \exp(\mathrm{ad}_a))(z) &= \varphi(z + [a, z] + 1/2[a, [a, z]] + \cdots) \\ &= \varphi(z) + [b, \varphi(z)] + 1/2[b, [b, \varphi(z)]] + \ldots = ((\exp \mathrm{ad}_b) \circ \varphi)(z)\end{aligned}$$

■

Satz 11.7
Für jeden Epimorphismus von Lie-Algebren $\varphi \colon K \to L$ gilt:

(i) Ist G eine Cartanalgebra von K, so ist $\varphi(G)$ eine Cartanalgebra von L.

(ii) Ist H eine Cartanalgebra von L und G eine Cartanalgebra von $\varphi^{-1}(H)$, so ist G eine Cartanalgebra von K.

BEWEIS:
(i) Mit G ist auch $\varphi(G)$ nilpotent. Sei $a \in K$ mit $\varphi(a) \in N_L(\varphi(G))$, d. h. $a \in N_K(G + \ker\varphi) = G + \ker\varphi$ nach den Satz 4.7 und Satz 4.11. Folglich ist $\varphi(a) \in \varphi(G)$.

(ii) Offenbar ist G nilpotent. Nach dem ersten Teil des Satzes ist $\varphi(G)$ eine Cartanalgebra von $\varphi(\varphi^{-1}(H)) = H$. Also folgt $\varphi(G) = H$. Für $x \in N_K(G)$ ist $\varphi(x) \in N_L(\varphi(G)) = N_L(H) = H$, d. h. $x \in \varphi^{-1}(H)$. Folglich ist $x \in N_{\varphi^{-1}(H)}(G) = G$. ■

Satz 11.8
Seien H_1, H_2 Cartanalgebren einer auflösbaren Lie-Algebra L. Dann existiert ein $\sigma \in \mathfrak{E}(L)$ mit $\sigma(H_1) = H_2$.

BEWEIS:
Beweis erfolgt durch Induktion nach der Dimension von L. Im Fall $\dim L \leq 1$ ist nichts zu tun. Denn dann ist $H_1 = H_2 = L$. Sei also nun $\dim L > 1$. Ist L nilpotent, ist $H_1 = L = H_2$. Sei L nicht nilpotent und $A \neq 0$ ein möglichst kleines abelsches Ideal in L. Dann sind $H_1 + A/_A, H_2 + A/_A$ Cartanalgebren von $L/_A$. Nach Induktion existiert ein $\tau \in \mathfrak{E}(L/_A)$ mit $\tau(H_1 + A/_A) = H_2 + A/_A$. Nach Satz 11.7 existiert ein $\sigma \in \mathfrak{E}(L)$ mit $\sigma(a) + A = \tau(a + A)$ für $a \in L$. Insbesondere ist

$$\alpha(a) + A = \tau(a + A) = \tau(0) = 0 \qquad \text{für } a \in A$$

Damit gilt $\sigma(a) \in A$. Somit ist gezeigt: $\sigma(A) = A$. Wegen $\sigma(H_1 + A)/_A = \tau(H_1 + A/_A) = H_2 + A/_A$ ist $\sigma(H_1 + A) = H_2 + A$. Insbesondere ist $\sigma(H_1)$ eine Cartanalgebra von $H_2 + A$. Im Fall $\dim H_2 + A < \dim L$ existiert ein $\rho \in \mathfrak{E}(H_2 + A)$ mit $\rho(\sigma(H_1)) = H_2$. Offenbar ist ρ Einschränkung eines Elements in $\mathfrak{E}(L)$, d. h. in diesem Fall sind wir fertig.

Sei also $L = H_2 + A = \sigma(H_1 + A)$. Dann ist auch $L = H_1 + A$. Nach Satz 4.11 existiert ein $x \in L$ mit $H_2 = L_0(\mathrm{ad}_x)$. Offenbar ist $A = A_0(\mathrm{ad}_x) \oplus A_*(\mathrm{ad}_x)$ mit $A_0(\mathrm{ad}_x) := A \cap L_0(\mathrm{ad}_x) = A \cap H_2 \subseteq H_2$ und $A_*(\mathrm{ad}_x) := A \cap L_*(\mathrm{ad}_x)$ und $L_*(\mathrm{ad}_x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{C}^*} L_\alpha(\mathrm{ad}_x)$. Dabei ist $[A, A_*(\mathrm{ad}_x)] = 0$ und $[H_2, A_*(\mathrm{ad}_x)] \subseteq A \cap [L_0(\mathrm{ad}_x), L_*(\mathrm{ad}_x)] \subseteq A \cap L_*(\mathrm{ad}_x) = A_*(\mathrm{ad}_x)$. Folglich ist $A_*(\mathrm{ad}_x) \subseteq L$ ein Ideal mit $A_*(\mathrm{ad}_x) \subseteq A$. Im Fall $A_*(\mathrm{ad}_x) = 0$ wäre $L = H_2 + A = H_2$ nilpotent. ↯
Nach Wahl von A ist $A = A_*(\mathrm{ad}_x) \subseteq L_*(\mathrm{ad}_x)$. Wegen $L = H_2 + A \subseteq L_0(\mathrm{ad}_x) \oplus L_*(\mathrm{ad}_x) = L$ ist also $A = L_*(\mathrm{ad}_x)$. Wegen $L = H_1 + A$ existieren $y \in H_1, z \in A$ mit $x = y + z$. Da $\mathrm{ad}_x |L_*(\mathrm{ad}_x)$ bijektiv ist, existiert ein $z' \in L_*(\mathrm{ad}_x) = A$ mit $z = \mathrm{ad}_x(z') = [x, z']$. Wegen $[z', [z', a]] = 0$ für alle $a \in L$ ist $(\mathrm{ad}_{z'})^2 = 0$, also $\exp(\mathrm{ad}_{z'}) = \mathrm{id}_L + \mathrm{ad}_{z'}$. Insbesondere ist $(\exp \mathrm{ad}_{z'})(x) = x + [z', x] = x - z = y$. Daher ist $H := L_0(\mathrm{ad}_y)$ auch eine Cartanalgebra von L. Wegen $y \in H_1$ ist $H_1 \subseteq L_0(\mathrm{ad}_y) = H$, also ist $H_1 = H = (\exp \mathrm{ad}_z)(H_2)$.

Offenbar ist $z' = z_1 + \cdots + z_n$ mit stark ad-nilpotenten Elementen $z_1, \ldots, z_n$ in $L_*(\mathrm{ad}_x) = A$. Für $i, j = 1, \ldots, n$ ist dabei $[\mathrm{ad}_{z_i}, \mathrm{ad}_{z_j}] = \mathrm{ad}_{[z_i, z_j]} = 0$. Daher ist $\exp(\mathrm{ad}_{z'}) = \exp(\sum_{i=1}^n \mathrm{ad}_{z_i}) = \prod_{i=1}^n (\exp \mathrm{ad}_{z_i}) \in \mathfrak{E}(L)$. ■

Definition 11.9
Eine **Borelalgebra** einer Lie-Algebra L ist eine maximale auflösbare Unteralgebra von L.

Bemerkung
Jede Cartanalgebra von L ist in einer Borelalgebra von L enthalten.

Beispiel
Sei L halbeinfach mit Cartanzerlegung $L = H \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathbb{C}e_\alpha$ wie üblich und sei $\Pi \subseteq \Phi$ Basis. Dann ist $B(\Pi) := H \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi,\text{pos. bezüglich } \Pi} \mathbb{C}e_\alpha$ eine Borelalgebra von L. Denn $N(\Pi) := \bigoplus_{\alpha\in\Phi,\text{pos. bezüglich } \Pi} \mathbb{C}e_\alpha$ ist ein Ideal in $B(\Pi)$ und $B(\Pi)/_{N(\Pi)} \cong H$ ist abelsch. Ferner ist $N(\Pi)$ nilpotent. Denn für positive $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Phi$ ist $[\ldots[e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}], e_{\alpha_3}], \ldots, e_{\alpha_n}] \in L_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}(H)$ und für $n \gg 0$ ist $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \notin \Phi$, also $L_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}(H) = 0$. Daher ist $B(\Pi)$ auflösbar.

Sei $K \subseteq L$ eine auflösbare Unteralgebra mit $B(\Pi) \subsetneq K$. Dann ist H auch eine Cartanalgebra von K. Daher ist $K = H \oplus \bigoplus_{\alpha\in H^*} K_\alpha(H)$ mit $K_\alpha(H) \subseteq L_\alpha(H)$ für $\alpha \in H^*$. Im Falle $K \not\subseteq B(\Pi)$ existiert eine positive Wurzel $\alpha \in \Phi$ mit $e_{-\alpha} \in K$. Wegen $e_\alpha \in B(\Pi) \subseteq K$ ist auch $h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}] \in K$. Daher ist $U := \mathbb{C}h_\alpha \oplus \mathbb{C}e_\alpha \oplus \mathbb{C}e_{-\alpha} \subseteq K$ eine Unteralgebra, also auflösbar. Andererseits ist $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha, [h_\alpha, e_\alpha] = \underbrace{\alpha(h_\alpha)}_{\neq 0} e_\alpha, [h_\alpha, e_{-\alpha}] = \underbrace{-\alpha(h_\alpha)}_{\neq 0} e_{-\alpha}$, also $U' = U$. ↯

Satz 11.10
Sei L eine halbeinfache Lie-Algebra mit der Cartanzerlegung $L = H \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathbb{C}e_\alpha$. Seien Π, Π' zwei Basen von Φ. Dann existiert ein $\tau \in \mathfrak{E}(L)$ mit $\tau(B(\Pi)) = B(\Pi')$.

BEWEIS:
Nach Satz 11.2 existiert ein σ in der Weylgruppe W mit $\hat{\sigma}(\Pi) = \Pi'$. Schreibe $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \sigma_{\alpha_r}$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Phi$. Dann ist $\hat{\sigma}_{\alpha_r}(\Pi)$ eine Basis von Φ, und es genügt zu zeigen, dass ein Element $\tau_r \in \mathfrak{E}(L)$ existiert mit $\tau_r(B(\Pi)) = B(\hat{\sigma}_{\alpha_r}(\Pi))$. Der Rest ist dann Induktion nach r.

Daher können wir annehmen: $\sigma = \sigma_\alpha$ für ein $\alpha \in \Phi$. Dann ist $H = \mathbb{C}h_\alpha \oplus (\mathbb{C}h_\alpha)^\perp$. mit $(\mathbb{C}h_\alpha)^\perp = \ker(\alpha)$. Denn für $h \in H$ gilt: $h \in (\mathbb{C}h_\alpha)^\perp \Leftrightarrow 0 = \underbrace{\kappa_L(h_\alpha, h)}_{\alpha(h)} \Leftrightarrow h \in \ker(\alpha)$).

Für $f_\alpha := \frac{2}{\alpha(h_\alpha)} e_{-\alpha} \in L_{-\alpha}(H)$ und $g_\alpha := \frac{2}{\alpha(h_\alpha)} h_\alpha \in H$ gilt ferner:

$$[e_\alpha, f_\alpha] = g_\alpha \qquad [g_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha \qquad [g_\alpha, f_\alpha] = -2f_\alpha$$

Außerdem sind $e_\alpha, -f_\alpha$ stark ad-nilpotent mit

$$\begin{aligned}
(\exp \operatorname{ad}_{e_\alpha})(e_\alpha) &= e_\alpha + [e_\alpha, e_\alpha] + 1/2[e_\alpha, [e_\alpha, e_\alpha]] + \cdots = e_\alpha \\
(\exp \operatorname{ad}_{e_\alpha})(f_\alpha) &= f_\alpha + [e_\alpha, f_\alpha] + 1/2[e_\alpha, [e_\alpha, f_\alpha]] + \cdots = f_\alpha + g_\alpha + 1/2[e_\alpha, g_\alpha] + \cdots \\
&= f_\alpha + g_\alpha - e_\alpha \\
(\exp \operatorname{ad}_{e_\alpha})(g_\alpha) &= g_\alpha + [e_\alpha, g_\alpha] + 1/2[e_\alpha, [e_\alpha, g_\alpha]] + \cdots = g_\alpha - 2e_\alpha \\
(\exp \operatorname{ad}_{-f_\alpha})(e_\alpha) &= \cdots = e_\alpha + g_\alpha - f_\alpha \\
(\exp \operatorname{ad}_{-f_\alpha})(f_\alpha) &= \cdots = f_\alpha \\
(\exp \operatorname{ad}_{-f_\alpha})(g_\alpha) &= \cdots = g_\alpha - 2f_\alpha
\end{aligned}$$

Daher ist $\tau := (\exp \operatorname{ad}_{e_\alpha}) \circ (\exp \operatorname{ad}_{-f_\alpha}) \circ (\exp \operatorname{ad}_{e_\alpha}) \in \mathfrak{E}(L)$ mit

$$\begin{aligned}
\tau(g_\alpha) &= ((\exp \operatorname{ad}_{e_\alpha}) \circ (\exp \operatorname{ad}_{-f_\alpha}))(g_\alpha - 2e_\alpha) = (\exp \operatorname{ad}_{e_\alpha})(g_\alpha - 2e_\alpha - 2g_\alpha) \\
&= (\exp \operatorname{ad}_{e_\alpha})(-g_\alpha - 2e_\alpha) = -g_\alpha + 2e_\alpha - 2e_\alpha = -g_\alpha
\end{aligned}$$

Ferner gilt für $h \in \ker(\alpha)$: $(\exp \operatorname{ad}_{e_\alpha})(h) = h + [e_\alpha, h] + 1/2[e_\alpha, [e_\alpha, h]] + \cdots = h - \alpha(h)e_\alpha + \cdots = h$ und $(\exp \operatorname{ad}_{-f_\alpha})(h) = \cdots = h$. Also $\tau(h) = h$. Daher ist τ eine Fortsetzung von σ_α.

Zum Beweis von $\tau(B(\Pi)) = B(\hat{\sigma}_\alpha(\Pi))$ genügt zu zeigen, dass $\tau(L_\beta(H)) = L_{\hat{\sigma}_\alpha(\beta)}(H)$ für $\beta \in \Phi$. Dies folgt, da für alle $\beta, \gamma \in \Phi$ gilt:

$$\begin{aligned}
[h_\gamma, \tau(e_\beta)] &= \tau([\tau^{-1}(h_\gamma), e_\beta]) = \tau([\sigma_\alpha^{-1}(h_\gamma), e_\beta]) = \tau(\beta(\sigma_\alpha^{-1}(h_\gamma))e_\beta) = \beta(\sigma_\alpha^{-1}(h_\gamma))\tau(e_\beta) \\
&= \kappa_L(h_\beta, \sigma_\alpha^{-1}(h_\gamma))\tau(e_\beta) = \kappa_L(\sigma_\alpha(h_\beta), h_\gamma)\tau(e_\beta) = \kappa_L(h_{\hat{\sigma}_\alpha(\beta)}, h_\gamma)\tau(e_\beta) \\
&= (\hat{\sigma}_\alpha(\beta))(h_\gamma)\tau(e_\beta)
\end{aligned}$$
∎

Satz 11.11
Für jede Lie-Algebra L gilt:

(i) Für jede Borelalgebra $B \subseteq L$ ist $B = N_L(B)$. (Borelalgebren sind immer selbstnormalisierend.)

(ii) Die Abbildung $B \mapsto B/_{\mathrm{Rad}(L)}$ ist eine Bijektion zwischen den Mengen der Borelalgebren in L einerseits und in der Lie-Algebra $L/_{\mathrm{Rad}(L)}$.

Beweis:

(i) Sei $x \in N_L(B)$. Dann ist $[B + \mathbb{C}x, B + \mathbb{C}x] \subseteq B$. Daher ist $B + \mathbb{C}x$ eine auflösbare Unteralgebra von L. Folglich ist $B + \mathbb{C}x = B$, d. h. $x \in B$.

(ii) Für jede Borelalgebra $B \subseteq L$ ist $B + \mathrm{Rad}(L)$ eine auflösbare Unteralgebra von L. Denn $\mathrm{Rad}(L)$ ist auflösbares Ideal in L und $B + \mathrm{Rad}(L)$ und $B + \mathrm{Rad}(L)/_{\mathrm{Rad}(L)} \cong B/_{B \cap \mathrm{Rad}(L)}$ ist auflösbar. Also ist $B + \mathrm{Rad}(L) = B$, d. h. $\mathrm{Rad}(L) \subseteq B$. Daher ist $B/_{\mathrm{Rad}(L)} \subseteq L/_{\mathrm{Rad}(L)}$ eine auflösbare Unteralgebra. Sei $\overline{C} \in L/_{\mathrm{Rad}(L)}$ eine Borelalgebra mit $B/_{\mathrm{Rad}(L)} \subseteq \overline{C}$. Dann ist $\overline{C} = C/_{\mathrm{Rad}(L)}$ mit einer auflösbaren Unteralgebra $C \subseteq L$. Wegen $B \subseteq C$ folgt, $B = C$. Daher ist $B/_{\mathrm{Rad}(L)} = C/_{\mathrm{Rad}(L)} = \overline{C} \subseteq L/_{\mathrm{Rad}(L)}$ eine Borelalgebra. Dies zeigt, dass die angegebene Abbildung wohldefiniert und injektiv ist. Zum Beweis der Surjektivität sei $\overline{C} \subseteq L/_{\mathrm{Rad}(L)}$ eine Borelalgebra. Dann ist $\overline{C} = C/_{\mathrm{Rad}(L)}$ mit einer auflösbaren Unteralgebra C von L. Sei $B \subseteq L$ Borelalgebra mit $C \subseteq B$. Dann ist $\mathrm{Rad}(L) \subseteq B$, und $B/_{\mathrm{Rad}(L)} \subseteq L/_{\mathrm{Rad}(L)}$ ist eine Borelalgebra. Wegen $\overline{C} = C/_{\mathrm{Rad}(L)} \subseteq B/_{\mathrm{Rad}(L)}$ ist $\overline{C} = B/_{\mathrm{Rad}(L)}$. Damit ist die Surjektivität bewiesen. ∎

Satz 11.12
Sei B_1, B_2 Borelalgebren einer beliebigen Lie-Algebra L. Dann existiert ein Element $\sigma \in \mathfrak{E}(L)$ mit $\sigma(B_1) = B_2$.

Beweis:
([1], pp. 84–86) Der Satz 11.7 und der Satz 11.11 liefern eine Reduktion auf den Fall, dass L halbeinfach ist. Dann folgt eine Induktion nach der Dimension von $B_1 \cap B_2$. Dabei gehen noch andere Dinge ein, die wir in der Vorlesung nicht behandelt haben (z. B. die abstrakte Jordanzerlegung). ∎

Satz 11.13
Seien H_1, H_2 Cartanalgebren einer Lie-Algebra L. Dann existiert ein $\tau \in \mathfrak{E}(L)$ mit $\tau(H_1) = H_2$.

BEWEIS:
Für $i = 1, 2$ sei $B_i \subseteq L$ eine Borelalgebra mit $H_i \subseteq B_i$. Nach Satz 11.12 existiert ein $\sigma \in \mathfrak{E}(L)$ mit $\sigma(B_1) = B_2$. Dann sind $\sigma(H_1)$ und H_2 Cartanalgebren von der Borelalgebra B_2. Nach Satz 11.8 existiert ein $\rho \in \mathfrak{E}(B_2)$ mit $\rho(\sigma(H_1)) = H_2$. Nach Definition von $\mathfrak{E}(L)$ kann man das ρ zu einem $\rho' \in \mathfrak{E}(L)$ fortsetzen. Also ist $\tau := \rho' \circ \sigma \in \mathfrak{E}(L)$ mit $\tau(H_1) = H_2$. ■

Bemerkung
Die Dimension einer Cartanalgebra von L nennt man den **Rang** von L und nach dem Satz 11.13 hat jede halbeinfache Lie-Algebra ein eindeutig bestimmtes Dynkindiagramm, unabhängig von der Wahl der Cartanalgebra und der Wahl der Basis des Wurzelsystems.

Literaturverzeichnis

[1] James E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer New York, 3. Auflage 1997

[2] Karin Erdmann und Mark J. Wildon, Introduction to Lie Algebras, Springer SUMS, 1. Auflage, 2006

[3] Ian Stewart, Lie Algebras (Lecture notes in mathematics), Springer, 1970

Index