Ringtheorie

Prof. Dr. Burkhard Külshammer

Semester: SS 2011

Vorwort

Dieses Dokument wurde als Skript für die auf der Titelseite genannte Vorlesung erstellt und wird jetzt im Rahmen des Projekts „Vorlesungsskripte der Fakultät für Mathematik und Informatik" weiter betreut. Das Dokument wurde nach bestem Wissen und Gewissen angefertigt. Dennoch garantiert weder der auf der Titelseite genannte Dozent, die Personen, die an dem Dokument mitgewirkt haben, noch die Mitglieder des Projekts für dessen Fehlerfreiheit. Für etwaige Fehler und dessen Folgen wird von keiner der genannten Personen eine Haftung übernommen. Es steht jeder Person frei, dieses Dokument zu lesen, zu verändern oder auf anderen Medien verfügbar zu machen, solange ein Verweis auf die Internetadresse des Projekts http://uni-skripte.lug-jena.de/ enthalten ist.

Diese Ausgabe trägt die Versionsnummer 3650 und ist vom 27. September 2011. Eine neue Ausgabe könnte auf der Webseite des Projekts verfügbar sein.

Jeder ist dazu aufgerufen, Verbesserungen, Erweiterungen und Fehlerkorrekturen für das Skript einzureichen bzw. zu melden oder diese selbst einzupflegen – einfach eine E-Mail an die Mailingliste <uni-skripte@lug-jena.de> senden. Weitere Informationen sind unter der oben genannten Internetadresse verfügbar.

Hiermit möchten wir allen Personen, die an diesem Skript mitgewirkt haben, vielmals danken:

- *Jens Kubieziel <jens@kubieziel.de> (2011)*

Inhaltsverzeichnis

Auflistung der Theoreme

Sätze

Definitionen und Festlegungen

1. Kategorien und Funktoren

Definition 1.1 (Kategorie)
Eine **Kategorie** besteht aus

(i) einer **Klasse** $\mathcal{C}$ und die Elemente einer Klasse heißen **Objekt**e,

(ii) einer Menge $\mathcal{C}(A,B)$ und die Elemente der Menge heißen **Morphismen** von A nach B.[1] Wir schreiben $A \xrightarrow{f} B$ oder $f\colon A \to B$ zu jedem Paar (A,B) von Objekten in $\mathcal{C}$,

(iii) einer Abbildung $\mathcal{C}(B,C) \times \mathcal{C}(A,B) \to \mathcal{C}(A,C)$ mit $(g,f) \mapsto g \circ f$. Diese Abbildung heißt **Komposition**. Dabei verlangt man:

   a) $\mathcal{C}(A,B) \cap \mathcal{C}(C,D) = \emptyset$, falls $(A,B) \neq (C,D)$ für alle $A,B,C,D \in \mathcal{C}$ gilt.

   b) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ für alle $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ in $\mathcal{C}$.

   c) Für alle $A \in \mathcal{C}$ existiert ein $\mathrm{id}_A \in \mathcal{C}(A,A)$ mit $f \circ \mathrm{id}_A = f$ und $\mathrm{id}_A \circ g = g$ für alle $A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$ in $\mathcal{C}$.

Bemerkung 1.1

(i) Sind Morphismen und Kompositionen klar, so sagt man auch, $\mathcal{C}$ ist eine Kategorie.

(ii) Bekanntlich ist die „Gesamtheit“ aller Mengen keine Menge. Um solche Widersprüche zu vermeiden, spricht man von „Klassen“. Wir werden Klassen nicht genau definieren. Aber z. B. ist die Gesamtheit aller Mengen eine Klasse.

(iii) Für $A \in \mathcal{C}$ ist die **Identität** id_A eindeutig bestimmt.

Beispiel 1.1

(a) Mengen und Abbildungen bilden eine Kategorie **Set**. Für $A,B \in \mathbf{Set}$ ist $\mathbf{Set}(A,B) = \mathrm{Abb}(A,B)$ die Menge aller Abbildungen von A nach B.

(b) Gruppen und Gruppenhomomorphismen bilden eine Kategorie **Gr**.

(c) Für jeden Körper K bilden die K-Vektorräume und K-linearen Abbildungen eine Kategorie ${}_K\mathbf{Vec}$.

Definition 1.2 (Teilkategorie)
Eine Kategorie $\mathcal{D}$ heißt **Teilkategorie** einer Kategorie $\mathcal{C}$, falls gilt:

---

[1] Nach [12] sind Objekte immer Mengen.

(i) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A \in \mathcal{C}$

(ii) $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}(A, B) \subseteq \mathcal{C}(A, B)$

(iii) Die Komposition in $\mathcal{D}$ ist eine Einschränkung der Komposition in $\mathcal{C}$. Identitäten sind eindeutig bestimmt.

Gilt im zweiten Punkt oben die Gleichheit, so heißt $\mathcal{D}$ **volle Teilkategorie** von $\mathcal{C}$.

Beispiel 1.2
(a) Die endlichen Mengen bilden eine volle Teilkategorie **set** von **Set**.

(b) Die endlichen Gruppen bilden eine volle Teilkategorie **gr** von **Gr**.

(c) Die endlich-dimensionalen K-Vektorräume bilden eine volle Teilkategorie $_K$**vec** von $_K$**Vec**.

(d) Die abelschen Gruppen bilden eine volle Teilkategorie **Ab** von **Gr**.

(e) Die endlichen abelschen Gruppen bilden eine volle Teilkategorie **ab** von **Ab**.

(f) Mengen und injektive Abbildungen bilden eine nicht volle Teilkategorie von **Set**.

(g) **Gr** ist *keine* Teilkategorie von **Set**.

Definition 1.3 (Funktor)
Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein **Funktor** von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ besteht aus:

(1) einer „Abbildung“ $\Phi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ mit $A \mapsto \Phi A$

(2) einer Abbildung $\mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(\Phi A, \Phi B)$ mit $f \mapsto \Phi f$ zu jedem Paar (A, B) von Objekten in $\mathcal{C}$.

Dabei verlangt man:

(i) $\Phi(g \circ f) = \Phi(g) \circ \Phi(f)$ für alle $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ in $\mathcal{C}$.

(ii) $\Phi(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\Phi(A)}$ für $A \in \mathcal{C}$.

Wir schreiben: $\Phi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ oder $\mathcal{C} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{D}$.

Beispiel 1.3
(a) Der **Vergissfunktor Gr** $\to$ **Set**, der jeder Gruppe die zugrundeliegende Menge zuordnet. Analog hat man Vergissfunktoren $_K$**Vec** $\to$ **Set**, $_K$**Vec** $\to$ **Ab** usw.

(b) Für jede Kategorie $\mathcal{C}$ hat man den **Identitätsfunktor** $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ mit $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} A = A$ und $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(f) = f$ für alle $A \xrightarrow{f} B$ in $\mathcal{C}$.

(c) Für jedes Objekt X in einer Kategorie $\mathcal{C}$ existiert der Funktor $\mathcal{C}(X, ?)\colon \mathcal{C} \to$ **Set** mit $\mathcal{C}(X, ?)(A) := \mathcal{C}(X, A)$ und $\mathcal{C}(X, ?)(f) := \mathcal{C}(X, f)$, wobei $\mathcal{C}(X, f)\colon \mathcal{C}(X, A) \to \mathcal{C}(X, B)$ mit $g \mapsto f \circ g$ für alle $A \xrightarrow{f} B$ gilt.

Bemerkung 1.2
Ein Funktor $\mathcal{C} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{D}$ heißt **treu** oder **voll**, falls für alle $A, B \in \mathcal{C}$ die Abbildung $\mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(\Phi A, \Phi B)$ mit $f \mapsto \Phi f$ injektiv oder surjektiv ist.

Bemerkung 1.3
Für Funktoren $\mathcal{C} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{D} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{E}$ definiert man in naheliegender Weise einen Funktor $\Psi \circ \Phi \colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$. Für die so definierte **Komposition** von Funktoren gilt:

(i) $(\Omega \circ \Psi) \circ \Phi = \Omega \circ (\Psi \circ \Phi)$ für Funktoren $\mathcal{C} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{D} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{E} \xrightarrow{\Omega} \mathcal{F}$.

(ii) $\Phi \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} = \Phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \circ \Phi$ für Funktoren $\Phi \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

Definition 1.4 (Isomorphismus)
Ein Morphismus $f \colon A \to B$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **Isomorphismus** (iso), falls ein $g \in \mathcal{C}(B, A)$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$ existiert.

Bemerkung 1.4 (Inverses)
Gegebenenfalls ist g durch f eindeutig bestimmt. Man bezeichnet g als **Inverses** von f und schreibt $g = f^{-1}$. Dann ist auch f^{-1} ein Isomorphismus in $\mathcal{C}$ und $(f^{-1})^{-1} = f$.

Beispiel 1.4

(i) Stets ist id_A ein Isomorphismus in $\mathcal{C}$ und $\mathrm{id}_A^{-1} = \mathrm{id}_A$.

(ii) Hat man Isomorphismen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ in $\mathcal{C}$, so ist $g \circ f \colon A \to C$ ein Isomorphismus in $\mathcal{C}$ und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(iii) Die Isomorphismen in **Set** sind genau die Bijektionen und die Isomorphismen in **Gr** sind genau die Gruppenisomorphismen.

Satz 1.1
Für jeden Funktor $\Phi \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und jeden Isomorphismus $f \colon A \to B$ in $\mathcal{C}$ ist $\Phi f \colon \Phi A \to \Phi B$ ein Isomorphismus in $\mathcal{D}$ mit $(\Phi f)^{-1} = \Phi(f^{-1})$.

BEWEIS:
$\Phi(f^{-1}) \circ \Phi f = \Phi(f^{-1} \circ f) = \Phi(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\Phi(A)}$ und $\Phi f \circ \Phi(f^{-1}) = \Phi(f \circ f^{-1}) = \Phi(\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{\Phi(B)}$. ■

Definition 1.5 (Isomorphe Objekte)
Objekte A und B in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißen **isomorph**, falls ein Isomorphismus $f \in \mathcal{C}(A, B)$ existiert. Wir schreiben, $A \cong_{\mathcal{C}} B$.

Bemerkung 1.5

(i) Man zeigt leicht, dass $\cong_{\mathcal{C}}$ ein Äquivalenzrelation ist.

(ii) Aus dem Satz 1.1 folgt, dass für Funktoren $\mathcal{C} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{D}$ und Objekte $A, B \in \mathcal{C}$ gilt, $A \cong_{\mathcal{C}} B \Rightarrow \Phi A \cong_{\mathcal{D}} \Phi B$.

Definition 1.6 (mono, epi)
Ein Morphismus $f \colon A \to B$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt:

(i) **mono**, falls für alle $g, h\colon C \to A$ in $\mathcal{C}$ mit $f \circ g = f \circ h$ gilt, $g = h$.

(ii) **epi**, falls für alle $g, h\colon B \to C$ in $\mathcal{C}$ mit $g \circ f = h \circ f$ gilt, $g = h$.

Satz 1.2
Für alle Mengen und Abbildungen $f\colon A \to B$ gilt:

(i) f mono in **Set** $\Leftrightarrow$ f injektiv.

(ii) f epi in **Set** $\Leftrightarrow$ f surjektiv.

BEWEIS:

(i) „$\Rightarrow$" Seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$. Dann sind $g\colon \{x\} \to A$ mit $x \mapsto x$ und $h\colon \{y\} \to A$ mit $y \mapsto y$ Abbildungen mit $f \circ g = f \circ h$. Ist f mono, so folgt, $g = h$, d. h. $x = y$.

„$\Leftarrow$" Seien $g, h\colon C \to A$ Abbildungen mit $f \circ g = f \circ h$. Für $x \in C$ ist dann $f(g(x)) = f(h(x))$. Ist f injektiv, so folgt, $g(x) = h(x)$. Also $g = h$.

(ii) „$\Rightarrow$" Sei f epi und $y \in B$. Wir definieren $g\colon B \to \{0,1\}$ durch $g(y) := 1$ und $g(x) := 0$ sonst. Weiterhin definieren wir $h\colon B \to \{0,1\}$ durch $h(x) := 0$ für alle $x \in B$. Wäre $y \notin \mathrm{Bld}(f)$, so wäre $g \circ f = h \circ f$, also $g = h$ ↯ Also: $y \in \mathrm{Bld}(f)$. Daher ist f surjektiv.

„$\Leftarrow$" Seien $g, h\colon B \to C$ Abbildungen mit $g \circ f = h \circ f$, d. h. $g(f(a)) = h(f(a))$ für alle $a \in A$. Ist f surjektiv, so folgt, $g(b) = h(b)$ für alle $b \in B$, d. h. $g = h$. ■

Bemerkung 1.6

(i) Der Satz gilt *nicht* in allen Kategorien, deren Objekte Mengen sind.

(ii) Im Allgemeinen existieren Morphismen, die mono und epi, aber keine Isomorphismen sind.

Satz 1.3
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ in $\mathcal{C}$. Dann folgt:

(i) f, g mono (epi) $\Rightarrow$ $g \circ f$ mono (epi).

(ii) $g \circ f$ mono (epi) $\Rightarrow$ f mono (g epi).

BEWEIS:
Der Beweis erfolgt in der Übung (siehe Übungsaufgabe 7). ■

Definition 1.7 (Sektion, Retraktion)
Ein Morphismus $f\colon A \to B$ in einer Kategorie heißt **Sektion** oder **Retraktion**, falls ein $g \in \mathcal{C}(B, A)$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ oder $f \circ g = \mathrm{id}_B$ existiert.

Satz 1.4
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $f\colon A \to B$ in $\mathcal{C}$. Dann gilt:

(i) f Sektion (Retraktion) $\Rightarrow$ f mono (epi).

(ii) f Sektion und Retraktion $\Rightarrow f$ Isomorphismus.

BEWEIS:
Der Beweis erfolgt in der Übung (siehe Übungsaufgabe 8) ■

Definition 1.8 (Initial-, Finalobjekt)
Ein Objekt A in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **Initialobjekt** oder **Finalobjekt**, falls $|\mathcal{C}(A,B)| = 1$ oder $|\mathcal{C}(B,A)| = 1$ für alle $B \in \mathcal{C}$. Ist $A \in \mathcal{C}$ Initial- und Finalobjekt, so heißt A **Nullobjekt** in $\mathcal{C}$.

Beispiel 1.5
In **Set** ist $\emptyset$ ein Initialobjekt und jede einelementige Menge ist ein Finalobjekt. Jedoch enthält **Set** kein Nullobjekt.

Satz 1.5
Sind A und A' Initialobjekte oder Finalobjekte einer Kategorie $\mathcal{C}$, so ist $A \cong A'$.

BEWEIS:
Sei $\mathcal{C}(A, A') = \{f\}$ und $\mathcal{C}(A', A) = \{g\}$. Wegen $\mathcal{C}(A, A) = \{\mathrm{id}_A\}$ ist $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Analog ist $f \circ g = \mathrm{id}_{A'}$, d. h. f ist ein Isomorphismus. Also $A \cong A'$. ■

2. Natürliche Transformationen und Äquivalenzen

Definition 2.1 (Natürliche Transformation)
Seien $\Phi, \Psi \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Eine **natürliche Transformation** von Φ nach Ψ ist eine „Familie“ $\tau = (\tau_A)_{A \in \mathcal{C}}$ von Elementen $\tau_A \in \mathcal{D}(\Phi A, \Psi A)$ mit $(\Psi f) \circ \tau_A = \tau_B \circ (\Phi f)$ für $A, B \in \mathcal{C}$ und $f \in \mathcal{C}(A, B)$. Wir schreiben, $\tau \colon \Phi \Rightarrow \Psi$.

$$\begin{tikzcd}
\Phi A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "\Phi f"] & \Psi A \arrow[d, "\Psi f"] \\
\Phi B \arrow[r, "\tau_B"] & \Psi B
\end{tikzcd}$$

Beispiel 2.1
Sei K ein Körper und $\Phi \colon {}_K\mathbf{Vec} \to {}_K\mathbf{Vec}$ mit $V \mapsto V^{**}$ der Funktor, der jedem K-Vektorraum V seinen Bidualraum $V^{**} = \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(V, K), K)$ zuordnet. Ferner sei $\varepsilon_V \colon V \to V^{**}$ kanonisch für $v \in V$ ist also $\varepsilon_V(v) \colon \mathrm{Hom}_K(V, K) \to K$ mit $\lambda \mapsto \lambda(v)$. Dann ist $\varepsilon := (\varepsilon_V)_{V \in {}_K\mathbf{Vec}} \colon \mathrm{Id}_{{}_K\mathbf{Vec}} \Rightarrow \Phi$ eine natürliche Transformation:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varepsilon_V"] \arrow[d, "f"] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\
W \arrow[r, "\varepsilon_W"] & W^{**}
\end{tikzcd}$$

Denn für $V, W \in {}_K\mathbf{Vec}$ und $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist $\varepsilon_W \circ f = f^{**} \circ \varepsilon_V$.

Bemerkung 2.1

(i) Für Funktoren $\Phi, \Psi, \Omega \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und natürliche Transformationen $\sigma \colon \Phi \Rightarrow \Psi$, $\tau \colon \Psi \Rightarrow \Omega$ ist auch die **Komposition** $\tau \circ \sigma := (\tau_A \circ \sigma_A)_{A \in \mathcal{C}} \colon \Phi \Rightarrow \Omega$ eine natürliche Transformation:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "\Phi"{name=F}] \arrow[r, "\Psi"{name=P, description}] \arrow[r, bend right=60, "\Omega"'{name=O}] & \mathcal{D} \arrow[Rightarrow, from=F, to=P, "\sigma"] \arrow[Rightarrow, from=P, to=O, "\tau"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Phi A \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d, "\Phi f"] & \Psi A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "\Psi f"] & \Omega A \arrow[d, "\Omega f"] \\ \Phi B \arrow[r, "\sigma_B"] & \Psi B \arrow[r, "\tau_B"] & \Omega B \end{tikzcd}$$

Offenbar ist die Komposition von natürlichen Transformationen assoziativ.

(ii) Für Funktoren $\Gamma\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, $\Phi, \Psi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $\Delta\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ und jede natürliche Transformation $\tau\colon \Phi \Rightarrow \Psi$ sind auch $\tau \circ \Gamma := (\tau_{\Gamma_B})_{B \in \mathcal{B}}\colon \Phi \circ \Gamma \Rightarrow \Psi \circ \Gamma$, $\Delta \circ \tau := (\Delta\tau_C)_{C \in \mathcal{C}}\colon \Delta \circ \Phi \Rightarrow \Delta \circ \Psi$ natürliche Transformationen:

$$\begin{tikzcd} \Phi\Gamma A \arrow[r, "\tau_{\Gamma_A}"] \arrow[d, "\Phi\Gamma f"] & \Psi\Gamma A \arrow[d, "\Psi\Gamma f"] \\ \Phi\Gamma B \arrow[r, "\tau_{\Gamma_B}"'] & \Psi\Gamma B \end{tikzcd}$$

Definition 2.2 (Natürliche Äquivalenz)
Eine natürliche Transformation $\tau\colon \Phi \Rightarrow \Psi$ zwischen Funktoren $\Phi, \Psi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt **natürliche Äquivalenz**, falls $\sigma_A\colon \Phi A \to \Psi A$ für $A \in \mathcal{C}$ ein Isomorphismus in $\mathcal{D}$ ist.

Bemerkung 2.2
Gegebenenfalls ist $\sigma^{-1} := (\sigma_A^{-1})_{A \in \mathcal{C}}\colon \Psi \Rightarrow \Phi$ auch eine natürliche Äquivalenz und $(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$. Für jeden weiteren Funktor $\Omega\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und jede weitere natürliche Äquivalenz $\tau\colon \Psi \Rightarrow \Omega$ ist auch $\tau \circ \sigma\colon \Phi \Rightarrow \Omega$ eine natürliche Äquivalenz und $(\varphi \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \tau^{-1}$.

Beispiel 2.2

(i) $\mathrm{id}_\Phi := (\mathrm{id}_{\Phi_A})_{A \in \mathcal{C}}\colon \Phi \Rightarrow \Phi$ ist eine natürliche Äquivalenz.

(ii) Seien K ein Körper und $\Phi\colon {}_K\mathbf{vec} \to {}_K\mathbf{vec}$ mit $V \mapsto V^{**}$ und $\varepsilon\colon \mathrm{Id}_{{}_K\mathbf{vec}} \Rightarrow \Phi$ wie in Beispiel 2.1 (aber mit ${}_K\mathbf{vec}$ statt ${}_K\mathbf{Vec}$). Dann ist ε eine natürliche Äquivalenz.

Definition 2.3 (Natürlich äquivalente Funktoren)
Funktoren $\Phi, \Phi'\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißen **natürlich äquivalent**, falls eine natürliche Äquivalenz $\tau\colon \Phi \Rightarrow \Phi'$ existiert. Dies stellt eine höhere Stufe des Isomorphiebegriffs dar. Wir schreiben $\Phi \sim \Phi'$.

Bemerkung 2.3
Nach der Bemerkung 2.2 ist $\sim$ ein Äquivalenzrelation.

Satz 2.1
Für Funktoren $\Phi, \Phi'\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $\Psi, \Psi'\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ mit $\Phi \sim \Phi'$ und $\Psi \sim \Psi'$ gilt, $\Psi \circ \Phi \sim \Psi' \circ \Phi'$.

Beweis:
Ist $\tau\colon \Phi \Rightarrow \Phi'$ eine natürliche Äquivalenz, so auch $\Psi \circ \tau = (\Psi\tau_A)_{A\in\mathcal{C}}\colon \Psi\circ\Phi \Rightarrow \Psi\circ\Phi'$. Vergleiche dazu Bemerkung 2.2 und Satz 1.1. Analog ist $\Psi\circ\Phi' \sim \Psi'\circ\Phi'$. Daraus folgt die Behauptung. ∎

Satz 2.2
Seien $\mathcal{C} \rightleftarrows^{\Phi}_{\Psi} \mathcal{D}$ mit $\Psi\circ\Phi \sim \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ und $\Phi\circ\Psi \sim \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ Funktoren[1]. Für $A, B \in \mathcal{C}$ ist dann $\Phi_{AB}\colon \mathcal{C}(A,B) \to \mathcal{D}(\Phi A, \Phi B)$ mit $f \mapsto \Phi f$ bijektiv. Für $f \in \mathcal{C}(A,B)$ gilt dabei, f mono (epi) $\Leftrightarrow$ Φf mono (epi).

Beweis:
Sei $\tau\colon \Psi\circ\Phi \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ eine natürliche Äquivalenz und $f, g \in \mathcal{C}(A,B)$ mit $\Phi f = \Phi g$, also auch $\Psi\Phi f = \Psi\Phi g$. Dann:

$$f = \tau_B \circ \Psi\Phi f \circ \tau_A^{-1} = \tau_B \circ \Psi\Phi g \circ \tau_A^{-1} = g$$

$$\begin{tikzcd}
\Psi\Phi A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, shift right, "\Psi\Phi f"'] \arrow[d, shift left, "\Psi\Phi g"] & A \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \\
\Psi\Phi B \arrow[r, "\tau_B"] & B
\end{tikzcd}$$

Dies zeigt, Φ_{AB} ist injektiv. Analog ist Ψ_{CD} für alle $C, D \in \mathcal{D}$ injektiv.

Zum Beweis der Surjektivität von Φ_{AB} sei $U \in \mathcal{D}(\Phi A, \Phi B)$. Dann ist $f := \tau_B \circ \Psi U \circ \tau_A^{-1} \in \mathcal{C}(A,B)$. Nun betrachten wir die folgenden kommutativen Diagramme:

$$\begin{tikzcd}
\Psi\Phi A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "\Psi U"] & A \arrow[d, "f"] \\
\Psi\Phi B \arrow[r, "\tau_B"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Psi\Phi A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "\Psi\Phi f"] & A \arrow[d, "f"] \\
\Psi\Phi B \arrow[r, "\tau_B"] & B
\end{tikzcd}$$

Man erhält, $\Psi U = \tau_B^{-1} \circ f \circ \tau_A = \Psi\Phi f$. Da $\Psi_{\Phi A, \Phi B}$ injektiv ist, folgt, $U = \Phi f$. Damit ist die Surjektivität von Φ_{AB} bewiesen.

Sei nun $f \in \mathcal{C}(A,B)$ mono, $D \in \mathcal{D}$ und $g, h \in \mathcal{D}(D, \Phi A)$ mit $(\Phi f)\circ g = (\Phi f)\circ h$ (zeigen, das man kürzen kann). Die Anwendung des Funktors Ψ liefert dann: $(\Psi\Phi f)\circ\Psi g = (\tau_B^{-1}\circ f\circ\tau_A)$ und $(\Psi\Phi f)\circ\Psi h = (\tau_B^{-1}\circ f\circ\tau_A)$. Daraus folgt, $f\circ\tau_A\circ\Psi g = f\circ\tau_A\circ\Psi h$, d. h. $\tau_A\circ\Psi g = \tau_A\circ\Psi h$, da f mono, und damit $\Psi g = \Psi h$, da τ_A Isomorphismus. Weil $\Psi_{D,\Phi A}$ injektiv ist, folgt, $g = h$.

Sei umgekehrt Φf mono. Dann ist analog $\Psi\Phi f$ mono. Folglich ist $f = \tau_B \circ \Psi\Phi f \circ \tau_A^{-1}$ wieder mono, da τ_A^{-1} und τ_B mono.

Der Beweis zu epi geht analog. ∎

[1] Der Fall kommt recht häufig vor.

Definition 2.4 (Äquivalente Kategorien)
Zwei Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ heißen **äquivalent**, falls Funktoren $\mathcal{C} \rightleftarrows^{\Phi}_{\Psi} \mathcal{D}$ existieren mit $\Psi \circ \Phi \sim \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ und $\Phi \circ \Psi \sim \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$.

Wir schreiben, $\mathcal{C} \approx \mathcal{D}$.

Bemerkung 2.4
Man zeigt leicht, dass die Äquivalenz $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist.

Definition 2.5 (Rechts- und linksadjungierte Funktoren)
Seien $\mathcal{C} \rightleftarrows^{\Phi}_{\Psi} \mathcal{D}$ Funktoren. Man nennt Φ **linksadjungiert** zu Ψ und Ψ **rechtsadjungiert** zu Φ, falls es Bijektionen $\nu_{AB}\colon \mathcal{D}(\Phi A, B) \to \mathcal{C}(A, \Psi B)$ für $A \in \mathcal{C}$ und $B \in \mathcal{D}$ existieren derart, dass für alle Morphismen $f\colon A \to A'$ in $\mathcal{C}$ und $g\colon B \to B'$ folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(\Phi A', B) \arrow[r, "\nu_{A'B}"] \arrow[d, "\mathcal{D}(\Phi f, B)"] & \mathcal{C}(A', \Psi B) \arrow[d, "\mathcal{C}(f, \Psi B)"] \\
\mathcal{D}(\Phi A, B) \arrow[r, "\nu_{AB}"] & \mathcal{C}(A, \Psi B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(\Phi A, B) \arrow[r, "\nu_{AB}"] \arrow[d, "\mathcal{D}(\Phi A, g)"] & \mathcal{C}(A, \Psi B) \arrow[d, "\mathcal{C}(A, \Psi g)"] \\
\mathcal{D}(\Phi A, B') \arrow[r, "\nu_{A'B}"] & \mathcal{C}(A, \Psi B')
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 2.5
Das bedeutet, dass für $s \in \mathcal{D}(\Phi A', B)$ und $t \in \mathcal{D}(\Phi A, B)$ gilt: $\nu_{AB}(s \circ \Phi f) = \nu_{A'B}(s) \circ f$ und $\nu_{AB'}(g \circ t) = \Psi g \circ \nu_{AB}(t)$.

Beispiel 2.3
Seien $\mathcal{C} := \mathcal{D} := \mathbf{Set}$ und $S \in \mathbf{Set}$. Sei $\Phi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ der Funktor mit $\Phi A := A \times S$ für $A \in \mathbf{Set}$ und $\Phi f := f \times \mathrm{id}_S$ für jeden Morphismus f in $\mathbf{Set}$. Außerdem sei $\Psi := \mathrm{Abb}(S, ?)\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ wie in Beispiel 1.3. Es ist zu zeigen, dass Φ linksadjungiert zu Ψ ist. Dann brauchen wir für $A, B \in \mathbf{Set}$ eine Bijektion $\nu_{AB}\colon \mathrm{Abb}(A \times S, B) \to \mathrm{Abb}(A, \mathrm{Abb}(S, B))$ mit $f \mapsto \nu_{AB}(f)$.

Für $a \in A$ sei also $(\nu_{AB}(f))(a)\colon S \to B$ mit $s \mapsto f(a, s)$. Man rechnet nach, dass alles funktioniert.

3. Ringe, Teilringe und Ideale

Definition 3.1 (Ring)
Ein **Ring** R ist ein Tripel $R = (R, +, \cdot)$ mit

(i) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 0, dem **Nullelement**.

(ii) $(R, \cdot)$ ist ein **Monoid**, d. h. assoziativ mit 1, dem **Einselement**.

(iii) Die Distributivgesetze gelten: $a(b + c) = ab + ac$ und $(a + b)c = ac + bc$ für alle $a, b, c \in R$.

Bemerkung 3.1
- Das Null- und Einselement sind eindeutig.
- Setze $a - b := a + (-b)$.
- Manche Bücher verlangen die Existenz von 1 nicht.
- Wie üblich: $0x = 0 = x0$ und $(-x)y = -(xy) = x(-y)$, $(-x)(-y) = xy$.
- Ist $ab = ba$ für alle $a, b \in R$, dann heißt der Ring **kommutativ**.

Beispiel 3.1
(i) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \{0\}$ (Letzterer wird als **Nullring** bezeichnet).

(ii) Sei M eine Menge. Dann ergibt sich durch $A + B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ und $A \cdot B := A \cap B$ der **Potenzmengenring** $\mathfrak{P}(M) = \{ A \mid A \subseteq M \}$.

(iii) Sei $(R, +, \cdot)$. Dann erhält man einen **entgegengesetzten Ring** $(R, +, \circ)$ mit $a \circ b := ba$ mit $a, b \in R$. Man schreibt R^o für „opposite“.

(iv) Sei R ein Ring und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $R^{n \times n}$ ein voller **Matrixring** des Grades n über R. Das Nullelement ist die **Nullmatrix** 0_n und das Einselement 1_n.

(v) Sei $(R_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Ringen. Dann erhält man das **direkte Produkt**

$$\bigtimes_{i \in I} R_i := \prod_{i \in I} R_i := \{ (r_i)_{i \in I} \mid r_i \in R_i, i \in I \}$$

mit $(r_i)_{i \in I} + (s_i)_{i \in I} := (r_i + s_i)_{i \in I}$. Der Spezialfall $R_i = R$ für alle i ergibt

$$\bigtimes_{i \in I} R_i = \operatorname{Abb}(I, R) = \{ f \colon I \to R \mid f \text{ Abbildung} \}$$

mit $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ für $x \in I$ und für den Spezialfall $I = \{1,\dots,n\}$ ergibt sich das direkte Produkt durch

$$\bigtimes_{i\in I} R_i = R_1 \times \ldots \times R_n = \{\, (r_1,\dots,r_n) \mid r_1 \in R_1,\dots,r_n \in R_n \,\}$$

(vi) Sei R ein Ring und M ein Monoid. Dann ergibt sich der **Monoidring** von M über R durch $RM := \{\, (r_m)_{m\in M} \mid r_m \in R, m \in M, r_m = 0 \text{ für fast alle } m \in M \,\}$. Die Addition ergibt sich durch $(r_m)_{m\in M} + (s_m)_{m\in M} := (r_m + s_m)_{m\in M}$ und die Multiplikation durch $(r_m)_{m\in M} \cdot (s_m)_{m\in M} := (\sum_{p,q\in M, pq=m} r_p s_q)_{m\in M}$. Die Summe ist *endlich*.

Für $m \in M$ sei $\widehat{m} := (\delta_{mn})_{m\in M}$ (**Kronecker-Delta**). Dann ist $\widehat{1_M}$ das Einselement von RM und man hat $\widehat{m} \cdot \widehat{n} = \widehat{mn}$ für $m,n \in M$.

Setze $r(r_m)_{m\in M} := (rr_m)_{m\in M}$ für $r \in R, (r_m)_{m\in M} \in RM$. Dann ist $(r_m)_{m\in M} = \sum_{m\in M} r_m \widehat{m}$. Identifiziere jeweils m mit $\widehat{m}$. Dann ist $(r_m)_{m\in M} = \sum_{m\in M} r_m m$. Dabei:

- $\sum_{m\in M} r_m m = \sum_{m\in M} s_m m \Leftrightarrow r_m = s_m$ für alle $m \in M$.
- $\sum_{m\in M} r_m m + \sum_{m\in M} s_m m = \sum_{m\in M} (r_m + s_m) m$
- $(\sum_{m\in M} r_m m)(\sum_{m\in M} s_m m) = \sum_{m\in M} (\sum_{p,q\in M, pq=m} (r_p s_q)) m$.

Speziell: M Gruppe. Dann ist RM ein **Gruppenring**. Speziell: $R[X]$ **Polynomring** in einer oder mehreren Variablen.

Definition 3.2 (Invertierbar, Invers, Einheit)
Sei R ein Ring und $a \in R$. Das Element a heißt genau dann **rechtsinvertierbar**, wenn ein $b \in R$ existiert mit $ab = 1$. Das b heißt dann **rechtsinvers** zu a. Analog definiert man **linksinvertierbar** und **linksinvers**. Das Element a heißt genau dann **invertierbar** oder **Einheit**, wenn es rechts- und linksinvertierbar ist.

Bemerkung 3.2
$U(R) := R^\times = \{\, a \in R \mid a \text{ invertierbar} \,\}$ ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation. Sie heißt die **Einheitengruppe**. Für $U(R) = R \setminus \{0\}$ heißt R **Schiefkörper**. Wenn R ein kommutativer Schiefkörper, so ist R ein Körper.

Beispiel 3.2
Sei R ein Ring und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathrm{GL}(n,R) := U(R^{n\times n})$ der Ring der invertierbaren Matrizen und heißt **allgemeine lineare Gruppe** des Grades n über R (general linear group).

Definition 3.3 (Nullteiler)
Sei R ein Ring und $a \in R$. Dann heißt a **Linksnullteiler**, wenn ein $b \in R \setminus \{0\}$ mit $ab = 0$ existiert. Analog definiert man **Rechtsnullteiler**. Ein Element a heißt **Nullteiler**, wenn es Links- oder Rechtsnullteiler ist.

Beispiel 3.3

(i)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{Q}^{2\times 2}$.

(ii) $R \neq \{0\} \Rightarrow 0$ Nullteiler in R.

Bemerkung 3.3
Ein Ring $R \neq \{0\}$ heißt **nullteilerfrei**, wenn 0 der einzige Nullteiler in R ist. Schiefkörper und $\mathbb{Z}$ sind nullteilerfrei. Nullteilerfreie kommutative Ringe heißen **Integritätsbereich**. Beispiele sind Körper und $\mathbb{Z}$.

Definition 3.4 (Idempotentes und nilpotentes Element)
Sei R ein Ring und $a \in R$. Das Element a heißt **idempotent**, wenn $a^2 = a$. Das Element a heißt **nilpotent**, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n = 0$ existiert.

Bemerkung 3.4

(i) Wenn a idempotent, dann ist auch $1 - a$ idempotent: $(1-a)^2 = 1 - 2a + a^2 = 1 - 2a + a = 1 - a$.

(ii) Wenn a nilpotent, dann $1 - a \in U(R)$. Denn aus $a^n = 0$ folgt, $(1-a)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}) = 1 - a^n = 1$ und $(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1})(1-a) = 1$.

Beispiel 3.4
0,1 sind idempotent und 0 ist stets nilpotent.

Definition 3.5 (Teilring)
Sei R ein Ring. Dann ist $S \subseteq R$ genau dann ein **Teilring**, wenn S ein Ring mit den entsprechend eingeschränkten Verknüpfungen ist.

Bemerkung 3.5
Dabei ist zugelassen, dass $1_R \neq 1_S$. In der Literatur wird das nicht ganz einheitlich gehandhabt. Im Fall $1_R = 1_S$ hat man einen **unitären Teilring**. Also $S \subseteq R$ ist ein unitärer Teilring:

(i) $0, 1_R \in S$

(ii) $a, b \in S \Rightarrow a + b \in S \wedge a \cdot b \in S$

Beispiel 3.5

(a) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$ sind unitäre Teilringe.

(b) Sei R ein Ring. Dann ist $Z(R) := \{ z \in R \mid za = az, \forall a \in R \}$ das **Zentrum** von R, also ein kommutativer, unitärer Teilring.

(c) Der Ring $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^{2\times 2}$ ist *kein* unitärer Teilring. Denn das Einselement ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) Der Ring $\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist *kein* unitärer Teilring.

(e) Der Ring der **Quaternionen** $\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$ ist ein unitärer Teilring. Aus $a, b \neq 0$ folgt, $\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a\overline{a} + b\overline{b}} \begin{pmatrix} \overline{a} & -b \\ \overline{b} & a \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$. Es ist also ein Schiefkörper.

Definition 3.6 (Ideal)
Sei R ein Ring und $I \subseteq R$. Dann heißt I **Ideal** in R, wenn gilt:

(i) $(I, +)$ ist eine Untergruppe von $(R, +)$.

(ii) Für $r \in R$ und $x \in I$ folgt, dass $r \cdot x$ und $x \cdot r$ in I liegen.

Wir schreiben $I \trianglelefteq R$.

Beispiel 3.6

(a) Für einen beliebigen Ring R sind 0 und R Ideale. Ein Ring R heißt **einfach**, wenn $R \neq 0$ und 0 sowie R die einzigen Ideale sind.

(b) $I \cap U(R) \neq \emptyset \Rightarrow I = R$. Denn für $u \in I \cap U(R)$ folgt, $r = ru^{-1}u \in I$ für $r \in R$. Wenn R ein Schiefkörper ist, ist insbesondere R auch ein einfacher Ring. Die Umkehrung gilt nicht.

(c) Sei $(I_j)_{j \in J}$ eine nichtleere Familie von Idealen $I_j \trianglelefteq R$ für $j \in J$. Dann ist:

$$\bigcap_{j \in J} I_j \trianglelefteq R$$

Insbesondere erhält man für $A \subseteq R$ das von A **erzeugte Ideal**

$$\begin{aligned}(A) &= \bigcap_{\substack{I \trianglelefteq R \\ A \subseteq R}} I \trianglelefteq R \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{k} r_i a_i s_i \;\middle|\; a_i \in A, r_i \in R, s_i \in R, k \in \mathbb{N}_0 \right\}\end{aligned}$$

Wir schreiben, $(a_1, \ldots, a_n) = (\{a_1, \ldots, a_n\})$ für $a_1, \ldots, a_n \in R$.

(d) $I \trianglelefteq \mathbb{Z} \Rightarrow I = k\mathbb{Z}$ für genau eine Zahl $k \in \mathbb{N}_0$. Das entspricht (k).

(e) Sei R ein Ring und $I, J \trianglelefteq R$. Dann heißt $I + J := \{\, x + y \mid x \in I, y \in J \,\} \trianglelefteq R$ die **Summe**.

(f) Es ist $IJ := \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i y_i \;\middle|\; x_i \in I, y_i \in J, k \in \mathbb{N}_0 \right\}$ das **Produkt**.

Bemerkung 3.6 (Rechenregeln)

(i) $I + J = (I \cup J) = J + I$

(ii) $IJ = (\{ xy \mid x \in I, y \in J \}) \subseteq I \cap J$. Die Gleichheit gilt im Allgemeinen nicht.

(iii) $(IJ)K = I(JK)$

(iv) $I(J + K) = IJ + IK$, $(I + J)K = IK + JK$

Bemerkung 3.7 (Restklassenring)

Sei R ein Ring, I ein Ideal in R und $a \in R$. Dann ist $a + I := \{ a + x \mid x \in I \}$ die **Restklasse** von a modulo I. Dabei $a + I = b + I \Leftrightarrow a - b \in I \Leftrightarrow: a \equiv b \pmod{I}$. Man sagt, a ist **kongruent** zu b modulo I. Dann ist $R/I := \{ a + I \mid a \in R \}$ ein Ring mit $(a + I) \pm (b + I) = (a \pm b) + I$ und $(a + I)(b + I) = (ab) + I$. Das Nullelement ist $0 + I = I$ und das Einselement ist $1 + I$. Dieser Ring heißt **Restklassenring** modulo I.

Definition 3.7 (Maximales Ideal)

Sei R ein Ring, $M \trianglelefteq R$ und $M \neq R$ (Somit ist $R \neq \{0\}$). Dann ist M genau dann ein **maximales Ideal**, wenn kein $I \trianglelefteq R$ mit $M \subsetneq I \subsetneq R$ existiert.

Beispiel 3.7

Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt: maximales Ideal genau dann, wenn $k \in \mathbb{P}$.

Definition 3.8 (Primideal)

Sei R ein Ring, $P \trianglelefteq R$ und $P \neq R$. Dann ist P genau dann ein **Primideal** in R, wenn für alle $I, J \trianglelefteq R$ mit $IJ \subseteq P$ folgt, $I \subseteq P$ oder $J \subseteq P$.

Bemerkung 3.8 (Primer Ring)

Ein Ring heißt **prim**, falls 0 ein Primideal in R ist, d. h. für alle $I, J \trianglelefteq R$ mit $IJ = 0$ ist $I = 0$ oder $J = 0$. Das ist eine Art Nullteilerfreiheit für Ideale.

Satz 3.1

Sei R ein Ring und $\emptyset \neq X \subseteq R$ multiplikativ abgeschlossen, d. h. $x, y \in X \Rightarrow xy \in X$. Dann ist jedes Ideal $P \trianglelefteq R$, welches maximal bezüglich $P \cap X = \emptyset$ ist, ein Primideal in R. Insbesondere ist jedes maximale Ideal ein Primideal. Daher ist jeder einfache Ring prim.

BEWEIS:

Seien $I, J \trianglelefteq R$ mit $I \not\subseteq P$ und $J \not\subseteq P$. Es ist zu zeigen, dass $IJ \not\subseteq P$. Wegen $I' := I + P \supsetneq P$ und der Maximalität existiert ein $x \in I' \cap X$ und wegen $J' := J + P \supsetneq P$ gibt es analog ein $y \in J' \cap X$. Dann $xy \in I'J' \cap X$. Da P und X disjunkt sind, ist also $xy \notin P$. Also $P \not\supseteq I'J' = (I + P)(J + P) = IJ + IP + PJ + P^2 \subseteq IJ + P$, d. h. $IJ \not\subseteq P$. Damit ist die erste Aussage bewiesen. Für die zweite Aussage setzt man $X := \{1\}$ und die dritte Aussage ist klar. ■

Satz 3.2
Sei R ein Ring, $\emptyset \notin X \subseteq R$ multiplikativ abgeschlossen und $0 \notin X$. Dann existiert stets ein Ideal $P \trianglelefteq R$, das maximal bezüglich $P \cap X = \emptyset$ ist.

BEWEIS:
Wir definieren $\mathcal{A} := \{\, I \trianglelefteq R \mid I \cap X = \emptyset \,\} \neq \emptyset$ wegen $\{0\} \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{A}$ durch $\subseteq$ geordnet. Jede nichtleere totalgeordnete Teilmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ ist $S := \bigcup_{I \in \mathcal{L}} I$ eine obere Schranke von $\mathcal{L}$ in $\mathcal{A}$. Nach ZORNs Lemma enthält $\mathcal{A}$ ein maximales Element. ■

Bemerkung 3.9

(i) Nach dem Satz 3.1 ist P ein Primideal in R.

(ii) Jeder Ring $R \neq \{0\}$ hat also mindestens ein maximales Ideal für $X := \{1\}$.

Definition 3.9 (Semiprimideal)
Sei R ein Ring und $S \trianglelefteq R$. Dann ist R genau dann ein **Semiprimideal**, wenn für alle $I \trianglelefteq R$ mit $I^2 \subseteq S$ gilt, $I \subseteq S$.

Beispiel 3.8

- Aus Primideal folgt Semiprimideal.
- $R \trianglelefteq R$ Semiprimideal.
- Die Durchschnitte von Semiprimidealen sind wieder Semiprimideale. Diese Aussage gilt *nicht* für Primideale. Beispielsweise ist $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$ nicht prim.

Satz 3.3
Sei R ein Ring und $S \trianglelefteq R$. Dann ist $S \trianglelefteq R$ genau dann ein Semiprimideal, wenn S ein Durchschnitt von Primidealen ist.

BEWEIS:
„$\Leftarrow$" klar

„$\Rightarrow$" Sei $S \trianglelefteq R$ ein Semiprimideal. Dann ist zu zeigen, dass S der Durchschnitt *aller* Primideale von R ist, die S enthalten. Sei $x \in R \setminus S$. Nun ist zu zeigen, dass ein Primideal $P \trianglelefteq R$ mit $S \subseteq P$ und $x \notin P$ existiert. Wegen $RxR \not\subseteq S$ ist $(RxR)(RxR) \not\subseteq S$, da S Semiprimideal ist, d. h. $xRx \not\subseteq S$. Setze $x_0 := x$. Wähle $x_1 \in x_0Rx_0 \setminus S$. Wähle analog $x_2 \in x_1Rx_1 \setminus S$ usw. Erhalten $x_0, x_1, x_2, \ldots \in R \setminus S$ mit $x_{i+1} \in x_iRx_i$ für alle i. Nach ZORNs Lemma existiert $P \trianglelefteq R$ mit $S \subseteq P$ maximal bezüglich $x_0, x_1, x_2, \ldots \notin P$. Nun ist zu zeigen, dass P ein Primideal ist.

Sonst existieren $I, J \trianglelefteq R$ mit $I \not\subseteq P$ und $J \not\subseteq P$, aber $IJ \subseteq P$. Dann $I' := I + P \trianglelefteq R$, $J' := J + P \trianglelefteq R$, $P \subsetneq I'$ und $P \subsetneq J'$. Nach der Wahl von P existiert $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $x_i \in I'$, $x_j \in J'$. Sei $m := \max\{i, j\}$. Dann $x_m \in I' \cap J'$ und $x_{m+1} \in x_mRx_m \subseteq I'J' = (I+P)(J+P) = IJ + IP + PJ + P^2 \subseteq P$↯ ■

Definition 3.10 (Semiprimer Ring)
Ein Ring R heißt **semiprim**, falls $0 \trianglelefteq R$ ein Semiprimideal ist, d. h. es existiert kein Ideal $I \trianglelefteq R$ mit $I^2 = 0 \neq I$.

Bemerkung 3.10 (Nilpotent, Nilideal, Radikal)
Ein Ideal I in einem Ring R heißt **nilpotent**, falls $n \in \mathbb{N}$ mit $I^n = 0$ existiert, d. h. $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 0$ für alle $x_1, \ldots, x_n \in I$. Gegebenenfalls ist $x^n = 0$ für alle $x \in I$, d. h. jedes Element in I ist nilpotent. Ein Ideal $I \trianglelefteq R$ heißt **Nilideal**, wenn jedes Element in I nilpotent ist.

Es ist leicht zu zeigen, dass R genau dann semiprim ist, wenn 0 das einzige nilpotente Ideal in R ist. In einem beliebigen Ring R heißt der Durchschnitt $\mathrm{Rad}(R)$ aller Primideale in R **Radikal**. Dann ist $\mathrm{Rad}(R)$ das kleinste Semiprimideal in R und heißt **Primradikal** von R. Es gilt: $\mathrm{Rad}(R)$ enthält jedes nilpotente Ideal in R.

Satz 3.4
Wenn R ein Ring ist, so ist $\mathrm{Rad}(R)$ ein Nilideal.

BEWEIS:
Sei $x \in \mathrm{Rad}(R)$ nicht nilpotent. Dann $\emptyset \neq X := \{ x^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ multiplikativ abgeschlossen und $0 \notin X$. Nach der Bemerkung 3.9 existiert dann ein Primideal $P \trianglelefteq R$ mit $P \cap X = \emptyset$. Also $x \in \mathrm{Rad}(R) \subseteq P$ ↯ da $x \in X$ und $P \cap X = \emptyset$. ∎

Satz 3.5
Wenn R ein kommutativer Ring ist, so ist $\mathrm{Rad}(R) = \{ x \in R \mid x \text{ nilpotent} \}$.

BEWEIS:
Wir müssen nur $\supseteq$ zeigen. Die andere Beziehung ist klar nach dem Satz 3.4. Sei $x \in R$ nilpotent, d. h. $x^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann $RxR \trianglelefteq R$ und $(RxR)^n = RxRx \ldots xR = Rx^n = 0$. Also: $RxR \trianglelefteq R$ nilpotent, d. h. $RxR \subseteq \mathrm{Rad}(R)$ nach der Bemerkung 3.10. ∎

4. Ringhomomorphismen

Definition 4.1 (Ringhomomorphismus)
Seien R und S Ringe sowie $\varphi\colon R \to S$ eine Abbildung. Diese heißt **Homomorphismus** oder **Ringhomomorphismus**, falls gilt, $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ und $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ für alle $a, b \in R$.

Bemerkung 4.1

(i) Wir lassen zu, dass $\varphi(1_R) \neq 1_S$. Im Fall $\varphi(1_R) = 1_S$ heißt das φ **unitär**. Stets ist $\varphi(0) = 0$. Ist φ unitär, so ist $\varphi(x) \in U(S)$ und $\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})$ für $x \in U(R)$.

(ii) Sind $\varphi\colon R \to S$ und $\psi\colon S \to T$ Ringhomomorphismen, so auch $\psi \circ \varphi\colon R \to T$. Daher bilden Ringe und Ringhomomorphismen eine Kategorie **Ri**. Neutrales Element in $\mathbf{Ri}(R, R)$ ist jeweils die Identitätsabbildung id_R.

(iii) Wie üblich definiert man Mono-, Epi-, Iso-, Endo- und Automorphismen von Ringen. Für jeden Ringisomorphismus φ ist die Umkehrabbildung φ^{-1} auch ein Ringisomorphismus. Daher sieht man, dass die Automorphismen bezüglich der Komposition eine Gruppe bilden: $\mathrm{Aut}(R) := \{\, \alpha\colon R \to R \mid \alpha \text{ Automorphismus} \,\}$ die **Automorphismengruppe** von R.

(iv) Wie üblich hat man die **Isomorphie** von Ringen. Man bezeichnet diese mit $\cong$ und es ist eine Äquivalenzrelation.

(v) Seien $R, S \in \mathbf{Ri}$ und $\varphi \in \mathbf{Ri}(R, S)$. Für jeden Teilring $T \subseteq R$ ist $\varphi(T) \subseteq S$ ein Teilring. Insbesondere ist $\mathrm{Bld}(\varphi) = \varphi(R) \subseteq S$ ein Teilring. Dieser heißt **Bild** von φ. Ist $U \subseteq S$ ein Teilring, dann ist dagegen $\varphi^{-1}(U) \subseteq R$ im Allgemeinen *kein* Teilring. Im Allgemeinen enthält $\varphi^{-1}(U)$ kein Einselement. Sind aber U und φ unitär, so ist auch $\varphi^{-1}(U) \subseteq R$ ein Teilring.

(vi) Seien $R, S \in \mathbf{Ri}$ und $\varphi \in \mathbf{Ri}(R, S)$. Für $I \trianglelefteq R$ ist dann $\varphi(I) \trianglelefteq \varphi(R)$, aber i. A. $\varphi(I) \ntrianglelefteq S$. Denn ist etwa $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ die Inklusionsabbildung und $I = 2\mathbb{Z}$, so ist $\varphi(I) = 2\mathbb{Z} \ntrianglelefteq \mathbb{Q}$. Für $J \trianglelefteq S$ ist $\varphi^{-1}(J) \trianglelefteq R$. Insbesondere ist $\ker(\varphi) := \varphi^{-1}(\{0\}) = \{\, x \in R \mid \varphi(x) = 0 \,\} \trianglelefteq R$ der **Kern** von φ.

Beispiel 4.1
(a) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto \overline{z}$ (komplexe Konjugation) ist ein Automorphismus.

(b) Für $R \in \mathbf{Ri}, a \in R$ und $n \in \mathbb{Z}$ definiert man:

$$na := \begin{cases} a + \cdots + a & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -(|n|a) & n < 0 \end{cases}$$

Dann $\varphi\colon \mathbb{Z} \to R$ mit $n \mapsto n1$ ein Homomorphismus. Insbesondere ist $\ker(\varphi) \trianglelefteq \mathbb{Z}$, also $\ker(\varphi) = k\mathbb{Z}$ für genau ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt k die **Charakteristik** von R. Man schreibt $k = \mathrm{char}(R)$. Beispielsweise ist $\mathrm{char}(\mathbb{Z}) = \mathrm{char}(\mathbb{Q}) = \mathrm{char}(\mathbb{R}) = 0$, $\mathrm{char}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n$ für $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathrm{char}(\mathfrak{P}(M)) = 2$ für jede nichtleere Menge M.

(c) Für jeden Teilring $T \subseteq R$ ist die Inklusionsabbildung $T \to R$ ein Monomorphismus. Für $I \trianglelefteq R$ ist die kanonische Abbildung $R \to R/I$ mit $a \mapsto a + I$ ein Epimorphismus mit dem Kern I. Die Ideale von R sind genau die Kerne von Ringhomomorphismen mit Definitionsbereich R.

Satz 4.1 (Homomorphiesatz)
Für $R, S \in \mathbf{Ri}$ und $\varphi \in \mathbf{Ri}(R, S)$ ist $\Phi\colon R/\ker(\varphi) \to \mathrm{Bld}(\varphi)$ mit $a + \ker(\varphi) \mapsto \varphi(a)$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist $R/\ker(\varphi) \cong \mathrm{Bld}(\varphi)$.

Satz 4.2 (1. Isomorphiesatz)
Seien $R \in \mathbf{Ri}, S \subseteq R$ ein unitärer Teilring und $I \trianglelefteq R$. Dann ist auch $S + I$ mit $S + I := \{ s + x \mid s \in S, x \in I \} \subseteq R$ ein unitärer Teilring, $I \trianglelefteq S + I, S \cap I \trianglelefteq S$ und $S/S \cap I \cong S + I/I$.

Satz 4.3 (2. Isomorphiesatz)
Für $R \in \mathbf{Ri}$ und $I \trianglelefteq R$ ist die Abbildung $J \mapsto J/I := \{ x + I \mid x \in J \}$ eine Bijektion zwischen der Menge aller Ideale $J \trianglelefteq R$ mit $I \subseteq J$ und der Menge der Ideale in dem Restklassenring R/I. Dabei gilt, $R/I/J/I \cong R/J$.

Bemerkung 4.2
Für $R \in \mathbf{Ri}$ und ein Ideal $M \trianglelefteq R$ gilt also, M ist genau dann ein maximales Ideal, wenn R/M ein einfacher Ring ist.

Satz 4.4 (Chinesischer Restsatz)
Seien $R \in \mathbf{Ri}$ und $I_1, \ldots, I_n \trianglelefteq R$. Dann ist $\varphi\colon R \to R/I_1 \times \ldots \times R/I_n$ mit $a \mapsto (a + I_1, \ldots, a + I_n)$ ein Homomorphismus und der Kern von φ ist $I_1 \cap \cdots \cap I_n$. Insbesondere ist $R/I_1 \cap \cdots \cap I_n$ zu einem Teilring von $R/I_1 \times \ldots \times R/I_n$ isomorph. Gilt $I_i + I_j = R$ für alle $i \neq j$, so ist φ surjektiv und $I_1 \cap \cdots \cap I_n = \sum_{g \in \mathrm{Sym}(n)} I_{g(1)} \cdot \ldots \cdot I_{g(n)}$. Insbesondere gilt, $R/I_1 \cap \cdots \cap I_n \cong R/I_1 \times \ldots \times R/I_n$.

Bemerkung 4.3
Ist R kommutativ, so ist also $I_1 \cap \cdots \cap I_n = I_1 \cdot \ldots \cdot I_n$ mit den obigen Voraussetzungen.

5. Moduln

Sei R ein Ring.

Definition 5.1 (Linksmoduln)
Ein R-**Linksmodul** $M = {}_RM$ besteht aus einer Menge M sowie Verknüpfungen $+\colon M \times M \to M$ mit $(a,b) \mapsto a+b$ und $\cdot\colon R \times M \to M$ mit $(r,m) \mapsto rm$ mit den Eigenschaften:

(i) $(M,+)$ ist eine abelsche Gruppe.

(ii) $(rs)m = r(sm)$ für $r,s \in R$ und $m \in M$.

(iii) $(r+s)m = rm + sm$ für $r,s \in R$ und $m \in M$.

(iv) $r(m+n) = rm + rn$ für $r \in R$ und $m,n \in M$.

(v) $1m = m$ für $m \in M$.

Analog definiert man den Begriff des **Rechtsmodul**s $M = M_R$.

Beispiel 5.1

(a) Sei K ein Körper, so sind die K-Linksmoduln die K-Vektorräume.

(b) $m,n \in \mathbb{N} \Rightarrow K^{m\times n}$ ist $K^{m\times m}$-Linksmodul und $K^{n\times n}$-Rechtsmodul.

(c) Sei $(A,+)$ eine abelsche Gruppe. So wird A ein $\mathbb{Z}$-Linksmodul mit $na := a + \cdots + a$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in A$. Umgekehrt ist in jedem $\mathbb{Z}$-Linksmodul M die Multiplikation mit einem Element $n \in \mathbb{N}$ bereits durch die Addition festgelegt: $na := (1 + \cdots + 1)a = 1a + \cdots + 1a = a + \cdots + a$ für $a \in M$. Also: $\mathbb{Z}$-Linksmoduln sind abelsche Gruppen.

(d) Der Ring R selbst ist ein R-Links- und ein R-Rechtsmodul. Dieser Modul heißt **regulärer R-Links- bzw. R-Rechtsmodul**.

(e) Sei M ein R-Linksmodul. Dann ist M ein R^o-Rechtsmodul mit $mr := rm$ mit $r \in R$ und $m \in M$. Die Eigenschaften von R-Linksmoduln übertragen sich auf R^o-Rechtsmoduln. Falls R kommutativ ist, ist $R = R^o$. Also sind das R-Linksmodul gleich dem R-Rechtsmodul.

(f) Sei $\varphi\colon R \to S$ unitärer Ringhomomorphismus und M ein S-Linksmodul. Dann wird M zu einem R-Linksmodul mit $rm := \varphi(r)m$ für $r \in R$ und $m \in M$. Spezialfall: $R \subseteq S$ unitärer Teilring und φ die Inklusionsabbildung. Dann spricht man von der **Einschränkung** oder **Restriktion** von M auf R. Die Notation dafür ist $\mathrm{Res}_R^S(M)$.

(g) Sei $(M_i)_{i\in I}$ nichtleere Familie von R-Linksmoduln. Dann erhält man das **direkte Produkt** $\bigtimes_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i = \{ (m_i)_{i\in I} \mid m_i \in M_i, i \in I \}$ als ein R-Linksmodul. Die Verknüpfungen sind komponentenweise definiert. Für $I = \{1, \dots, n\}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} M_1 \times \ldots \times M_n = \bigtimes_{i=1}^{n} M_i &= \prod_{i=1}^{n} M_i \\ &= \{ (m_1, \dots, m_n) \mid m_1 \in M_1, \dots, m_n \in M_n \} \end{aligned}$$

(h) Sei I eine nichtleere Menge und M ein R-Linksmodul. Dann ist die Menge der Abbildungen $\mathrm{Abb}(I, M) = \bigtimes_{i\in I} M$ ein R-Linksmodul mit $(f+g)(i) := f(i) + g(i)$ und $(rf)(i) = rf(i)$ mit $f, g \in \mathrm{Abb}(I, M), i \in I$ und $r \in R$. Für $i = \{1, \dots, n\}$ ergibt sich $\mathrm{Abb}(I, M) =: M^n$.

Bemerkung 5.1

(i) Abkürzung: Ab sofort entspricht **Modul** gleich dem Linksmodul. Rechtsmoduln werden explizit erwähnt.

(ii) In jedem R-Modul M gilt, $r0 = 0$ für $r \in R$, $0m = 0$ für $m \in M$, $(-1)m = -m$ für $m \in M$. Aber $rm = 0 \not\Rightarrow r = 0 \vee m = 0$.

Definition 5.2 (Untermodul)
Ein **Untermodul** eines R-Moduls M ist eine Teilmenge $N \subseteq M$, die mit den entsprechend eingeschränkten Verknüpfungen ein R-Modul ist, d. h. $0 \in N$ und für $r, s \in R, m, n \in N \Rightarrow rm + sn \in N$.

Beispiel 5.2

(a) Sei K ein Körper und V ein Vektorraum. Dann sind die Untermoduln von V die Untervektorräume von V.

(b) Sei A ein $\mathbb{Z}$-Modul, d. h. eine abelsche Gruppe, so sind die Untermoduln von A die Untergruppen von A.

(c) Sei M ein R-Modul und $(N_i)_{i\in I}$ eine nichtleere Familie von Untermoduln von M. Dann ist $\bigcap_{i\in I} N_i \subseteq M$ ein Untermodul. Speziell: $X \subseteq M \Rightarrow D := \bigcap_{N\subseteq M, X\subseteq N} N \subseteq M$ ein Untermodul. Das heißt von X erzeugter Untermodul. Man schreibt, $D =: RX$. Die Element von RX sind so genannte R-**Linearkombination**en $r_1x_1 + \cdots + r_nx_n$ mit $r_1, \dots, r_n \in R$ und $x_1, \dots, x_n \in X$. Ist $X = \{x\}$ einelementig, so schreibt man $RX = Rx$.

Ist $Y \subseteq M$ mit $M = RY$, so heißt Y **Erzeugendensystem** von M. Hat M ein endliches Erzeugendensystem, so heißt der Modul M **endlich erzeugt**. Ist $M = Ry$ für ein $y \in M$, so heißt M **zyklisch**.

(d) Sei M ein R-Modul und $(N_i)_{I\in I}$ eine Familie von Untermoduln von M. Dann ist:

$$\sum_{i\in I} M_i := \left\{ \sum_{i\in I} x_i \;\middle|\; x_i \in N_i, x_i = 0 \text{ für fast alle } i \right\} \subseteq M$$

ein Untermodul und heißt die **Summe** von $(N_i)_{I\in I}$. Dann ist $\sum_{i\in I} N_i$ der von $\bigcup_{i\in I} N_i$ erzeugte Untermodul von M.

Für den Spezialfall $I = \{1, \dots, n\}$ folgt, $\sum_{i\in I} N_i = \sum_{i=1}^{n} N_i = N_1 + \dots + N_n$.

(e) Sei $(M_i)_{I\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Dann ist

$$\coprod_{i\in I} M_i := \left\{ (m_i) \in \prod_{i\in I} M_i \;\middle|\; m_i = 0 \text{ für fast alle } i \right\} \subseteq \prod_{i\in I} M_i$$

das **Koprodukt** von $(M_i)_{i\in I}$.

(f) **Linksideal** L von R: Untermodul des regulären R-Linksmoduls R, d. h. $L \subseteq R$, $0 \in L$ und $rx + sy \in L$ für $r, s \in R$ und $x, y \in L$. Analog definiert man das **Rechtsideal**. Für $I \subseteq R$ gilt also, $I \trianglelefteq R \Leftrightarrow I$ Links- und Rechtsideal in R ist.

(g) Sei M ein R-Modul. Dann sind $0 := \{0\}$ und R Untermoduln. Man bezeichnet 0 als den **trivialen Untermodul** und $N \subseteq M$ mit $N \neq M$ als **echten Untermodul**. Weiter heißt $M \neq 0$ **einfach** oder **irreduzibel**, wenn 0 und M die einzigen Untermoduln sind.

Satz 5.1 (Dedekind-Identität)
Sei M ein R-Modul und $U, V, W \subseteq M$ Untermoduln mit $U \subseteq W$. Dann folgt, $(U + V) \cap W = U + (V \cap W)$.

Bemerkung 5.2
Sei M ein R-Modul und $N \subseteq M$ ein Untermodul. Dann heißt $M/N := \{\, m + N \mid m \in M \,\}$ der **Faktormodul** von M nach N. Dabei ist $m + N := \{\, m + n \mid n \in N \,\}$ die **Nebenklasse** oder **Restklasse** von m nach N. Es gelten die Rechenregeln:

$$\begin{aligned}(m + N) + (m' + N) &:= (m + m') + N \\ r(m + N) &:= rm + N\end{aligned}$$

Wir schreiben: $m \equiv m' \pmod N \Leftrightarrow m - m' \in N$.

Definition 5.3 (Lineare Abbildung)
Seien M und N zwei R-Moduln und $f \in \operatorname{Abb}(M, N)$ mit $f(rx + sy) = rf(x) + sf(y)$ für $r, s \in R$ und $x, y \in M$. Dann bezeichnet man die Abbildung f als **R-linear** oder als **R-Homomorphismus**. Setze $\operatorname{Hom}_R(M, N) := \{\, f \in \operatorname{Abb}(M, N) \mid f \text{ ist } R\text{-linear} \,\}$. Dann ist $\operatorname{End}_R(M) := \operatorname{Hom}_R(M, M)$ und $\operatorname{Aut}_R(M) = \{\, f \in \operatorname{End}_R(M) \mid f \text{ bijektiv} \,\}$. Wie üblich definiert man die anderen Morphismen.

Bemerkung 5.3

(i) Die R-Moduln und R-Homomorphismen bilden eine Kategorie ${}_R\mathbf{Mod}$. Analog ergibt sich die Kategorie $\mathbf{Mod}_R$ für Rechtsmoduln. Die endlich erzeugten R-Moduln bilden eine volle Teilkategorie ${}_R\mathbf{mod}$ und analog auch $\mathbf{mod}_R$.

(ii) $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ ist eine abelsche Gruppe ($\mathbb{Z}$-Modul) mit $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ für $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ und $x \in M$. Das Nullelement ist die Nullabbildung.

(iii) Sei $r \in R$ und $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Dann ist $rf : M \to N$ mit $x \mapsto rf(x)$ im Allgemeinen *kein* R-Homomorphismus. Wenn R kommutativ ist, so ist $rf \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ für $r \in R$ und $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Somit ist $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ ein R-Modul.

(iv) Seien $L, M, N \in {}_R\mathbf{Mod}$, $f \in \mathrm{Hom}_R(L, M)$ und $g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Dann ist $g \circ f \in \mathrm{Hom}_R(L, N)$. Stets ist id_L ein R-Automorphismus. Es gelten die Distributivgesetze:

$$(g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$$
$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f'$$

Daher bilden die Endomorphismen einen Ring bezüglich $+$ und $\circ$. Dieser heißt **Endomorphismenring** $\mathrm{End}_R(M)$.

Wichtig: M ist ein $\mathrm{End}_R(M)$-Modul mit $f \cdot m := f(m)$ für $f \in \mathrm{End}_R(M)$ und $m \in M$. Seien $f \in \mathrm{Hom}_R(L, M)$ und $g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ zwei Isomorphismen, so sind auch $g \circ f$ und f^{-1} Isomorphismen. Daher ist $\mathrm{Aut}_R(M) = U(\mathrm{End}_R(M))$ bezüglich $\circ$ eine Gruppe, die **Automorphismengruppe**.

(v) Seien $M, N \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $f : M \to N$ ein R-Isomorphismus. Dann sind M und N **isomorph**. Wir schreiben, $M \simeq N$ oder $M \simeq_R N$. Die Relation $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation.

(vi) Seien $M, N \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Es ist leicht zu sehen, dass für $U \subseteq M$ Untermodul auch $f(U) \subseteq N$ ein Untermodul ist. Umgekehrt sei $V \subseteq N$ ein Untermodul. Dann ist auch $f^{-1}(V) \subseteq M$ ein Untermodul. Speziell ist $\ker(f) = f^{-1}(0) = \{ x \in M \mid f(x) = 0 \} \subseteq M$ ein Untermodul, der so genannte **Kern**.

Es ist leicht einzusehen, dass $F : M/\ker f \to \mathrm{Bld}(f)$ mit $x + \ker f \mapsto f(x)$ ein wohldefinierter R-Isomorphismus ist. Folglich haben wir nach dem Homomorphiesatz (Satz 4.1): $M/\ker f \simeq \mathrm{Bld}(f)$.

Sei $U \subseteq M$ Untermodul. So ist $f^{-1}(f(U)) = U + \ker f$. Folglich sind die Abbildungen $U \mapsto f(U)$ und $V \mapsto f^{-1}(V)$ zueinander inverse Bijektionen zwischen der Menge aller Untermoduln $U \subseteq M$ mit $\ker f \subseteq U$ und der Menge aller Untermoduln $V \subseteq \mathrm{Bld}(f)$ (Korrespondenzsatz).

Seien $K, L \subseteq M$ Untermoduln. Dann ist $K/K \cap L \to K + L/L$ mit $x + (K \cap L) \mapsto x + L$ ein R-Isomorphismus. Also folgt nach dem 1. Isomorphiesatz (Satz 4.2): $K/K \cap L \simeq K + L/L$. Für $K \subseteq L \subseteq M$ Untermoduln folgt nach dem 2. Isomorphiesatz (Satz 4.3): $M/K/L/K \simeq M/L$.

Beispiel 5.3

(a) Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $N \subseteq M$ ein Untermodul. Die **Inklusionsabbildung** $N \to M$ mit $n \mapsto n$ ist ein R-Monomorphismus.

(b) Die kanonische Abbildung $M \to M/N$ mit $m \mapsto m + N$ ist ein R-Epimorphismus mit dem Kern N.

(c) Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R-Moduln, $M := \prod_{i \in I} M_i$ und $j \in I$. Dann ist $p_j \colon M \to M_j$ mit $(m_i)_{i \in I} \mapsto m_j$ ein R-Epimorphismus. Er heißt der **Projektor**. Die Abbildung $q_j \colon M_j \to M$ mit $m_j \mapsto (m_i)_{i \in I}$, wobei $m_i = 0$ für $i \neq j$, ist ein R-Epimorphismus und heißt **Injektor**. Es ist leicht zu sehen, dass $p_j \circ q_j = \mathrm{id}_{m_j}$ für $j \in I$ und $p_k \circ q_j = 0$ für $j \neq k$ ist. Daher ist $l_j := q_j \circ p_j \in \mathrm{End}_R(M)$ idempotent wegen $l_j^2 = l_j$ für $j \in I$. Außerdem ist $l_k \circ l_j = 0$ für $j \neq k$. Für $|I| < \infty$ folgt, $\sum_{i \in I} e_i = \mathrm{id} M$.

Satz 5.2 (3. Isomorphiesatz)

Sei M ein R-Modul, $U_0, U, V_0, V \subseteq M$ Untermoduln mit $U_0 \subseteq U$ und $V_0 \subseteq V$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} U_0 + (U \cap V)/U_0 + (U \cap V_0) &\simeq V_0 + (V \cap U)/V_0 + (V \cap U_0) \\ &\simeq U \cap V/(U_0 \cap V) + (V_0 \cap U) \end{aligned}$$

Definition 5.4 (Untermodulreihe)

Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$. Dann ist

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_l = 0 \tag{5.1}$$

die **Untermodulreihe** von M. Die M_{i-1}/M_i heißen **Faktoren** und l ist die **Länge** von Gleichung 5.1. Zwei Untermodulreihen von M heißen **isomorph** oder **äquivalent**, wenn ihre Länge gleich ist und die Faktoren bis auf Reihenfolge isomorph sind. Eine **Verfeinerung** von Gleichung 5.1 entsteht durch Einfügen neuer Untermoduln. Sind alle M_i verschieden, so heißt die Untermodulreihe aus Gleichung 5.1 eine **Untermodulreihe ohne Wiederholung**.

Satz 5.3 (Verfeinerungssatz von Schreier)

Je zwei Untermodulreihen eines R-Moduls M besitzen isomorphe Verfeinerungen.

Definition 5.5 (Kompositionsreihe)

Eine Untermodulreihe eines R-Moduls heißt **Kompositionsreihe**, falls sie selbst keine Wiederholungen enthält, wohl aber jede Verfeinerung.

Satz 5.4 (Satz von Jordan-Hölder)

Hat ein R-Modul eine Kompositionsreihe, so sind je zwei Kompositionsreihen isomorph.

Bemerkung 5.4

Nach der Bemerkung 5.3 Punkt (vi) ist eine Untermodulreihe von M genau dann eine Kompositionsreihe, wenn die Faktoren einfache Moduln sind. Gegebenenfalls sind diese durch M bis auf Reihenfolge und Isomorphien eindeutig bestimmt. Sie heißen **Kompositionsfaktoren** von M. Außerdem haben alle Kompositionsreihen von M die gleiche Länge. Sie heißt **Kompositionslänge** von M.

Beispiel 5.4
Sei K ein Körper und $V \in {}_K\mathbf{vec}$ endlich-dimensional. Dann ist die Kompositionslänge gleich der Dimension.

Satz 5.5
Für $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ sind äquivalent:

(1) (Aufsteigende Kettenbedingung) Zu jeder Folge $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \ldots$ von Untermoduln von M existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $N_k = N_{k+1} = N_{k+2} = \cdots$.

(2) (Maximalbedingung für Untermoduln) Jede nichtleere Menge von Untermoduln von M hat ein maximales Element bezüglich $\subseteq$.

(3) Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.[1]

Definition 5.6 (noethersch)
Gegebenenfalls heißt M **noethersch**.

Bemerkung 5.5
Für $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ und jeden Untermodul $N \subseteq M$ gilt, dass M genau dann noethersch ist, wenn N und M/N noethersch sind.

Satz 5.6
Für $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ sind äquivalent:

(1) (Absteigende Kettenbedingung) Zu jeder Folge $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \ldots$ von Untermoduln von M existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $N_k = N_{k+1} = \cdots$.

(2) (Minimalbedingung für Untermoduln) Jede nichtleere Menge von Untermoduln von M hat ein minimales Element bezüglich $\subseteq$.

Definition 5.7 (artinsch)
Gegebenenfalls heißt M **artinsch**.

Bemerkung 5.6
(i) Analog zu Bemerkung 5.5 gilt für $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ und jeden Untermodul $N \subseteq M$, M ist genau dann artinsch, wenn N, M/N artinsch ist.

(ii) Ist $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ und sind N sowie N' artinsche bzw. noethersche Untermoduln eines R-Moduls M, so ist auch $N + N'$ artinsch bzw. noethersch. Denn nach dem ersten Isomorphiesatz (Satz 4.2) ist $N+N'/N' \simeq N/N\cap N'$.

Definition 5.8
$M \in {}_R\mathbf{Mod}$ hat genau dann eine Kompositionsreihe, wenn M sowohl artinsch und noethersch ist.

[1] Das ist *nicht* äquivalent dazu, dass M endlich erzeugt ist!

Definition 5.9 (Links-, rechtsnoethersch, -artinsch bzw. linksartinsch)
Der Ring R heißt **linksnoethersch** (**linksartinsch**), wenn ${}_RR$ noethersch (artinsch) ist. Analog erhält man **rechtsnoethersch** und **rechtsartinsch**. Ist R links- und rechtsnoethersch (links- und rechtsartinsch), so heißt der Ring **noethersch** (**artinsch**).

Beispiel 5.5
Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $R := K^{n\times n}$ artinsch und noethersch. Denn jedes Links- und auch Rechtsideal ist ein K-Untervektorraum.

Satz 5.7
Sei R linksnoethersch (linksartinsch) und $M \in {}_R\mathbf{mod}$. Dann ist M noethersch (artinsch).

6. Einfache, halbeinfache Ringe und Moduln

Bemerkung 6.1
Für $M, N \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ gilt, wie üblich: f ist genau dann injektiv, wenn $\ker(f) = \{0\}$.

Satz 6.1 (Schurs Lemma)
Für $M, N \in {}_R\mathbf{Mod}$ gilt:

(i) Sei M einfach und $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Dann ist f injektiv.

(ii) Sei N einfach und $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Dann ist f surjektiv.

(iii) Sei M, N einfach und $M \not\simeq N$. Dann ist $\mathrm{Hom}_R(M,N) = 0$.

(iv) Wenn M einfach ist, so ist $\mathrm{End}_R(M)$ ein Schiefkörper.

Definition 6.1 (Maximales und minimales Linksideal)
Ein Linksideal $M \neq R$ heißt **maximal**, wenn kein Linksideal $L \subsetneq R$ mit $M \subsetneq L$ existiert. Analog kann man ein **minimales Linksideal** konstruieren.

Bemerkung 6.2

(i) Für jedes Linksideal $M \subseteq R$ gilt, M ist genau dann maximal, wenn ${}^{R}/_{M}$ ein einfacher R-Modul ist und M ist genau dann minimal, wenn M ein einfacher R-Modul ist.

(ii) Jedes Linksideal $L \subsetneq R$ ist in einem maximalen Linksideal $M \subseteq R$ enthalten. Der Beweis geht analog zu Satz 3.2. Insbesondere enthält jeder Ring $R \neq 0$ ein maximales Linksideal M. Daher hat jeder Ring $R \neq 0$ mindestens einen einfachen R-Modul. Nämlich ${}^{R}/_{M}$.

Dagegen existieren Ringe, die keine minimalen Linksideale haben. Beispielsweise ist $\mathbb{Z}$ solch ein Ring.

Satz 6.2
Sei S ein einfacher R-Modul. Dann existiert ein einfaches Linksideal $M \subseteq R$ mit $S \simeq {}^{R}/_{M}$.

Satz 6.3
Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $(N_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Untermoduln von M. Dann sind äquivalent:

(1) $f\colon \coprod_{i \in I} N_i \to \sum_{i \in I} N_i$ mit $(n_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} n_i$ ist ein R-Isomorphismus.

(2) Aus $(n_i)_{i\in I} \in \coprod_{i\in I} N_i$ mit $\sum_{i\in I} n_i = 0$ folgt $n_i = 0$ für alle $i \in I$.

(3) $j \in I \Rightarrow N_j \cap \sum_{j\neq i\in I} N_i = 0$.

Definition 6.2 (Direkte Summe)
Gegebenenfalls heißt die Summe von $(N_i)_{I\in I}$ die **direkte Summe**. Wir schreiben

$$\sum_{i\in I} N_i =: \bigoplus_{i\in I} N_i.$$

Bemerkung 6.3

(i) Im Fall $I = \{1, \ldots, n\}$ folgt leicht: $\sum_{i\in I} N_i = \bigoplus_{i\in I} N_i \Leftrightarrow N_j \cap \sum_{i=1}^{j-1} N_i = 0$ für alle j. Wir schreiben $\bigoplus_{i=1}^{n} N_i = N_1 \oplus \ldots \oplus N_n$.

(ii) Sei I beliebig und $\sum_{i\in I} N_i = \bigoplus_{i\in I} N_i =: N$. Dann ist $p_j \colon N \to N_j$ mit $\sum_{i\in I} n_i \mapsto n_j$ ein R-Epimorphismus und heißt **Projektor**. Weiter ist $q_j \colon N_j \to N$ mit $n_j \mapsto n_j$ ein R-Monomorphismus und heißt **Injektor**.

Wie in Beispiel 5.3 ist $p_j \circ q_j = \mathrm{id}_{N_j}$ und $p_k \circ q_j = 0$ für $j \neq k$. Außerdem ist $e_j = q_j \circ p_j \in \mathrm{End}_R(M)$ idempotent und es gilt $e_k \circ e_j = 0$ für $k \neq j$. Wenn I endlich ist, so ist $\sum_{i\in I} e_i = 0\mathrm{id}_N$.

(iii) Ist $M = N \oplus N'$ mit Untermoduln $N, N' \subseteq M$, so heißt N **direkter Summand** von M und N' heißt **Komplement** von N in M. Wir schreiben $N \mid M$. Im Allgemeinen ist N' durch N und M *nicht* eindeutig bestimmt.

Satz 6.4
Für einen R-Modul M sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) M lässt sich als Summe einfacher Untermoduln schreiben.

(2) M lässt sich direkte Summe einfacher Untermoduln schreiben.

(3) Jeder Untermodul $N \subseteq M$ hat ein Komplement in M, also $M = N \oplus N$.

Definition 6.3 (Halbeinfacher, vollständig reduzibler Modul)
Gegebenenfalls heißt der Modul M **halbeinfach** oder **vollständig reduzibel**.

Bemerkung 6.4
Wie in der Algebra folgt, wenn M halbeinfacher R-Modul und $N \subseteq M$ Untermodul ist, so ist auch N und M/N halbeinfach.

Definition 6.4 (Halbeinfacher Ring)
Ist der reguläre Linksmodul ${}_RR$ halbeinfach, so heißt der Ring R **halbeinfach**.

Bemerkung 6.5

(i) Genauer sollte man „linkshalbeinfach“ sagen. Es zeigt sich aber, dass jeder „linkshalbeinfache“ Ring auch „rechtshalbeinfach“ ist und umgekehrt.

(ii) Sei R halbeinfach und $R = \bigoplus_{i\in I} M_i$ mit einfachen Untermoduln M_i, d. h. mit minimalen Linksidealen. Wir schreiben $1 = \sum_{i\in I} m_i$ mit $m_i \in M_i$ für alle $i \in I$. Dabei ist $J = \{\, i \in I \mid m_i \neq 0 \,\}$ endlich. Dann ist also $1 = \sum_{j\in J} m_j$, d. h. $r = r1 = \sum_{j\in J} rm_j \in \sum_{j\in J} M_j$ für alle $r \in R$, d. h. $R = \sum_{j\in J} M_j = \bigoplus_{j\in J} M_j$. Somit ist R eine direkte Summe *endlich vieler* einfacher Untermoduln.

Insbesondere ist R linksartinsch und auch linksnoethersch. Nach der Definition 5.8 hat ${}_RR$ eine Kompositionsreihe. Nach dem Satz 6.2 kommt jeder einfache R-Modul bis auf Isomorphie als Kompositionsfaktor von ${}_RR$ vor. Daher existieren bis auf Isomorphie nur *endlich viele* einfache R-Moduln.

Satz 6.5
Ist R halbeinfach, so auch jeder R-Modul.

Satz 6.6
(i) Sei M ein R-Modul und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathrm{End}_R(M^n) \cong \mathrm{End}_R(M)^{n\times n}$.

(ii) $M_1, \ldots, M_n \in {}_R\mathbf{Mod}$, $\mathrm{Hom}_R(M_i, M_j) = 0$ für alle $i \neq j \Rightarrow \mathrm{End}_R(M_1 \times \ldots \times M_n) \cong \mathrm{End}_R(M_1) \times \ldots \times \mathrm{End}_R(M_n)$.

(iii) Sei $e \in R$ idempotent. So ist $\mathrm{End}_R(Re) \cong eRe$. Insbesondere $\mathrm{End}_R({}_RR) \cong R^o$.

Satz 6.7 (Satz von Wedderburn)
Genau dann ist der Ring R halbeinfach, wenn Zahlen $l \in \mathbb{N}_0$, $d_1, \ldots, d_l \in \mathbb{N}$ und Schiefkörper $D_1, \ldots, D_l$ existieren mit $R \cong D_1^{d_1\times d_1} \times \ldots \times D_l^{d_l\times d_l}$. Gegebenenfalls ist l eindeutig, $d_1, \ldots, d_l$ sind bis auf die Reihenfolge eindeutig und $D_1, \ldots, D_l$ sind bis auf die Reihenfolge und Isomorphie eindeutig.

Bemerkung 6.6
(i) l ist die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher R-Moduln.

(ii) Für $i = 1, \ldots, l$ ist $M_i := D_i^{d_i\times 1}$ ein einfacher Modul über $S := D_1^{d_1\times d_1} \times \ldots \times D_l^{d_l\times d_l}$ mit $(s_1, \ldots, s_l)m_i := s_i d_i$ für $s_1 \in D_1^{d_1\times d_1}, \ldots, s_l \in D_l^{d_l\times d_l}$, $m_i \in M_i$.

(iii) Für $i = 1, \ldots, l$ ist d_i die Vielfachheit von M_i als Kompositionsfaktor von ${}_SS$.

(iv) Analog ist R genau dann rechtshalbeinfach, wenn obige Bedingung erfüllt ist. Daher ist „rechtshalbeinfach“ dasselbe wie „linkshalbeinfach“.

7. Das Jacobson-Radikal

Sei R ein Ring.

Definition 7.1 (Radikal, Sockel)
Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$. Wie üblich definiert man **maximale** und **minimale Untermoduln** von M. Der Durchschnitt $\mathrm{Rad}(M) = \mathrm{Rad}_R(M)$ aller maximalen Untermoduln von M heißt **Radikal** oder **Jacobson-Radikal**. Die Summe $\mathrm{Soc}_R(M) = \mathrm{Soc}(M)$ aller minimalen Untermoduln von M heißt **Sockel** von M.

Bemerkung 7.1
Ein Untermodul $N \subseteq M$ ist genau dann **minimal**, wenn N ein einfacher R-Modul ist. M braucht keine minimalen Untermoduln zu haben. Gegebenenfalls setzt man $\mathrm{Soc}(M) := 0$.

Ein Untermodul $N \subseteq M$ ist genau dann **maximal**, wenn M/N ein einfacher R-Modul ist. Der Modul M braucht keine maximalen Untermoduln zu haben. Gegebenenfalls setzt man $\mathrm{Rad}(M) := M$.

Satz 7.1

(i) Sei $M, N \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Dann ist $f(\mathrm{Rad}(M)) \subseteq \mathrm{Rad}(N)$.

(ii) Sei $N \subseteq M$ ein Untermodul. Dann ist $\mathrm{Rad}(N) \subseteq \mathrm{Rad}(M)$ und $\mathrm{Rad}(M)+N/N \subseteq \mathrm{Rad}(M/N)$.

(iii) Sei $N \subseteq \mathrm{Rad}(M)$ ein Untermodul. Dann ist $\mathrm{Rad}(M/N) = \mathrm{Rad}(M)/N$.

(iv) Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von R-Moduln. Dann ist:

$$\mathrm{Rad}\left(\prod_{i \in I} M_i\right) \subseteq \prod_{i \in I} \mathrm{Rad}(M_i)$$
$$\mathrm{Rad}\left(\coprod_{i \in I} M_i\right) = \coprod_{i \in I} (\mathrm{Rad}(M_i))$$

Beweis:

(i) Sei $L \subseteq N$ ein maximaler Untermodul. Also ist N/L einfach. Sei $g \colon N \to N/L$ kanonisch. Dann ist $g \circ f \in \mathrm{Hom}_R(M, N/L)$. Im Fall $g \circ f = 0$ ist $\ker(g \circ f) = M$. Andernfalls ist $g \circ f$ surjektiv nach dem Satz 6.1. Also ist $M/\ker(g \circ f) \simeq N/L$ einfach nach dem Satz 4.1, d. h. $\ker(g \circ f) \subseteq M$ maximales Untermodul. In beiden Fällen ist $\mathrm{Rad}(M) \subseteq \ker(g \circ f)$, d. h. $g(f(\mathrm{Rad}(M))) = 0$. Also $f(\mathrm{Rad}(M)) \subseteq \ker(g) = L$. Damit folgt die Behauptung.

(ii) Man wende den ersten Punkt auf die Inklusionsabbildung $N \to M$ und die kanonische Abbildung $M \to {}^{M}/_{N}$ an.

(iii) Im Fall $N \subseteq \operatorname{Rad}(M)$ entsprechen sich die maximalen Untermoduln von M und von ${}^{M}/_{N}$ nach dem Korrespondenzsatz (Bemerkung 5.3 Punkt (vi)).

(iv) Sei $j \in I$ und $p_j \colon \prod_{i \in I} M_i \to M_j$. Wegen (i) ist $p_j(\operatorname{Rad}(\prod_{i\in I} M_i)) \subseteq \operatorname{Rad}(M_j)$. Daher $\operatorname{Rad}(\prod_{i\in I} M_i) \subseteq \prod_{i\in I} \operatorname{Rad}(M_i)$.

Wegen des zweiten Punktes folgt, $\operatorname{Rad}(\coprod_{i\in I} M_i) \subseteq \coprod(\prod_{i\in I} M_i) \subseteq \prod_{i\in I} \operatorname{Rad}(M_i)$. Daher hat man sogar, dass $\operatorname{Rad}(\coprod_{i\in I} M_i) \subseteq \coprod_{i\in I} \operatorname{Rad}(M_i)$.

Sei $j \in I$ und betrachten den Injektor $q_j \colon M_j \to \coprod_{i\in I} M_i$. Wegen des ersten Punktes gilt, $q_j(\operatorname{Rad}(M_j)) \subseteq \operatorname{Rad}(\coprod_{i\in I} M_i)$. Daher erhält man $\coprod_{i\in I} \operatorname{Rad}(M_j) = \sum_{j\in I} q_j(\operatorname{Rad}(M_j)) \subseteq \operatorname{Rad}(\coprod_{i\in I} M_i)$. Damit folgt die Behauptung. ■

Satz 7.2
Für $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ gilt:

(i) $\operatorname{Rad}(M) = 0 \Leftrightarrow M$ ist zu einem Untermodul eines direkten Produkts einfacher Moduln isomorph.

(ii) Sei M halbeinfach. Dann ist $\operatorname{Rad}(M) = 0$. Im Allgemeinen gilt nur die eine Richtung.

(iii) $M \in {}_R\mathbf{mod}$ und halbeinfach genau dann, wenn M artinsch und $\operatorname{Rad}(M) = 0$ ist.

(iv) $0 \neq M \in {}_R\mathbf{mod} \Rightarrow \operatorname{Rad}(M) \neq M$.

Beweis:

(i) „$\Rightarrow$“ Sei $\operatorname{Rad}(M) = 0$ und $\mathfrak{M}$ die Menge der maximalen Untermoduln von M. Dann ist $f \colon M \to \prod_{N\in\mathfrak{M}} {}^{M}/_{N}$ mit $m \mapsto (m+N)_{N\in\mathfrak{M}}$ eine R-lineare Abbildung mit dem Kern $\ker(f) = \bigcap_{N\in\mathfrak{M}} N = \operatorname{Rad}(M) = 0$. Daher ist $M \simeq \operatorname{Bld}(f) \subseteq \prod_{N\in\mathfrak{M}} {}^{M}/_{N}$ Untermodul.

„$\Leftarrow$“ Sei $(S_i)_{i\in I}$ eine nichtleere Familie einfacher R-Moduln und $f \colon M \to \prod_{i\in I} S_i$ ein R-Monomorphismus. Wegen Satz 7.1 ist $f(\operatorname{Rad}(M)) \subseteq \operatorname{Rad}(\prod_{i\in I} S_i) \subseteq \prod_{i\in I} \operatorname{Rad}(S_i) = 0$. Da f injektiv ist, ist $\operatorname{Rad}(M) = 0$.

(ii) folgt aus dem obigen Punkt und dem Satz 6.4.

(iii) „$\Rightarrow$“ Sei $M = Rm_1 + \cdots + Rm_n$ mit $m_1, \ldots, m_n \in M$. Ist M halbeinfach, so ist $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ mit einfachen Untermoduln M_i für $i \in I$. Dann existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $m_1, \ldots, m_n \in \bigoplus_{j\in J} M_j$. Also $M \subseteq \bigoplus_{j\in J} M_j$. Jedes M_j ist artinsch. Somit ist auch M artinsch. Wegen des zweiten Punkts ist $\operatorname{Rad}(M) = 0$.

„$\Leftarrow$" Sei M artinsch und $\operatorname{Rad}(M) = 0$ und Œ $M \neq 0$. Dann definieren wir $\mathfrak{M} := \{ N \mid N$ Durchschnitt endlich vieler maximaler Untermoduln von $M \}$. Es ist $\mathfrak{M} \neq \emptyset$, da $M \in \mathfrak{M}$. Folglich enthält $\mathfrak{M}$ ein minimales Element D. Für jeden maximalen Untermodul $L \subsetneq M$ ist $D \cap L \in \mathfrak{M}$. Da D minimal ist, gilt, $D = D \cap L \subsetneq L$. Dies zeigt, dass $D \subseteq \operatorname{Rad}(M) = 0$. Also existieren endlich viele maximale Untermoduln $M_1, \ldots, M_n \subsetneq M$ mit $M_1 \cap \cdots \cap M_n = 0$. Daher ist $f\colon M \to M/M_1 \times \ldots \times M/M_n$ mit $m \mapsto (m + M_1, \ldots, m + M_n)$ ein R-Monomorphismus. Da $M/M_1, \ldots, M/M_n$ noethersch sind, ist das direkte Produkt ebenso noethersch wie auch M selbst.

(iv) Sei $0 \neq M \in {}_R\mathbf{mod}$ und $M = Rm_1 + \cdots + Rm_n$. Weiter sei Œ n miminal. Dann: $N := Rm_2 + \cdots + Rm_n \neq M$ und $0 \neq M/N = R(m_1 + N)$. Also ist $f\colon R \to M/N$ mit $r \mapsto r(m_1 + N)$ ein R-Epimorphismus mit dem Kern $\ker(f) \neq R$. Nach der Bemerkung 6.2 Punkt (ii) existiert ein maximales Linksideal $L \subsetneq R$ mit $\ker(f) \subseteq L$. Dann ist $L/\ker(f) \subsetneq R/\ker(f)$ ein maximaler Untermodul, d. h. $\operatorname{Rad}(R/\ker(f)) \neq R/\ker(f)$. Wegen $M/N \simeq R/\ker(f)$ ist auch $\operatorname{Rad}(M/N) \neq M/N$. Nach dem Satz 7.1 Punkt (ii) ist $\operatorname{Rad}(M) + N/N \neq M/N$, also auch $\operatorname{Rad}(M) \neq M$. ∎

Satz 7.3 (Nakayamas Lemma)
Sei $M \in {}_R\mathbf{mod}$ und $N \subseteq M$ Untermodul mit $M = N + \operatorname{Rad}(M)$. Dann folgt, $N = M$.

BEWEIS:
$\operatorname{Rad}(M/N) \supseteq \operatorname{Rad}(M) + N/N = M/N \Rightarrow M/N = 0 \Rightarrow M = N$ ∎

Satz 7.4
Sei $m \in M \in {}_R\mathbf{mod}$. Dann gilt $m \in \operatorname{Rad}(M)$ genau dann, wenn für jeden Untermodul $N \subseteq M$ mit $M = N + Rm$ ist $M = N$.

BEWEIS:
„$\Rightarrow$" Sei $m \in \operatorname{Rad}(M)$ und $N \subseteq M$ Untermodul mit $M = N + Rm$. Dann ist $M = N + \operatorname{Rad}(M)$, d. h. $M = N$ nach Satz 7.3.

„$\Leftarrow$" Sei $m \in M \setminus \operatorname{Rad}(M)$. Dann existiert ein maximaler Untermodul $N \subsetneq M$ mit $m \notin N$. Daher $N + Rm = M$, aber $M \neq N$. ∎

Definition 7.2 (Jacobson-Radikal)
$J(R) := \operatorname{Rad}({}_RR)$ heißt **Radikal** oder **JACOBSON-Radikal** von R.

Bemerkung 7.2
(i) $J(R)$ ist also der Durchschnitt aller maximalen Linksideale von R. Bald werden wir sehen, dass dies auch für den Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale von R gilt.

(ii) $R \neq 0 \Rightarrow J(R) \neq R$ nach dem Satz 7.2 Punkt (iv).

(iii) Sei $m \in M \in {}_R\mathbf{Mod}$. Dann ist $f\colon R \to M$ mit $r \mapsto r \cdot m$ eine R-lineare Abbildung. Daher $J(R)m = f(J(R)) \subseteq \operatorname{Rad}(M)$. Daher ist $J(R)M \subseteq \operatorname{Rad}(M)$ nach dem Satz 7.1. Insbesondere ist $J(R)R \subseteq J(R)$, d. h. $J(R) \trianglelefteq R$.

(iv) Für $I \trianglelefteq R$ ist ${}^{J(R)+I}/_{I} \subseteq \operatorname{Rad}({}^{R}/_{I}) = J({}^{R}/_{I})$ wegen Satz 7.1. Falls $I \subseteq J(R)$, ist sogar $J({}^{R}/_{I}) = {}^{J(R)}/_{I}$. Insbesondere ist $J({}^{R}/_{J(R)}) = 0$.

(v) R halbeinfach $\Leftrightarrow$ R linksartinsch und $J(R) = 0$ nach dem Satz 7.2.

(vi) R linksartinsch $\Rightarrow$ ${}^{R}/_{J(R)}$ linksartinsch und $J({}^{R}/_{J(R)}) = 0 \Rightarrow {}^{R}/_{J(R)}$ halbeinfach

(vii) Sei der Ring R linksartinsch und $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ mit $J(R)M = 0$. Wir fassen M als ${}^{R}/_{J(R)}$-Modul auf:

$$(r + J(R))m := rm \qquad r \in R, m \in M$$

Wenn ${}^{R}/_{J(R)}$ halbeinfach ist, dann ist M als ${}^{R}/_{J(R)}$-Modul einfach und es folgt, dass auch M als R-Modul einfach ist.

(viii) Sei R linksartinsch und $M \in {}_R\mathbf{Mod}$. Dann $J(R)[{}^{M}/_{J(R)M}] = 0$, also ist ${}^{M}/_{J(R)M}$ halbeinfach. Daher: $0 = \operatorname{Rad}({}^{M}/_{J(R)M}) = {}^{\operatorname{Rad}(M)}/_{J(R)M}$, d. h. $\operatorname{Rad}(M) = J(R)M$.

Satz 7.5

$$\begin{aligned} J(R) &= \{\, x \in R \mid 1 + axb \in U(R), \forall a, b \in R \,\} \\ &= \{\, x \in R \mid 1 + ax \in U(R), \forall a \in R \,\} \\ &= \{\, x \in R \mid 1 + ax \text{ linksinvertierbar für alle } a \in R \,\} \\ &= \{\, x \in R \mid xS = 0 \text{ für alle einfachen } R\text{-Moduln } S \,\} \end{aligned}$$

BEWEIS:

Gleichung 1 Seien $x \in J(R)$ mit $a, b \in R$, also $y := -axb \in J(R)$. Es ist zu zeigen, dass $1 - y \in U(R)$.

Wir nehmen an, dass $R(1-y) \neq R$. Dann existiert ein maximales Linksideal $L \subseteq R$ mit $R(1-y) \subseteq L$. Insbesondere: $1 - y \in L$. Wegen $y \in J(R) \subseteq L$ folgt, $1 = (1-y) + y \in L \Rightarrow L = R$↯

Also: $R(1-y) = R$. Sei $z \in R$ mit $z(1-y) = 1$. Dann: $1 - z = -zy \in J(R)$. Mit den gleichen Argumenten wie oben existiert $u \in R$ mit $u(1-(1-z)) = 1$. Folglich ist $1 = uz$ und damit $z \in U(R)$ sowie $1 - y = 1 + axb \in U(R)$

Gleichung 2 Sei $x \in R$ mit $1 + ax$ linksinvertierbar für alle $a \in R$. Wir nehmen an, dass ein einfacher R-Modul S mit $xS \neq 0$ existiert. Sei $s \in S$ mit $xs \neq 0$. Dann: $Rxs = S$, da S einfach. Sei $r \in R$ mit $rxs = s$. Dann: $0 = (1 - rx)s$. Da $(1 - rx)$ linksinvertierbar ist, folgt, $s = 0$, also $xs = 0$.↯

Gleichung 3 Sei $x \in R$ mit $xS = 0$ für jeden einfachen R-Modul S. Für jedes maximale Linksideal $M \subseteq R$ ist ${}^{R}/_{M}$ ein einfacher R-Modul. Also: $0 = x({}^{R}/_{M}) = {}^{(xR+M)}/_{M}$, d. h. $xR \subseteq M$, insbesondere $x \in M$. Das zeigt also, $x \in J(R)$. ∎

Bemerkung 7.3
Die erste Beschreibung von $J(R)$ in Satz 7.5 ist unabhängig davon, ob man mit Links- oder Rechtsmoduln arbeitet. Daher ist $J(R)$ auch der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale von R und $J(R) = \{ x \in R \mid Sx = 0 \forall$ einfachen R-Rechtsmodul $S \}$.

Satz 7.6
$J(R)$ enthält jedes Linksideal (Rechtsideal) $N \subseteq R$, dass nur aus nilpotenten Elementen besteht. Insbesondere enthält das Jacobson-Radikal von R stets das Primradikal von R.

BEWEIS:
Seien $x \in N$ mit $a \in R$. Dann: $y := -ax \in N$, d. h. y ist nilpotent. Folglich ist $(1-y)$ invertierbar, d. h. $1 + ax$ linksinvertierbar, also $x \in J(R)$. ∎

Satz 7.7
Sei R linksartinsch. Dann ist $J(R) \trianglelefteq R$ ein nilpotentes Ideal und es folgt, $\mathrm{Rad}(R) = J(R)$.

BEWEIS:
Sei R linksartinsch. Dann existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $J(R) =: J \supseteq J^2 \supseteq \ldots \supseteq J^m = J^{m+1} = \cdots$. Wir nehmen an, das $J^m \neq 0$. Dann existiert in der Menge der Linksideale $I \subseteq R$ mit $J^m I \neq 0$ ein minimales Element L. Wegen $J^m L \neq 0$ existiert ein $a \in L$ mit $J^m a \neq 0$. Dann ist $J^m a \subseteq R$ ein Linksideal und $J^m a \subseteq L$ sowie $J^m \cdot J^m a = J^{2m} a = J^m a \neq 0$. Nach der Wahl von L ist $J^m a = L$. Also existiert ein $x \in J^m$ mit $xa = a$, dann $0 = (1-x)a$ und somit $a = 0$ ↯ ∎

Satz 7.8 (Hopkins)
Sei R linksartinsch. Dann ist R linksnoethersch.

BEWEIS:
Sei $J := J(R)$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $J^n = 0$. Für $k = 1, \ldots, n-1$ ist ${}^{J^{k-1}}\!/_{J^k} \in {}_R\mathbf{Mod}$ ein artinscher Modul und $J({}^{J^{k-1}}\!/_{J^k}) = {}^{J^k}\!/_{J^k} = 0$. Dann ist ${}^{J^{k-1}}\!/_{J^k}$ halbeinfach und artinsch. Nach dem Satz 7.2 (iii) ist ${}^{J^{k-1}}\!/_{J^k}$ noethersch. Also J^k noethersch für $k = 0, \ldots, n$ und insbesondere $R = J^0$ noetherscher R-Modul. ∎

8. Lokale Ringe und unzerlegbare Moduln

Sei R ein Ring.

Satz 8.1
Im Fall $R \neq 0$ sind äquivalent:

(i) $J(R) \subseteq R$ maximales Linksideal, d. h. $J(R)$ ist das einzige maximale Linksideal.

(ii) $R/J(R)$ ist ein Schiefkörper.

(iii) $R = U(R) \cup J(R)$

(iv) Die Nichteinheiten bilden ein Ideal in R.

(v) Seien x und y aus R Nichteinheiten. Dann ist auch $x + y$ eine Nichteinheit.

BEWEIS:
(i)⇒(ii) Sei (i) erfüllt. Dann ist $0 \subseteq R/J(R) =: S$ ein maximales Linksideal. Für $0 \neq s \in S$ ist also $Ss = S$. Insbesondere existiert ein $t \in S$ mit $ts = 1_S$. Wegen $t \neq 0$ existiert analog ein $u \in S$ mit $ut = 1_S$, d. h. $t \in U(R)$. Dann ist $s = t^{-1} \in U(R)$.

(ii)⇒(iii) Sei (ii) erfüllt und $x \in R \setminus J(R)$, d. h. $0 \neq x + J(R) \in R/J(R)$. Wegen der Schiefkörper-Bedingung existiert ein $y \in R$ mit $1 + J(R) = (x + J(R))(y + J(R)) = xy + J(R)$. Sei nun $z \in J(R)$ mit $xy = 1 + z$. Dann ist $1 + z \in U(R)$, d. h. $xy(1 + z)^{-1} = 1$. Daher ist x rechtsinvertierbar. Analog ist x auch linksinvertierbar, d. h. $x \in U(R)$.

(iii)⇒(iv) Sei (iii) erfüllt. Wegen $U(R) \cap J(R) = \emptyset$ ist $R \setminus U(R) = J(R) \trianglelefteq R$.

(iv)⇒(v) trivial

(v)⇒(i) Sei (v) erfüllt. Wir nehmen an, dass es verschiedene maximale Linksideale $L, M \trianglelefteq R$ gibt. Dann ist $L + M = R$, also $x \in L$ und $y \in M$ mit $x + y = 1$. Dann sind $x, y \in R$ Nichteinheiten und somit ist auch $x + y$ eine Nichteinheit. Also enthält R genau ein maximales Linksideal L. Dann ist $L = J(R)$. ■

Definition 8.1 (Lokaler Ring)
Gegebenenfalls heißt R **lokal**.

Beispiel 8.1
(a) Jeder Schiefkörper ist lokal, dagegen ist $\mathbb{Z}$ nicht lokal.

(b) Sei $p \in \mathbb{P}$. Dann ist $\mathbb{Z}_{(p)} := \{\, {}^a\!/_b \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z} \,\}$ lokal. Denn für $a, b \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ ist ${}^a\!/_b \cdot {}^b\!/_a = 1$, d. h. ${}^a\!/_b \in U(\mathbb{Z}_{(p)})$ und umgekehrt $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ mit ${}^a\!/_b \cdot {}^c\!/_d = 1$, so ist $p \nmid bd$, also $ac = bd$, d. h. $a, c \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$. Daher: $U(\mathbb{Z}_{(p)}) = \{\, {}^a\!/_b \mid a, b\mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z} \,\}$.

$$\mathbb{Z}_{(p)} \setminus U(\mathbb{Z}_{(p)}) = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in p\mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z} \right\} = p \cdot \mathbb{Z}_{(p)} \trianglelefteq \mathbb{Z}_{(p)}$$

Bemerkung 8.1
Sei R lokal und $e = e^2 \in R$. Wegen $e + (1 - e) = 1$ ist $e \in U(R)$ oder $1 - e \in U(R)$. Wegen $e(1 - e) = 0$ ist also $e = 0$ oder $1 - e = 0$. Also sind in einem lokalen Ring 0 und 1 die einzigen Idempotente.

Satz 8.2
Für $0 \neq M \in {}_R\mathbf{Mod}$ sind äquivalent:

(i) $M_1, M_2 \subseteq M$ Untermoduln mit $M = M_1 \oplus M_2 \Rightarrow M_1 = 0 \vee M_2 = 0$.

(ii) Es sind 0 und 1 die einzigen Idempotente in $\mathrm{End}_R(M)$.

BEWEIS:
(i)⇒(ii) Sei (i) erfüllt und $e = e^2 \in E := \mathrm{End}_R(M)$. Ist $x \in \mathrm{Bld}(e) \cap \ker(e)$ und $y \in M$ mit $x = e(y)$, so ist $0 = e(x) = e^2(y) = e(y) = x$. Also: $\mathrm{Bld}(e) \cap \ker(e) = \{0\}$. Für $m \in M$ ist ferner $e(m - e(m)) = e(m) - e^2(m) = 0$. Also $m - e(m) \in \ker(e)$ und $m = e(m) + (m - e(m)) \in \mathrm{Bld}(e) + \ker(e)$. Daher: $M = \mathrm{Bld}(e) \oplus \ker(e)$. Wegen (i) folgt, $\mathrm{Bld}(e) = 0 \Rightarrow e = 0$ oder $\ker(e) = 0 \Rightarrow e$ injektiv, also $M = \mathrm{Bld}(e) \Rightarrow e$ surjektiv und aus $e = e^2 \Rightarrow e = 1$.

(ii)⇒(i) Sei (ii) erfüllt und $M = M_1 \oplus M_2$ mit $M_1, M_2 \subseteq M$. Seien p_1, p_2 bzw. q_1, q_2 die entsprechenden Projektoren bzw. Injektoren. Dann sind $e_1 := q_1 \circ p_1, e_2 := q_2 \circ p_2 \in E$ Idempotente mit $e_1 + e_2 = \mathrm{id}_M$. Wegen (ii) folgt, $e_1 = 0$ oder $e_2 = 0$. Sei Œ $e_1 = 0$ und $e_2 = 1$. Dann: $0 = e_1(M) = p_1(M) = M_1$. ■

Definition 8.2 (Unzerlegbarer Modul)
Gegebenenfalls heißt M **unzerlegbar**.

Bemerkung 8.2

(i) Ist $\mathrm{End}_R(M)$ ein lokaler Ring, so ist M unzerlegbar. Gegebenenfalls heißt M **streng unzerlegbar**. Nicht jeder unzerlegbare Modul ist streng unzerlegbar. Beispielsweise sei $R = \mathbb{Z} = M$ und $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Dann ist (ii) erfüllt, aber $\mathbb{Z}$ ist nicht lokal.

(ii) Nach (i) und SCHURS Lemma (Satz 6.1) ist jeder einfache Modul streng unzerlegbar. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Satz 8.3
Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ mit streng unzerlegbaren Untermoduln $M_i \subseteq M$. Sind $f_1, f_2 \in \mathrm{End}_R(M)$ mit $\mathrm{id}_M = f_1 + f_2$, so existieren zu jedem $j \in I$ ein $k \in \{1, 2\}$ derart, dass $f_k|_{M_j}$ injektiv und $M = f_n(M_j) \oplus \bigoplus_{j \neq i \in I} M_i$ ist.

BEWEIS:
Sei $j \in I$ fest, $p_j\colon M \to M_j$ der Projektor und $q_j\colon M_j \to M$ der Injektor. Dann ist $\mathrm{id}_{M_j} = p_j \circ q_j = p_j \circ \mathrm{id}_M \circ q_j = p_j \circ (f_1 + f_2) \circ q_j = p_j \circ f_1 \circ q_j + p_j \circ f_2 q_j$. Da id_{M_j} invertierbar ist, ist $p_j \circ f_1 \circ q_j$ oder $p_j \circ f_2 \circ q_j$ invertierbar, d. h. bijektiv. Sei Œ $p_j \circ f_1 \circ q_j$ bijektiv. Dann: $f_1|_{M_j} = f_1 \circ q_j$ injektiv. Sei $x \in f_1(M_j) \cap \bigoplus_{j \neq i \in I} M_i$, also $x = f_1(y)$ mit $y \in M_j$.. Dann ist $0 = p_j(x) = p_j(f_1(y)) = (p_j \circ f_1 \circ q_j)(y)$, d. h. $y = 0$ und $x = f_1(y) = 0$. Damit ist $f_1(M_j) \cap \bigoplus_{j \neq i \in I} M_i = 0$.

Für $m \in M$ ist $p_j(m) \in M_j$, also $p_j(m) = (p_j \circ f_1 \circ q_j)(m_j)$ für ein $m_j \in M_j$. Dann ist $m - (f_1 \circ q_j)(m_j) \in \ker(p_j) = \bigoplus_{j \neq i \in I} M_i$. Also $m = f_1(q_j(m_j)) + (m - f_1(q_j(m_j))) \in f_1(M_j) + \bigoplus_{j \neq i \in I} M_i$. ■

Satz 8.4
Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ mit streng unzerlegbaren Untermoduln M_i. Sind f_1 und f_2 aus $\mathrm{End}_R(M)$ mit $\mathrm{id}_M = f_1 + f_2$, so existieren zu paarweise verschiedenen $j_1, \ldots, j_t \in I$ stets $k_1, \ldots, k_t \in \{1, 2\}$, sodass $f_{k_1}|_{M_{j_1}}, \ldots, f_{k_t}|_{M_{j_t}}$ injektiv sind und

$$M = f_{k_1}(M_{j_1}) \oplus \ldots \oplus f_{k_t}(M_{j_t}) \oplus \bigoplus_{i \in I \setminus \{j_1, \ldots, j_t\}} M_i$$

BEWEIS:
Nach dem Satz 8.3 existiert ein $k_1 \in \{1, 2\}$, sodass $f_{k_1}|_{M_{j_1}}$ injektiv und $M = f_{k_1}(M_{j_1}) \oplus \bigoplus_{i \in I \setminus \{j_1\}} M_i$ ist. Wegen $M_{j_1} \simeq f_{k_1}(M_{j_1})$ ist $\mathrm{End}_R(f_{k_1}(M_{j_1}))$ lokal, d. h. $f_{k_1}(M_{j_1})$ ist streng unzerlegbar. Daher kann man auf diese Zerlegung ebenfalls den Satz 8.3 anwenden. Es existiert also ein $k_2 \in \{1, 2\}$ derart, dass $f_{k_2}(M_{j_2})$ injektiv ist und die zweite Eigenschaft gilt. So fährt man dann fort. ■

Satz 8.5
Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ mit streng unzerlegbaren Untermoduln $M_i \subseteq M$. Ferner sei $M = A \oplus B$ mit Untermoduln $A, B \subseteq M$. Dabei sei A unzerlegbar und $p\colon M \to A$ der entsprechende Projektor. Dann existiert ein $j \in I$, sodass $P|_{M_j}$ ein R-Isomorphismus und $M = M_j \oplus B$ ist.

BEWEIS:
Sei $q\colon A \to M$ der entsprechende Injektor. Denn ist $e := q \circ q \in \mathrm{End}_R(M)$ ein Idempotent und $\mathrm{id}_M = e + (\mathrm{id}_M - e)$. Wir setzen $f_1 := e$ und $f_2 := 1 - e$. Sei $0 \neq a \in A$. Wir schreiben $a = \sum_{i \in I} a_i$ mit $a_i \in M_i$. Nach dem Satz 8.4 existieren $k_1, \ldots, k_t \in \{1, 2\}$, sodass $f_{k_1}|_{M_{j_1}}, \ldots, f_{k_t}|_{M_{j_t}}$ injektiv sind und

$$M = f_{k_1}(M_{j_1}) \oplus \ldots \oplus f_{k_t}(M_{j_t}) \oplus \bigoplus_{i \in I \setminus \{j_1, \ldots, j_t\}} M_i$$

Wir nehmen an, dass $k_1 = \cdots = k_t = 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 = (\mathrm{id}_M - e)(a) = (\mathrm{id}_M - e)(\sum_{i \in I} a_i) &= \sum_{s=1}^{t} (\mathrm{id}_M - e)(a_{j_s}) \\ &= \sum_{s=1}^{t} f_{k_s}(a_{j_s}) \\ &\Rightarrow 0 = f_{k_1}(a_{j_1}) = \cdots = f_{k_t}(a_{j_k}) \\ &\Rightarrow 0 = a_{j_1} = \cdots = a_{j_t} \lightning \end{aligned}$$

Also existiert ein $s \in \{1, \dots, t\}$ mit $k_s = 1$. Wir setzen $j := j_s$. Dann ist $f_{k_s} = e|_{M_j}$ injektiv und $M = e(M_j) \oplus L$ mit einem Untermodul $L \subseteq M$. Folglich ist $p|_{M_j}$ injektiv und $e(M_j) = p(M_j) \subseteq A$. Daher:

$$A = M \cap A = (p(M_j) + L) \cap A = p(M_j) + (L \cap A) = p(M_j) \oplus (L \cap A)$$

Da A unzerlegbar ist, folgt, dass $p(M_j) = 0$ oder $L \cap A = 0$. Aber $p(M_j) \neq 0$. Also $L \cap A = 0$ und $A = p(M_j)$. Daher ist $p|_{M_j}$ ein R-Isomorphismus.

Sei $x \in M_j \cap B$. Dann ist $p(x) = 0$. Aus der Injektivität von $p|_{M_j}$ folgt, $x = 0$.

Sei $m \in M$. Dann ist $p(m) \in A = p(M_j)$. Also existiert ein $m_j \in M_j$ mit $p(m) = p(m_j)$. Somit ist $m - m_j \in \ker(p) = B$ und $m = m_j + (m - m_j) \in M_j + B$. Also ist $M = M_j \oplus B$. ■

Satz 8.6 (Azumaya-Krull-Remak-Schmidt)
Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $M = \bigoplus_{i \in I} M_i = \bigoplus_{j \in J} N_j$ mit unzerlegbaren Untermoduln $M_i, N_j \subseteq M$. Für $i \in I$ sei M_i streng unzerlegbar. Dann existiert eine Bijektion $\beta\colon I \to J$ mit $M_i \simeq N_{\beta(i)}$.

BEWEIS:
Nach dem Satz 8.5 ist jedes N_j zu einem M_i isomorph, also streng unzerlegbar. Daher sind die Voraussetzungen symmetrisch in beiden Zerlegungen.

Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf I:

$$i \sim i' \Leftrightarrow M_i \simeq M_{i'}$$

Für $i \in I$ sei $\bar{i}$ die entsprechende Äquivalenzklasse. Ferner sei $\bar{I} := \{\, \bar{i} \mid i \in I \,\}$ die Menge aller Äquivalenzklassen. Analoge Bezeichnungen werden für J eingeführt.

Nach dem Satz 8.5 existiert zu jedem $i \in I$ ein $j \in J$ mit $M_i \simeq N_j$. Wir setzen $\Phi(\bar{i}) := \bar{j}$ und erhalten so eine Bijektion $\Phi\colon \bar{I} \to \bar{J}$. Es genügt zu zeigen, dass für $i \in I$ eine Bijektion $\beta_i\colon \bar{i} \to \Phi(\bar{i})$ existiert. Wir zeigen nur, dass für $i \in I$ eine Injektion $\Phi(\bar{i}) \to \bar{i}$ existiert. Aus Symmetriegründen existiert dann analog eine Injektion $\bar{i} \to \Phi(\bar{i})$ und aus dem Satz von SCHRÖDER-BERNSTEIN (Satz 8.7) aus der Mengenlehre folgt die Behauptung. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall $|\bar{i}| < \infty$: Seien $j_1, \ldots, j_t \in \Phi(\bar{i})$ paarweise verschieden. Nach dem Satz 8.5 existiert ein $i_1 \in I$ mit $N_{j_1} \simeq M_{i_1}$ und $M = M_{i_1} \oplus \bigoplus_{j \in J \setminus \{j_1\}} N_j$. Ebenfalls nach Satz 8.5 existiert ein $i_2 \in I$ mit $N_{j_2} \simeq M_{i_2}$ und $M = M_{i_1} \oplus M_{i_2} \oplus \bigoplus_{j \in J \setminus \{j_1, j_2\}} N_j$. So fahren wir fort und erhalten $i_1, \ldots, i_t \in I$ mit $N_{j_1} \simeq M_{i_1}, N_{j_2} \simeq M_{i_2}, \ldots, N_{j_t} \simeq N_{j_t}$ und

$$M = M_{i_1} \oplus \ldots \oplus M_{i_t} \oplus \bigoplus_{j \in J \setminus \{j_1, \ldots, j_t\}} N_j$$

Da die Summe direkt ist, sind $i_1, \ldots, i_t$ paarweise verschieden. Daher ist $|\bar{i}| \geq t$. Folglich ist $|\Phi(\bar{i})| < \infty$ und $|\bar{i}| \geq |\Phi(\bar{i})|$.

2. Fall $|\bar{i}| = \infty$: Für $j \in J$ sei $p'_j \colon M \to N_j$ der entsprechende Projektor und für $k \in I$ sei $E(k) := \left\{ j \in J \;\middle|\; p'_j|_{M_k} \text{ ist } R\text{-Isomorphismus} \right\}$.

Wir zeigen zunächst, $|E(k)| < \infty$. Dazu sei $0 \neq m \in M_k$ fest und schreibe $m = \sum_{j \in J} n_j$ mit $n_j \in N_j$ für $j \in J$. Dabei ist $J_0 := \{ j \in J \mid n_j \neq 0 \}$ endlich. Für $j \in E(k)$ ist $0 \neq p'_j(m) = n_j$, d. h. $j \in J_0$. Somit ist $E(k) \subseteq J_0$, insbesondere ist $E(k)$ endlich.

Als nächstes zeigen wir, dass $\Phi(\bar{i}) = \bigcup_{k \in \bar{i}} E(k)$ ist. Für $k \in \bar{i}$ und $j \in E(k)$ ist $M_i \simeq M_k \simeq N_j$, d. h. $j \in \Phi(\bar{i})$. Für $j \in \Phi(\bar{i})$ ist umgekehrt $M_i \simeq N_j$. Nach dem Satz 8.5 existiert ferner ein $k \in I$, sodass $p'_j|_{M_k}$ ein R-Isomorphismus ist. Daher: $M_k \simeq N_j \simeq M_i$, also $k \in \bar{i}$ mit $j \in E(k)$. Wir haben also $\Phi(\bar{i}) = \bigcup_{k \in \bar{i}} E(k)$. Also existiert eine Injektion $\Phi(\bar{i}) \to \bar{i} \times \mathbb{N}$. In der Mengenlehre zeigt man aber, dass eine Bijektion zwischen $\bar{i}$ und $\bar{i} \times \mathbb{N}$ existiert. Daher existiert eine Injektion $\Phi(\bar{i}) \to \bar{i}$. ∎

Satz 8.7 (Satz von Schröder-Bernstein)
Hat man Injektionen $f \colon X \to Y$ und $g \colon Y \to X$, so existiert eine Bijektion $h \colon X \to Y$.

BEWEIS:
Für $x = x_0 \in X$ sei y_0 das Urbild von x unter g, falls es existiert. Weiterhin sei x_1 das Urbild von y_0 unter f, falls es existiert.

1. Fall Die Folge $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots$ ist unendlich.

2. Fall Die Folge $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_k$ endet bei einem $x_k \in X$.

3. Fall Die Folge $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, y_l$ endet bei einem $y_l \in Y$.

Die entsprechenden Teilmengen von X seien X_∞, X_X und X_Y. Analog definieren wir Teilmengen Y_∞, Y_X und Y_Y von Y. Dann haben wir die folgenden Bijektionen:

$$\begin{aligned} X_\infty &\to Y_\infty & x &\mapsto f(x) \\ X_X &\to Y_X & x &\mapsto f(x) \\ Y_Y &\to X_Y & y &\mapsto g(y) \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich die gewünschte Bijektion. ∎

Bemerkung 8.3
Zunächst zeigen wir, dass für jede unendliche Menge X eine Bijektion $X \times \mathbb{N} \to X$ existiert. Dies ist bekanntlich richtig, falls X abzählbar ist. Im allgemeinen Fall ist

$$F := \{\, f \colon Y \times \mathbb{N} \to Y \mid Y \subseteq X, f \text{ bijektiv} \,\}$$

nichtleer, da X eine abzählbare Teilmenge enthält. Wir definieren auf F eine Ordnung $\geq$ durch: $f \leq g \Leftrightarrow g$ Fortsetzung von f. Es ist leicht zu sehen, dass jede total geordnete Teilmenge von F eine obere Schranke besitzt. Nach dem Lemma von ZORN enthält F ein maximales Element $g \colon Z \times \mathbb{N} \to Z$. Falls $Z = X$ sind wir fertig. Also nehmen wir an, dass $Z \neq X$.

1. Fall $|X \setminus Z| = \infty$: Dann existiert eine abzählbare Teilmenge Z' von $X \setminus Z$ und eine Bijektion $g' \colon Z' \times \mathbb{N} \to Z'$. Daher kann man g zu einer Bijektion $(Z \cup Z') \times \mathbb{N} \to Z \cup Z'$ fortsetzen. Dies steht im Widerspruch zur Maximalität von g.

2. Fall $0 < |X \setminus Z| < \infty$: Dann existiert eine Bijektion $h \colon Z \to X$. Diese induziert eine Bijektion $h' \colon Z \times \mathbb{N} \to X \times \mathbb{N}$. Wir erhalten insgesamt eine Bijektion $X \times \mathbb{N} \xrightarrow{h'^{-1}} Z \times \mathbb{N} \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X$.

Satz 8.8 (Fittings Lemma)
Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ artinsch und noethersch und $f \in \mathrm{End}_R(M)$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $M \supseteq \mathrm{Bld}(f) \supseteq \mathrm{Bld}(f^2) \supseteq \ldots \supseteq \mathrm{Bld}(f^k) = \mathrm{Bld}(f^{k+1}) = \cdots$

(ii) $0 \subseteq \ker(f) \subseteq \ker(f^2) \subseteq \ldots \subseteq \ker(f^k) = \ker(f^{k+1}) = \cdots$

(iii) $M = \ker(f^k) \oplus \mathrm{Bld}(f^k)$

BEWEIS:
Da M artinsch und noethersch sind, brechen die Folgen in (i) und (ii) ab. Also existiert ein $k \in \mathbb{N}$, welches die beiden Bedingungen erfüllt.

Sei $x \in \mathrm{Bld}(f^k) \cap \ker(f^k)$. Sei $y \in M$ mit $x = f^k(y)$. Dann ist $0 = f^k(x) = f^{2k}(y)$, d. h. $y \in \ker(f^{2k}) = \ker(f^k)$, d. h. $f^k(y) = 0 = x$. Sei $m \in M$. Dann ist $f^k(m) \in \mathrm{Bld}(f^k) = \mathrm{Bld}(f^{2k})$. Sei $n \in M$ mit $f^k(m) = f^{2k}(n)$. Dann ist $0 = f^k(m - f^k(n))$, d. h. $m - f^k(n) \in \ker(f^k)$ und

$$m = \underbrace{m - f^k(n)}_{\in \ker(f^k)} + \underbrace{f^k(n)}_{\in \mathrm{Bld}(f^k)} \in \ker(f^k) + \mathrm{Bld}(f^k) \qquad \blacksquare$$

Satz 8.9
Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ artinsch, noethersch und unzerlegbar. Dann ist jeder R-Endomorphismus f von M entweder bijektiv oder nilpotent und $\mathrm{End}_R(M)$ ist lokal, d. h. M ist streng unzerlegbar.

Beweis:
Nach dem Satz 8.8 ist $M = \ker(f^k) \oplus \mathrm{Bld}(f^k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\ker(f^k) = 0$ oder $\mathrm{Bld}(f^k) = 0$, da M unzerlegbar ist.

Für $\ker(f^k) = 0$ ist $M = \mathrm{Bld}(f^k)$, d. h. f^k ist bijektiv. Damit ist auch f bijektiv. Für $\mathrm{Bld}(f^k) = 0$ ist $f^k = 0$, d. h. f ist nilpotent.

Seien $f, g \in \mathrm{End}_R(M)$ nicht invertierbar. Wir nehmen an, dass $f + g$ invertierbar ist. Dann ist $\mathrm{id}_M = f' + g'$, wobei $f' := (f+g)^{-1} \circ f$ und $g' := (f+g)^{-1} \circ g$ nicht invertierbar, also nilpotent. Dann sind $f' = \mathrm{id}_M - g'$ und $g' = \mathrm{id}_M - f'$ invertierbar.$\lightning$ ∎

Satz 8.10
Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ artinsch oder noethersch. Dann existieren endlich viele unzerlegbare Untermoduln $M_1, \ldots, M_n \subseteq M$ mit $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$.

Beweis:
Sei M artinsch und $\mathfrak{M}$ die Menge aller Untermoduln von M, die sich nicht als direkte Summe endlich vieler unzerlegbarer Untermoduln schreiben lassen. Wir nehmen an, dass $\mathfrak{M} \neq \emptyset$. Dann enthält $\mathfrak{M}$ ein minimales Element $N \in \mathfrak{M}$. Also $N \neq 0$ und N ist zerlegbar, etwa $N = N_1 \oplus N_2$ mit $N_1, N_2 \subset N$. Für $i = 1, 2$ ist $N_i \notin \mathfrak{M}$, denn N war minimal. Also ist N_i die direkte Summe endlich vieler unzerlegbarer Untermoduln.$\lightning$

Sei nun M noethersch und $\mathfrak{M}$ die Menge aller Untermoduln N von M mit der Eigenschaft, dass sich M/N nicht als direkte Summe endlich vieler unzerlegbarer Untermoduln schreiben lässt. Wir nehmen an, dass $\mathfrak{M} \neq \emptyset$. Dann enthält $\mathfrak{M}$ ein maximales Element N. Also: $M/N \neq 0$ und M/N zerlegbar, etwa $M/N = M_1/N \oplus M_2/N$ mit Untermoduln $M_1, M_2 \subseteq M$, die N echt enthalten. Für $i = 1, 2$ ist $M_i \notin \mathfrak{M}$, d. h. M/M_i lässt sich als direkte Summe endlich vieler unzerlegbarer Untermoduln schreiben. Wegen $M/M_1 \simeq {}^{M/N}/_{M_1/N} \simeq M_2/N$ und $M/M_2 \simeq M_1/N$ sind auch M_1/N und M_2/N direkte Summen endlich vieler unzerlegbarer Untermoduln, also auch $M/N$$\lightning$ ∎

Bemerkung 8.4
Ist M artinsch und noethersch, so hat M nach Satz 8.6 und Satz 8.10 eine im wesentlichen eindeutige Zerlegung $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ in endlich viele unzerlegbare Untermoduln $M_1, \ldots, M_n$. Ist M nur artinsch, dann ist die Zerlegung nicht unbedingt eindeutig.

Beispiel 8.2
Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform: Dabei ist $M = V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K, $R = K[X]$ ist der Polynomring und $f \in \mathrm{End}_R(V)$. Dann ist V ein R-Modul durch $\varphi \circ v := (\varphi(f))(v)$ für $\varphi \in K[X]$ und $v \in V$.

9. Freie und projektive Moduln

Sei R ein Ring.

Definition 9.1 (Linear unabhängige Menge)
Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $X \subseteq M$ eine Teilmenge. Dann heißt X **linear unabhängig** (über R), falls gilt: Ist $(r_x)_{x \in X} \in \coprod_{x \in X} R$ und $\sum_{x \in X} r_x x = 0$, so ist $r_x = 0$ für alle $x \in X$. Sonst heißt die Teilmenge **linear abhängig**.

Bemerkung 9.1

- Ist X linear unabhängig, so auch jede Teilmenge von X. Die leere Menge ist stets linear unabhängig.
- Ist jede endliche Teilmenge von X linear unabhängig, so auch X selbst.
- Ist $R \neq 0$, so ist $\{0\}$ linear abhängig.
- Für jede endliche abelsche Gruppe $(A, +)$ und jedes Element $a \in A$ ist $|A|a = 0$ nach dem Satz von FERMAT. Daher ist $\emptyset$ die einzige linear unabhängige Teilmenge von A als $\mathbb{Z}$-Modul.

Definition 9.2 (Freier Modul)
Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$. Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von M heißt **Basis** von M (über R). Hat M eine Basis, so heißt M **frei**.

Beispiel 9.1

(a) Der Nullmodul ist frei mit Basis $\emptyset$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ bilden die $e_1 := (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n := (0, \ldots, 0, 1)$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$. Allgemeiner ist für jede Menge $I \neq \emptyset$ die Menge $\{ e_i \mid i \in I \}$ eine Basis von $\coprod_{i \in I} R$. Die wird als **Standardbasis** oder **kanonische Basis** bezeichnet. Dabei $e_i(j) := \delta_{ij}$ für $i, j \in I$.

(c) Eine endliche abelsche Gruppe $A \neq 0$ ist nicht frei als $\mathbb{Z}$-Modul.

(d) Ist R ein Schiefkörper, so ist R nach dem Satz von WEDDERBURN (Satz 6.7) halbeinfach. Daher ist jeder R-Modul eine direkte Summe einfacher R-Moduln und jeder einfache R-Modul ist zu R isomorph. Daher ist jeder R-Modul frei.

Bemerkung 9.2

(i) Ist $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ frei mit Basis B, so ist $\coprod_{b \in B} R \to M$ mit $(r_b)_{b \in B} \mapsto \sum_{b \in B} r_b b$ ein R-Isomorphismus.

(ii) Jede Basis eines endlich erzeugten freien R-Moduls ist wieder endlich.

(iii) Freie Moduln können Basen verschiedener Länge haben. Dies gilt nicht für kommutative Ringe und Schiefkörper (wegen des Satz' von KRULL-SCHMIDT)

(iv) Jeder endlich erzeugte R-Modul ist zu einem Faktormodul eines endlich erzeugten freien R-Moduls isomorph.

Definition 9.3 (Kurze exakte Folge)
Eine Folge $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ in ${}_R\mathbf{Mod}$ mit $\mathrm{Bld}(f) = \ker(g)$ heißt **exakt**. Eine (endliche oder unendliche) Folge $\ldots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to \ldots$ in ${}_R\mathbf{Mod}$ heißt **exakt**, wenn jede Teilfolge $M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1}$ exakt ist. Eine exakte Folge $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ in ${}_R\mathbf{Mod}$ heißt **kurze exakte Folge** oder **Sequenz**.

Bemerkung 9.3

(i) $0 \to L \xrightarrow{f} M$ ist genau dann exakt, wenn $\ker(f) = \{0\}$, also genau dann, wenn f injektiv ist.

(ii) $M \xrightarrow{g} N \to 0$ ist genau dann exakt, wenn $\mathrm{Bld}(g) = N$ ist, also genau dann, wenn g surjektiv ist.

(iii) $0 \to M \xrightarrow{g} N \to 0$ ist genau dann exakt, wenn g bijektiv ist.

(iv) $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ ist genau dann exakt, wenn f injektiv, g surjektiv und $\mathrm{Bld}(f) = \ker(g)$ ist. Gegebenenfalls gilt nach dem Homomorphiesatz (Satz 4.1): $L \simeq \mathrm{Bld}(f)$ und $N \simeq M/\ker(g) = M/\mathrm{Bld}(f)$.

Satz 9.1
Für eine kurze exakte Sequenz $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ in ${}_R\mathbf{Mod}$ sind äquivalent:

(1) $\exists g' \in \mathrm{Hom}_R(N, M)\colon g \circ g' = \mathrm{id}_N$.

(2) $\exists f' \in \mathrm{Hom}_R(M, L)\colon f' \circ f = \mathrm{id}_L$.

(3) $\exists$ Untermodul $U \subseteq M\colon M = \mathrm{Bld}(f) \oplus U$.

BEWEIS:

(1)⇒(3) Sei (1) erfüllt. Für $m \in M$ ist $g(m - g'(g(m))) = g(m) - g(g'(g(m))) = g(m) - g(m) = 0$, d. h. $m - g'(g(m)) \in \ker(g)$ und $m = (m - g'(g(m))) + g'(g(m)) \in \ker(g) + \mathrm{Bld}(g')$. Daher $M = \ker(g) + \mathrm{Bld}(g')$. Ist $x \in \ker(g) \cap \mathrm{Bld}(g')$ und $y \in N$ mit $x = g'(y)$, so ist $0 = g(x) = g(g'(x)) = y$, also auch $x = g'(y) = 0$. Somit ist $M = \ker(g) \oplus \mathrm{Bld}(g')$.

(3)⇒(1) Sei (3) erfüllt und $h := g|_U$. Wegen $M = \ker(g) \oplus U$ ist h bijektiv. Daher ist $g'\colon N \to M$ mit $n \mapsto h^{-1}(n)$ R-linear und $g(g'(n)) = h(h^{-1}(n)) = n$ für alle $n \in N$, d. h. $g \circ g' = \mathrm{id}_N$.

(2)⇔(3) erfolgt analog. ∎

Bemerkung 9.4
Gegebenenfalls sagt man, die kurze exakte Sequenz *zerfällt* (**split**). Nach dem Beweis gilt dann: $M = \mathrm{Bld}(f) \oplus \ker(f') = \ker(g) \oplus \mathrm{Bld}(g')$.

Beispiel 9.2
Für $M_1, M_2 \in {}_R\mathbf{Mod}$ zerfällt die kurze exakte Sequenz $0 \to M_1 \xrightarrow{q_1} M_1 \times M_2 \xrightarrow{p_2} M_2 \to 0$. Dabei sind q_1, q_2 und p_1, p_2 die entsprechenden Injektoren bzw. Projektoren.

Satz 9.2
Für $P \in {}_R\mathbf{Mod}$ sind äquivalent:

(1) P ist zu einem direkten Summanden eines freien R-Moduls isomorph.

(2) Zu jedem R-Epimorphismus $f\colon M \to N$ und jedem $g \in \mathrm{Hom}_R(P, N)$ existiert ein $h \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$ mit $g = f \circ h$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dotted, "h"'] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(3) Jede kurze exakte Sequenz der Form:

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0 \tag{9.1}$$

in ${}_R\mathbf{Mod}$ zerfällt.

Beweis:
(i)⇒(ii) Sei $F \in {}_R\mathbf{Mod}$ frei mit Basis B und $F = P \oplus Q$ mit Untermoduln P und Q. Weiterhin seien p_1 und p_2 bzw. q_1 und q_2 die entsprechenden Projektoren bzw. Injektoren. Schließlich sei noch f und g wie in (ii). Zu $b \in B$ existiert ein $m_b \in M$ mit $g(p_1(b)) = f(m_b)$, da f surjektiv ist. Dann: $k\colon F \to M$ mit $k\left(\sum_{b\in B} r_b b\right) := \sum_{b\in B} r_b \cdot m_b$ eine R-lineare Abbildung und $f \circ k = g \circ p_1$. Daher: $h\colon k \circ q_1 \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$ und $f \circ h = f \circ k \circ q_1 = g \circ p_1 \circ q_1 = g$.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "p_1"] \arrow[ddl, dotted, "k"'] & \\ & P \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dotted, "h"'] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(ii)⇒(iii) Sei (ii) erfüllt und $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0$ exakt in ${}_R\mathbf{Mod}$. Dann existiert $h \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$ mit $g \circ h = \mathrm{id}_P$. Also zerfällt die Folge.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_P"] & \\ M \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(iii)$\Rightarrow$(i) Sei (iii) erfüllt. Es existieren ein freier R-Modul F und ein R-Epimorphismus $g\colon F \to P$. Wegen (iii) zerfällt die kurze exakte Sequenz $0 \to \ker(g) \hookrightarrow F \xrightarrow{g} P \to 0$. Daher existiert $g' \in \mathrm{Hom}_R(P, F)$ mit $g \circ g' = \mathrm{id}_P$, insbesondere ist g' injektiv, d. h. $P \simeq \mathrm{Bld}(g')$. Nach dem Satz 9.1 ist ferner: $F = \ker(g) \oplus \mathrm{Bld}(g')$. ■

Definition 9.4 (Projektiver Modul)
Gegebenenfalls heißt das P aus Satz 9.2 **projektiv**.

Bemerkung 9.5

(i) Der obige Beweis und Bemerkung 9.2 (iv) zeigen, dass jeder endlich erzeugte projektive R-Modul zu einem direkten Summanden eines endlich erzeugten freien R-Moduls isomorph ist.

(ii) Jeder freie R-Modul ist projektiv, insbesondere ist ${}_RR$ projektiv.

(iii) Direkte Summanden von projektiven R-Moduln sind wieder projektiv.

(iv) Da Koprodukte von freien R-Moduln wieder frei sind, sind Koprodukte von projektiven Moduln wieder projektiv.

Beispiel 9.3
Für $n \in \mathbb{N}$ und jeden Körper K ist $R := K^{n\times n} = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$ mit $P_i =$Jedes P_i ist projektiv, da R frei ist. Aber für $n > 1$ nicht frei.

Pi ergänzen, war auf Kopie nicht lesbar

Bemerkung 9.6
Für $P \in {}_R\mathbf{Mod}$ hat man einen (kovarianten) Funktor $\mathrm{Hom}_R(P, ?)\colon {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ und einen (kontravarianten) Funktor $\mathrm{Hom}_R(?, P)\colon {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$.

Satz 9.3

(i) Für $P \in {}_R\mathbf{Mod}$ und jede kurze exakte Folge

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0 \tag{9.2}$$

ist die folgende Sequenz in $\mathbf{Ab} = {}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$ exakt:

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P, L) \xrightarrow[\mathrm{Hom}_R(P,f)]{} \mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow[\mathrm{Hom}_R(P,g)]{\mathrm{Hom}} {}_R(P, N) \tag{9.3}$$

(ii) Ein $P \in {}_R\mathbf{Mod}$ ist genau dann projektiv, wenn für jede kurze exakte Folge wie in Gleichung 9.2 die folgende Sequenz in $\mathbf{Ab}$ exakt ist:

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P, L) \xrightarrow[\mathrm{Hom}_R(P,f)]{} \mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow[\mathrm{Hom}_R(P,g)]{} \mathrm{Hom}_R(P, N) \to 0$$

BEWEIS:

(i) Sei $h \in \ker(\mathrm{Hom}_R(P,f))$, d. h. $0 = (\mathrm{Hom}_R(P,f))(h) = f \circ h$. Da f injektiv ist, folgt, $h = 0$. Also ist $\ker(\mathrm{Hom}_R(P,f)) = 0$, d. h. $\mathrm{Hom}_R(P,f)$ injektiv.

Für $h \in \mathrm{Hom}_R(P,L)$ ist $(\mathrm{Hom}_R(P,g) \circ \mathrm{Hom}_R(P,f))(h) = g \circ f \circ h = 0 \circ h = 0$. Daher ist $\mathrm{Bld}(\mathrm{Hom}_R(P,f)) \subseteq \ker(\mathrm{Hom}_R(P,g))$.

Sei umgekehrt $h \in \ker(\mathrm{Hom}_R(P,g))$, d. h. $0 = (\mathrm{Hom}_R(P,g)) \circ h = g \circ h$. Dann ist $\mathrm{Bld}(h) \subseteq \ker(g) = \mathrm{Bld}(f)$. Für $x \in P$ existiert also ein $x' \in L$ mit $h(x) = f(x')$. Da f injektiv ist, ist x' durch x eindeutig bestimmt. Wir erhalten so eine Abbildung $k\colon P \to L$ mit $x \mapsto x'$. Für $r \in R$ ist $h(rx) = rh(x) = rf(x') = f(rx')$, d. h. $(rx)' = rx'$. Analog ergibt sich $(x+y)' = x' + y'$ für $x, y \in P$. Folglich ist $k \in \mathrm{Hom}_R(P,L)$ und $(\mathrm{Hom}_R(P,f))(k) = f \circ k = h$. Dies zeigt, $\ker(\mathrm{Hom}_R(P,g)) \subseteq \mathrm{Bld}(\mathrm{Hom}_R(P,f))$.

(ii) „$\Rightarrow$" Sei P projektiv und Gleichung 9.2 exakt. Wegen (i) genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{Hom}_R(P,g)$ surjektiv ist. Sei also $h \in \mathrm{Hom}_R(P,N)$. Da P projektiv ist, existiert ein $k \in \mathrm{Hom}_R(P,M)$ mit $h = g \circ k = (\mathrm{Hom}_R(P,g))(k)$.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dotted, "k"'] \arrow[d, "h"] & \\
M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

„$\Leftarrow$" Sei $P \in {}_R\mathbf{Mod}$ mit der angegebenen Eigenschaft und sei $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0$ exakt in ${}_R\mathbf{Mod}$. Dann existiert zu $\mathrm{id}_P \in \mathrm{Hom}_R(P,P)$ ein $h \in \mathrm{Hom}_R(P,M)$ mit $\mathrm{id}_P = (\mathrm{Hom}_R(P,g))(h) = g \circ h$. Folglich zerfällt die Sequenz, also ist P projektiv. ∎

Definition 9.5 (Linksexakter, exakter Funktor)
Der Funktor $\mathrm{Hom}_R(P,?)$ heißt im Allgemeinen **linksexakt**. Ist P projektiv, so heißt $\mathrm{Hom}_R(P,?)$ **exakt**.

Satz 9.4
$P \in {}_R\mathbf{Mod}$ ist genau dann projektiv, wenn eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ von Elementen $x_i \in P$ und eine Familie $(f_i)_{i \in I}$ von Elementen $f_i \in \mathrm{Hom}_R(P,R)$ mit folgenden Eigenschaften: $x \in P \Rightarrow |\{\, i \in I \mid f_i(x) \neq 0 \,\}| < \infty$ und $x = \sum_{i \in I} f_i(x) x_i$ existiert.

BEWEIS:

„$\Rightarrow$" Sei P projektiv und $(x_i)_{i \in I}$ ein beliebiges Erzeugendensystem von P. Dann ist $F := \coprod_{i \in I} R \in {}_R\mathbf{Mod}$ frei und $g\colon F \to P$ mit $(r_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} r_i x_i$ ein R-Epimorphismus. Da P projektiv ist, existiert ein $h \in \mathrm{Hom}_R(P,F)$ mit $g \circ h = \mathrm{id}_P$. Für $i \in I$ ist dann $f_i := p_i \circ h \in \mathrm{Hom}_R(P,R)$. Dabei ist $p_i\colon F \to R$ der i-te Projektor. Für $x \in P$ ist $h(x) \in F = \coprod_{i \in I} R$, also $\left|\{\, j \in J \;\middle|\; f_j(x) = p_j(h(x)) \neq 0 \,\}\right| < \infty$. Ferner ist $\sum_{i \in I} f_i(x) x_i = \sum_{i \in I} p_i(h(x)) x_i = g((p_i(h(x)))_{i \in I}) = g(h(x)) = x$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_P"] & \\ F \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

„$\Leftarrow$" Seien $(x_i)_{i\in I}$ und $(f_i)_{i\in I}$ wie angegeben. Dann ist $(x_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von P. Ferner ist $F := \coprod_{i\in I} R \in {}_R\mathbf{Mod}$ frei und $g\colon F \to P$ mit $(r_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} r_i x_i$ ein R-Epimorphismus. Außerdem ist $h\colon P \to F$ mit $x \mapsto (f_i(x))_{i\in I}$ eine R-lineare Abbildung mit $g(h(x)) = \sum_{i\in I} f_i(x)x_i = x$ für $x \in P$. Daher ist $g \circ h = \mathrm{id}_P$, d. h. die kurze exakte Folge $0 \to \ker(g) \hookrightarrow F \xrightarrow{g} P \to 0$ zerfällt. Folglich ist P zu einem direkten Summanden von F isomorph, d. h. P ist projektiv. ∎

Bemerkung 9.7
Ist P projektiv, so kann man für $(x_i)_{i\in I}$ ein beliebiges Erzeugendensystem wählen.

Satz 9.5
Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$. Hat M eine Zerlegung $M = \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$ in abzählbar erzeugte Untermoduln M_α mit $\alpha \in A$, so hat auch jeder direkte Summand von M eine solche Zerlegung.

Beweis:
Sei $M = K \oplus L$ mit Untermoduln $K, L \subseteq M$ und seien $(K_\beta)_{\beta\in B}$, $(L_\gamma)_{\gamma\in C}$ die Familien der abzählbar erzeugten Untermoduln von K bzw. L. Sei $\mathfrak{P}$ die Menge aller Tripel (A', B', C') mit $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ und $C' \subseteq C$ sowie

$$\bigoplus_{\alpha\in A'} M_\alpha = \bigoplus_{\beta\in B'} K_\beta \oplus \bigoplus_{\gamma\in C'} L_\gamma \tag{9.4}$$

Dann ist die Menge $\mathfrak{P} \neq \emptyset$ und durch die Inklusion geordnet: $(A', B', C') \leq (A'', B'', C'')$ gilt genau dann, wenn $A' \subseteq A'', B' \subseteq B'', C' \subseteq C''$.

Nun zeigen wir, dass jede total geordnete Teilmenge $\emptyset \neq \mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}$ eine obere Schranke hat. Dazu sei:

$$\overline{A} := \bigcup_{(A',B',C')\in\mathfrak{Q}} A' \qquad \overline{B} := \bigcup_{(A',B',C')\in\mathfrak{Q}} B' \qquad \overline{C} := \bigcup_{(A',B',C')\in\mathfrak{Q}} C'$$

Dann ist $\overline{A} \subseteq A, \overline{B} \subseteq B$ und $\overline{C} \subseteq C$ und $\bigoplus_{\alpha\in\overline{A}} = M_\alpha = \bigoplus_{\beta\in\overline{B}} K_\beta \oplus \bigoplus_{\gamma\in\overline{C}} L_\gamma$, wie man leicht nachrechnet. Also ist das Tripel $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ eine obere Schranke von $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{P}$.

Nach dem Lemma von Zorn enthält $\mathfrak{P}$ ein maximales Element (A', B', C'). Wir zeigen, $A' = A$. Dies ist ausreichend, denn $M = \bigoplus_{\beta\in B'} K_\beta \oplus \bigoplus_{\gamma\in C'} L_\gamma$ und $M = K \oplus L$. Somit ist dann $K = \bigoplus_{\beta\in B'} K_\beta$.

Wir nehmen an, es existiert ein $\omega \in A \setminus A'$. Seien $e, f \in \mathrm{End}_R(M)$ die Idempotente zur Zerlegung $M = K \oplus L$. Jedes $m \in M$ ist in einer Summe endlich vieler M_α enthalten.

Daher ist jeder abzählbar erzeugte Untermodul von M in einer Summe abzählbar vieler M_α enthalten. Ist $D \subseteq A$ abzählbar, so ist $\bigoplus_{\delta \in D} M_\delta$ abzählbar erzeugt, also auch $e(\bigoplus_{\delta \in D} M_\delta)$ und $f(\bigoplus_{\delta \in D} M_\delta)$. Daher ist $e(\bigoplus_{\delta \in D} M_\delta) + f(\bigoplus_{\delta \in D} M_\delta)$ in einer Summe abzählbar vieler M_α enthalten. Wir erhalten so abzählbare Teilmengen $D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \subseteq \ldots$ von A mit folgenden Eigenschaften:

- $M_\omega \subseteq e(M_\omega) + f(M_\omega) \subseteq \bigoplus_{\delta \in D_1} M_\delta$
- $\bigoplus_{\delta \in D_1} M_\delta \subseteq e(\bigoplus_{\delta \in D_1} M_\delta) + f(\bigoplus_{\delta \in D_1} M_\delta) \subseteq \bigoplus_{\delta \in D_2} M_\delta$
- $\bigoplus_{\delta \in D_2} M_\delta \subseteq e(\bigoplus_{\delta \in D_2} M_\delta) + f(\bigoplus_{\delta \in D_2} M_\delta) \subseteq \bigoplus_{\delta \in D_3} M_\delta$
- und so weiter

Dann ist $\omega \in D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ abzählbar, also $D \nsubseteq A'$, $\bigoplus_{\delta \in D} M_\delta$ abzählbar erzeugt und $e(\bigoplus_{\delta \in D} M_\delta) \subseteq \bigoplus_{\delta \in D} M_\delta$ sowie $f(\bigoplus_{\delta \in D} M_d \subseteq \bigoplus_{\delta \in D} M_d)$. Weiter behaupten wir, dass $K = M' \oplus L'$ mit $M' = \bigoplus_{\alpha \in A'} M_\alpha$, $K = \bigoplus_{\beta \in B'} K_\beta$ und $L' = \bigoplus_{\gamma \in C'} L_\gamma$. Setze $M'' := \bigoplus_{\delta \in A' \cup D} M_\delta$, $K'' := e(M'')$ und $L'' := f(M'')$. Dann $K'' = e(M' + L' + \bigoplus_{\delta \in D} M_\delta) \subseteq K' + 0 + \bigoplus_{\delta \in D} M_\delta \subseteq M''$ un $L'' = f(K' + L' + \bigoplus_{\delta \in D} M_\delta) \subseteq L' + \bigoplus_{\delta \in D} M_\delta \subseteq M''$. Wegen $M'' \subseteq K'' + L'' \subseteq M''$ folgt, $M'' = K'' + L''$ und damit $M'' = K'' \oplus L''$. Ferner sind K' und L' direkte Summanden von M' und damit direkter Summand von M mit $K' \subseteq K''$ und $L' \subseteq L''$. Nach der Dedekindschen Identität ist also $K'' = K' \oplus K_1'$ und $L'' = L' \oplus L_1'$. Daher haben wir: $M'' = K'' \oplus L'' = K' \oplus K_1' \oplus L' \oplus L_1' = M' \oplus K_1' \oplus L_1'$ und $K_1' \oplus L_1' \simeq {}^{M''}/_{M'} \simeq \bigoplus_{\delta \in D \setminus A'} M_\delta \neq 0$ abzählbar erzeugt. Daher sind K_1' und L_1' abzählbar erzeugt. Dies ist aber ein Widerspruch zur Maximalität von (A', B', C'). ∎

Bemerkung 9.8
Da jeder freie R-Modul eine direkte Summe abzählbar erzeugter (sogar zyklischer) Untermoduln ist, ist jeder projektive R-Modul eine direkte Summe abzählbar erzeugten (projektiven) Untermoduln.

Satz 9.6
Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ mit Untermoduln N, H, H', K, L, wobei N streng unzerlegbar und $M = N \oplus H \oplus H' = H \oplus K \oplus L$. Dann existieren direkte Summanden K' von K und L' von L mit $M = N \oplus H \oplus K' \oplus L'$.

Beweis:
Seien $e, e', \mathrm{id}_M - e - e' \in \mathrm{End}_R(M) =: E$ die Idempotente zur Zerlegung $M = K \oplus L \oplus H$ und seien $f, \mathrm{id}_M - f$ die Idempotente zur Zerlegung $M = N \oplus (H \oplus H')$. Nach Voraussetzung ist $fEf \cong \mathrm{End}_R(N)$ lokal. Wegen $f = fef + fe'f + \underbrace{f(\mathrm{id}_M - e - e')f}_{=0} = fef + fe'f$ ist $fef \in (fEf)^x$ oder $fe'f \in (fEf)^x$. Œ $fef \in (fEf)^x$. Sei $s \in fEf$ mit $s \cdot fef = f = fef \cdot s$. Dann: $(ese)^2 = eseese = esese = esfefse = efse = ese$, d. h. $M = \mathrm{Bld}(ese) \oplus \ker(ese)$. Wegen $L \oplus H = \ker(e) \subseteq \ker(ese)$ gilt nach Dedekind: $\ker(ese) = \ker(ese) \cap (K \oplus L \oplus H) = (\underbrace{\ker(ese) \cap K}_{=:\,K'}) \oplus L \oplus H$, d. h. $M = \mathrm{Bld}(ese) \oplus K' \oplus L \oplus H$ und $\mathrm{Bld}(ese) = (esefse)(M) \subseteq (ese)(f(M)) = (ese)(N) \subseteq \mathrm{Bld}(ese)$, d. h. $\mathrm{Bld}(ese) = (ese)(N)$.

Ist $x \in N$ mit $0 = (ese)(x) = (esfef)(x) = (ef)(x)$, so ist $0 = (sfef)(x) = f(x) = x$. Daher ist $(ese)|_N \colon N \to \operatorname{Bld}(ese)$ ein R-Isomorphismus. Es genügt zu zeigen, dass $M = N \oplus K' \oplus L \oplus H$. Denn K' ist direkter Summand von K, da K' direkter Summand von M ist.

Sei $n \in N \cap (K' \oplus L \oplus H)$. Dann ist $n \in \ker(ese)$, $0 = (ese)(n)$. D $ese|_N$ bijektiv ist, folgt, $n = 0$.

Sei andererseits $m \in M$. Wegen $(ese)(M) = (ese)(M)$ existiert ein $n \in N$ mit $(ese)(m) = (ese)(n)$. Dann ist $m - n \in \ker(ese) = K' \oplus L \oplus H$ und $m = n + (m + n) \in N + K' + L + H$. ∎

Satz 9.7
Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $M = K \oplus L$ mit Untermoduln K und L. Sei ferner N ein direkter Summand von M und $N = N_1 \oplus \ldots \oplus N_r$ mit steng unzerlegbaren Untermoduln $N_1, \ldots, N_r$. Dann existieren direkte Summanden K' von K und L' von L mit $M = N \oplus K' \oplus L'$.

Beweis:
Der Beweis erfolgt induktiv nach r. Sei Œ $r > 0$. Denn für $r = 0$ ist N der Nullmodul und es ist nichts weiter zu tun. Für $r - 1$ ist nach Induktion folgendes bekannt: Es existieren direkte Summanden $\overline{K}$ von K und $\overline{L}$ von L mit $M = \underbrace{N_1 \oplus \ldots \oplus N_{r-1}}_{:=H} \oplus \overline{K} \oplus \overline{L}$. Außerdem $M = \underbrace{H \oplus N_r}_{=N} \oplus H'$ mit einem Untermodul H'. Nun wenden wir den Satz 9.6 an. Somit existieren direkte Summanden K' von $\overline{K}$ und L' von $\overline{L}$ mit $M = N_r \oplus H \oplus K' \oplus L'$. Damit ist die Behauptung bewiesen. ∎

Satz 9.8
Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ mit streng unzerlegbaren Untermoduln $M_1, \ldots, M_n$. Sei ferner $M = K \oplus L$ mit Untermoduln K und L. Dann ist $K \simeq \bigoplus_{i \in I} M_i$ für eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Beweis:
Seien $f_1, f_2 \in \operatorname{End}_R(M)$ die Idempotente zur Zerlegung $M = K \oplus L$. Dann: $\mathrm{id}_M = f_1 + f_2$. Nach dem Satz 8.4 existieren $k_1, \ldots, k_n \in \{1, 2\}$ derart, dass $M = f_{k_1}(M_1) \oplus \ldots \oplus f_{k_m}(M_n)$ und $f_{k_i}|_{M_i}$ injektiv für $i = 1, \ldots, n$ ist. Sei Œ $k_1 = \cdots = k_m = 1$ und $k_{m+1} = \cdots = k_n = 2$. Dann ist $K = f_1(M_1) \oplus \ldots f_1(M_m) \simeq \bigoplus_{i=1}^m M_i$ wegen Injektivität und analog $L = f_2(M_{m+1}) \oplus \ldots \oplus f_2(M_n) \simeq \bigoplus_{i=m+1}^m M_i$. ∎

Satz 9.9
Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$. Ist M eine direkte Summe abzählbar erzeugter streng unzerlegbarer Untermoduln, so gilt das Gleiche für jeden direkten Summanden von M.

Beweis:
Sei $M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ mit abzählbar erzeugten streng unzerlegbaren Untermoduln M_α. Außerdem sei $M = K \oplus L$ mit Untermoduln K und L. Es ist zu zeigen, dass K eine direkte Summe abzählbar erzeugter streng unzerlegbarer Untermoduln ist. Nach dem

Satz 9.5 ist K eine direkte Summe abzählbar erzeugter Untermoduln. Daher kann man annehmen, dass K abzählbar erzeugt ist. Sei $x_1, x_2, \ldots$ ein Erzeugendensystem von K.

Sei x ein beliebiges Element aus K. Dann existiert eine endliche Teilmenge $G \subseteq A$ mit $x \in \bigoplus_{\alpha \in G} M_a =: N$. Nach dem Satz 9.7 existieren direkte Summanden K' von K und L' von L mit $M = N \oplus K' \oplus L'$. Dann ist $x \in K \cap N \subseteq K \cap (N \oplus L') =: H$ und $K = K \cap M = K \cap (N \oplus L' \oplus K') = (K \cap (N \oplus L')) \oplus K' = H \oplus K'$.

Sei $I \subseteq L$ ein Untermodul mit $L = I \oplus L'$. Dann: $N \simeq {}^{M}/_{K' \oplus L'} = {}^{K \oplus L}/_{K' \oplus L'} \simeq {}^{K}/_{K'} \times {}^{L}/_{L'} \simeq H \times I$. Nach dem Satz 9.8 existiert eine Teilmenge $F \subseteq G$ mit $H \simeq \bigoplus_{\alpha \in F} M_\alpha$.

Jetzt sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir setzen voraus, dass wir eine Zerlegung $K = H_1 \oplus \ldots \oplus H_n \oplus K_n$ in Untermoduln und endliche Teilmengen $F_1, \ldots, F_n \subseteq A$ mit den Eigenschaften $x_1, \ldots, x_n \in H_1 \oplus \ldots H_n$ und $H_i \simeq \bigoplus_{\alpha \in F_i} M_\alpha$ für $i = 1, \ldots, n$ haben.

Für $n = 1$ geht das, indem man $x := x_1$ setzt. Schreibe $x_{n+1} = h_n + k_n$ mit $h_n \in H_1 \oplus \ldots \oplus H_n$ und $k_n \in K_n$. Das obige Argument mit K_n statt K und k_n statt x liefert Untermoduln H_{n+1} und K_{n+1} mit $K_n = H_{n+1} \oplus K_{n+1}$, $k_n \in H_{n+1}$ und eine endliche Teilmenge $F_{n+1} \subseteq A$ mit $H_{n+1} \simeq \bigoplus_{\alpha \in F_{n+1}} M_\alpha$.

Also $K = H_1 \oplus \ldots \oplus H_n \oplus H_{n+1} \oplus K_{n+1}$, $x_1, \ldots, x_{n+1} \in H_1 \oplus \ldots \oplus H_{n+1}$ und $H_i \simeq \bigoplus_{\alpha \in F_i} M_\alpha$ für $i = 1, \ldots, n+1$. So erhält man Untermoduln $H_1, H_2, \ldots \subseteq K$ und endliche Teilmengen $F_1, F_2, \ldots \subseteq A$ mit $K = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$. Weiter ist $H_n \simeq \bigoplus_{\alpha \in F_n} M_\alpha$ für $n \in \mathbb{N}$. ∎

Bemerkung 9.9
Es scheint unbekannt zu sein, ob der Satz auch ohne die Abzählbarkeitsvoraussetzung funktioniert.

Satz 9.10
Ist R ein lokaler Ring und $P \in {}_R\mathbf{Mod}$ projektiv, so ist P frei.

Beweis:
Sei $F \in {}_R\mathbf{Mod}$ frei, also $F = \bigoplus_{\alpha \in A} F_\alpha$ mit Untermoduln $F_\alpha \simeq {}_R R$ für $\alpha \in A$. Jeder F_α ist abzählbar erzeugt (sogar zyklisch) und streng unzerlegbar, denn $\mathrm{End}_R({}_R R) \cong R^o$ ist lokal. Ist $F = P \oplus Q$ mit Untermoduln P und Q, so sind P und Q direkte Summen von (abzählbar erzeugten) streng unzerlegbaren Untermoduln P_β bzw. Q_γ mit $\beta \in B$ und $\gamma \in C$. Nach dem Satz von Krull-Schmidt (Satz 8.6) ist $P_\beta \simeq {}_R R$ für $\beta \in B$ und $\gamma \in C$. ∎

Bemerkung 9.10

(i) Ist P endlich erzeugt, so vereinfacht sich der Beweis wesentlich (siehe Skript).

(ii) Sei K ein Körper und $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring in endlich vielen Variablen $X_1, \ldots, X_n$. Dann ist jeder projektive R-Modul frei. Das war eine Vermutung von Serre, die 1978 unabhängig von Quillen und Suslin bewiesen wurde. Details finden sich in [13].

10. Injektive Moduln

Sei R ein Ring.

Satz 10.1
Für $Q \in {}_R\mathbf{Mod}$ sind äquivalent:

(i) Zu jedem R-Monomorphismus $f\colon M \to N$ und jedem $g \in \mathrm{Hom}_R(M,Q)$ existiert ein $h \in \mathrm{Hom}_R(N,Q)$ mit $g = h \circ f$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dotted, "h"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

(ii) Zu jedem Linksideal $L \subseteq R$ und $g \in \mathrm{Hom}_R(L,Q)$ existiert ein $h \in \mathrm{Hom}_R(R,Q)$ mit $h|_L = g$.

(iii) Zu jedem Linksideal $L \subseteq R$ und jedem $g \in \mathrm{Hom}_R(L,Q)$ existiert ein $x \in Q$ mit $g(a) = ax$ für $a \in L$.

Beweis:
(i)$\Rightarrow$(ii) Der Punkt (ii) ist nur ein Spezialfall von (i).

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"'] & R \arrow[dl, dotted, "h"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

(ii)$\Rightarrow$(iii) Sei (ii) erfüllt, $L \subseteq R$ ein Linksideal und $g \in \mathrm{Hom}_R(L,Q)$. Dann existiert ein $h \in \mathrm{Hom}_R(R,Q)$ mit $h|_L = g$. Sei $x := h(1) \in Q$. Dann: $g(a) = h(a) = h(a \cdot 1) = ah(1) = ax$ für $a \in L$.

(iii)$\Rightarrow$(i) Sei (iii) erfüllt, $f\colon M \to N$ ein R-Monomorphismus und $g \in \mathrm{Hom}_R(M,Q)$. Sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller Paare (L,l), wobei $L \subseteq N$ ein Untermodul mit $f(M) \subseteq L$ und $l \in \mathrm{Hom}_R(L,Q)$ mit $l \circ f = g$ ist. Wegen $(f(M), g \circ f^{-1}|_{f(M)}) \in \mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{M} \neq \emptyset$. Ferner ist $\mathfrak{M}$ geordnet durch: $(L,l) \leq (L',l') :\Leftrightarrow L \subseteq L'$ und $l'|_L = l$. Man zeigt leicht, dass jede total geordnete Teilmenge von $\mathfrak{M}$ eine obere Schranke in

$\mathfrak{M}$ hat. Nach dem Lemma von ZORN existiert ein maximales Element (Z,z) in $\mathfrak{M}$. Im Fall $Z = N$ sind wir fertig. Sei also $Z \neq N$ und $y \in N \setminus Z$. Dann ist $I = \{\, a \in R \mid ay \in Z \,\} \leq R$ ein Linksideal und $\gamma\colon I \to Q$ mit $a \mapsto z(ay)$ eine R-lineare Abbildung. Wegen (iii) existiert ein $x \in Q$ mit $\gamma(a) = ax$ für $a \in I$. Sei $Z' := Z + Ry$ mit $z'\colon Z' \to Q$. Das ist wohldefiniert, denn sind a und a' aus Z sowie r und r' aus R mit $a + ry = a' + r'y$, so ist $(r - r')y = a' - a \in Z$. Also ist $r - r' \in I$ und $z(a - a') = z((r - r')y) = \gamma(r - r') = (r - r')x$, d. h. $z(a) + rx = z(a') + r'x$. Man zeigt leicht, dass z' eine R-lineare Abbildung und $z'|_Z = z$ ist. Daher ist $(Z,z) < (Z',z') \in \mathfrak{M}\lightning$ ■

Definition 10.1 (Injektiver Modul)
Gegebenenfalls heißt Q **injektiv**.

Satz 10.2
Für jede Familie $(Q_i)_{i\in I}$ von R-Moduln gilt:

$$\prod_{i\in I} Q_i \text{ ist injektiv } \Leftrightarrow Q_i \text{ ist injektiv für } i \in I$$

BEWEIS:
Sei $Q := \prod_{i\in I} Q_i$ mit Projektoren p_j und Injektoren q_j und $f\colon M \to N$ ein R-Monomorphismus.

„$\Rightarrow$“ Sei Q eine injektive Abbildung, $j \in I$ und $g \in \mathrm{Hom}_R(M, Q_j)$. Dann existiert zu $q_j \circ g \in \mathrm{Hom}_R(M,Q)$ ein $k \in \mathrm{Hom}_R(N,Q)$ mit $q_j \circ g = k \circ f$. Daher $h := p_j \circ k \in \mathrm{Hom}_R(N,Q_j)$ und $h \circ f = p_j \circ k \circ f = p_j \circ q_j \circ g = g$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dotted, "h"] \arrow[ddl, dotted, "k"] \\
 & Q_j \arrow[d, "q_j"'] & \\
 & Q &
\end{tikzcd}$$

„$\Leftarrow$“ Sei $g \in \mathrm{Hom}_R(M,Q)$ und für $i \in I$ sei Q_i eine injektive Abbildung. Dann existiert zu $p_i \circ g \in \mathrm{Hom}_R(M,Q_i)$ ein $h_i \in \mathrm{Hom}_R(N,Q_i)$ mit $h_i \circ f = p_i \circ g$. Daher: $h\colon N \to Q$ mit $x \mapsto (h_i(x))_{i\in I}$ eine R-lineare Abbildung und $h(f(x)) = (h_i(f(x)))_{i\in I} = (p_i(g(x)))_{i\in I} = g(x)$ für $x \in M$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dotted, "h"] \arrow[ddl, dotted, "h_i"] \\
& Q \arrow[d, "p_i"'] & \\
& Q_i &
\end{tikzcd}$$

■

Satz 10.3
Ein $\mathbb{Z}$-Modul A ist genau dann injektiv, wenn für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in A$ ein $b \in A$ mit $a = nb$ existiert.

BEWEIS:

„⇒“ Sei A injektiv, $a \in A$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $g\colon \mathbb{Z}n \to A$ mit $zn \mapsto za$ eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung. Nach dem Satz 10.1 existiert ein $b \in A$ mit $g(x) = xb$ für $x \in \mathbb{Z}n$. Insbesondere $a = g(n) = nb$.

„⇐“ Sei A dividierbar, $I \trianglelefteq \mathbb{Z}$ und $g \in \mathrm{Hom}_R(I, A)$. Sei Œ $I \neq 0$, d. h. $I = \mathbb{Z}n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zu $a := g(n) \in A$ existiert dann ein $b \in A$ mit $a = nb$. Folglich: $g(zn) = zg(n) = za = znb$ für $z \in \mathbb{Z}$. ■

Bemerkung 10.1
Injektive $\mathbb{Z}$-Moduln nennt man daher auch **dividierbare abelsche Gruppen**.

Beispiel 10.1

(i) $\mathbb{Q}$ ist ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul, $\mathbb{Z}$ selbst nicht.

(ii) Jeder Faktormodul eines injektiven $\mathbb{Z}$-Moduls ist wieder injektiv.

(iii) Koprodukte eines injektiven $\mathbb{Z}$-Moduls sind wieder injektiv.

Satz 10.4
Jeder $\mathbb{Z}$-Modul M ist zu einem Untermodul eines injektiven $\mathbb{Z}$-Moduls isomorph.

BEWEIS:
Nach der Bemerkung 9.2 ist M zu einem Faktormodul eines freien $\mathbb{Z}$-Moduls isomorph. Daher existiert eine Menge I und ein Untermodul $U \subseteq F := \coprod_{i\in I} \mathbb{Z}$ mit $M \simeq {}^{F}/_{U} = \coprod_{i\in I} \mathbb{Z}/U \subseteq \coprod_{i\in I} \mathbb{Q}/U$ injektiv. ■

Bemerkung 10.2
Für $A \in {}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$ ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, A) \in {}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$, wobei $(rf)(x) := f(xr)$ für $r, x \in R$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, A)$.

Satz 10.5
Sei $A \in {}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$ injektiv. Dann ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, A) \in {}_{R}\mathbf{Mod}$ injektiv.

Beweis:
Sei $f\colon M \to N$ ein R-Monomorphismus und $g\colon M \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, A)$ eine R-lineare Abbildung. Dann ist $\gamma\colon M \to A$ mit $m \mapsto (g(m))(1)$ eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung. Da A injektiv ist, existiert ein $\delta \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, A)$ mit $\delta \circ f = g$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma"'] & N \arrow[dl, dotted, "\delta"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Für $x \in N$ ist $h_x\colon R \to A$ mit $r \mapsto \delta(rx)$ $\mathbb{Z}$-linear, d. h. $h_x \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, A)$. Für $a, r \in R$ ist dabei $(ah_x)(r) = h_x(ra) = \delta(rax) = h_{ax}(r)$, d. h. $ah_x = h_{ax}$. Daraus folgt leicht, dass $h\colon N \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, A)$ mit $x \mapsto h_x$ eine R-lineare Abbildung ist. Für $m \in M$ und $r \in R$ ist:

$$\begin{aligned} h_{f(m)}(r) &= \delta(rf(m)) = \delta(f(rm)) = \gamma(rm) = (g(rm))(1) \\ &= (rg(m))(1) = (g(m))(1r) =)g(m))(1), \end{aligned}$$

d. h. $g(m) = h_{f(m)} = h(f(m))$, also $g = h \circ f$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dotted, "h"] \\ & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, A) & \end{tikzcd}$$

■

Bemerkung 10.3
Für $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ ist $\operatorname{Hom}_R(R, M) \subseteq \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ ein R-Untermodul, denn für $r \in R$ und $f \in \operatorname{Hom}_R(R, M)$ ist auch $rf \in \operatorname{Hom}_R(R, M)$ wegen $(rf)(ab) = f(abr) = af(br) = a(rf)(b)$ für $a, b \in R$. Ferner ist $\operatorname{Hom}_R(R, M) \to M$ mit $f \mapsto f(1)$ ein R-Isomorphismus.

Satz 10.6
Jeder R-Modul M ist zu einem Untermodul eines injektiven R-Moduls isomorph.

Beweis:
Nach dem Satz 10.4 ist der $\mathbb{Z}$-Modul U Untermodul eines injektiven $\mathbb{Z}$-Moduls Q. Man kann $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ als R-Untermodul des injektiven R-Moduls $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ auffassen. Dann: $M \simeq \operatorname{Hom}_R(R, M) \subseteq \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \subseteq \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$. ■

Satz 10.7
$Q \in {}_R\mathbf{Mod}$ ist genau dann injektiv, wenn jede kurze exakte Folge der Form $0 \to Q \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ in ${}_R\mathbf{Mod}$ zerfällt.

BEWEIS:
„$\Rightarrow$" wie in Satz 9.3

„$\Leftarrow$" Nach dem Satz 10.6 existiert ein injektiver R-Modul $D \supseteq Q$. Nach der Voraussetzung zerfällt die kurze exakte Sequenz $0 \to Q \hookrightarrow D \to D/Q \to 0$. Daher ist $Q \simeq Q \times D/Q$. Nach dem Satz 10.2 ist mit D auch Q injektiv. ∎

Satz 10.8

(i) Für $Q \in {}_R\mathbf{Mod}$ und jede kurze exakte Folge in ${}_R\mathbf{Mod}$ $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ ist die folgende Sequenz in ${}_\mathbb{Z}\mathbf{Mod}$ exakt:

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N,Q) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(g,Q)} \mathrm{Hom}_R(M,Q) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(f,Q)} \mathrm{Hom}_R(L,Q)$$

(ii) $Q \in {}_R\mathbf{Mod}$ ist genau dann injektiv, wenn für jede kurze exakte Folge in ${}_R\mathbf{Mod}$ die folgende Sequenz in ${}_\mathbb{Z}\mathbf{Mod}$ exakt ist:

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N,Q) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(g,Q)} \mathrm{Hom}_R(M,Q) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(f,Q)} \mathrm{Hom}_R(L,Q) \to 0$$

Definition 10.2 (Wesentlicher Modul)
Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $L \subseteq M$ ein Untermodul. Dann heißt L **wesentlich** in M, wenn $L \cap U \neq 0$ für jeden Untermodul $0 \neq U \subseteq M$ gilt. Gegebenenfalls nennt man M eine **wesentliche Erweiterung** von L. Existiert außerdem keine wesentliche Erweiterung N von L mit $M \subset N$, so heißt M **maximal wesentliche Erweiterung** von L.

Satz 10.9
$Q \in {}_R\mathbf{Mod}$ ist genau dann injektiv, wenn Q keine echte wesentliche Erweiterung hat.

BEWEIS:
Sei Q injektiv und M eine wesentliche Erweiterung von Q. Da die kurze exakte Folge $0 \to Q \hookrightarrow M \to M/Q \to 0$ zerfällt, existiert ein Untermodul $N \subseteq M$ mit $M = Q \oplus N$. Da $Q \subseteq N$ wesentlich ist, folgt, $N = 0$, d. h. $Q = M$. Umgekehrt habe Q keine echten wesentlichen Erweiterungen. Nach dem Satz 10.6 existiert ein injektiver R-Modul $D \subseteq Q$. Nach dem Lemma von ZORN existiert ein Untermodul $U \subseteq D$, der maximal bezüglich $U \cap Q = 0$ ist. Ist $0 \neq V/U \subseteq D/U$ ein Untermodul, so ist $V \supsetneq U$, also $V \cap Q \neq 0$. Daher ist $V \cap Q \nsubseteq U$ und damit $V(Q+U) = (V \cap Q) + U \supset U$, d. h. $V/U \cap Q+U/U \neq 0$. Dies zeigt, dass $Q+U/U \subseteq D/U$ wesentlich ist. Da $Q+U/U \simeq Q/Q\cap U = Q/0 \simeq Q$ keine wesentliche Erweiterung besitzt, folgt, $Q+U/U = D/U$, d. h. $D = Q + U = Q \oplus U \simeq Q \times U$. Nach dem Satz 10.2 ist Q auch injektiv. ∎

Satz 10.10
Sei $Q \in {}_R\mathbf{Mod}$ injektiv und $M \subseteq Q$ ein Untermodul. Dann existiert ein Untermodul $M \subseteq N \subseteq Q$, sodass $M \subseteq N$ eine maximale wesentliche Erweiterung von M ist.

BEWEIS:
Sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller Untermoduln $L \subseteq Q$, die wesentliche Erweiterung von M sind. Wegen $M \in \mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{M} \neq \emptyset$. Ferner ist $\mathfrak{M}$ durch $\subseteq$ geordnet. Nun zeigt man leicht, dass

jede total geordnete Teilmenge von $\mathfrak{M}$ eine obere Schranke in $\mathfrak{M}$ hat. Nach dem Lemma von ZORN enthält $\mathfrak{M}$ ein maximales Element N.

Wir nehmen an, dass N keine maximale wesentliche Erweiterung von M ist. Dann existiert ein R-Modul $W \supsetneq N$, der eine wesentliche Erweiterung von M ist. Da Q injektiv ist, existiert ein $f \in \mathrm{Hom}_R(W, Q)$ mit $f(n) = n$ für $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & W \arrow[dl, dotted, "f"] \\
 & Q &
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $\ker(f) \cap N = 0$, also auch $M \cap \ker(f) = 0$. Da M wesentlich in W ist, folgt, $\ker(f) = 0$, d. h. f ist injektiv. Folglich ist $f(W) \supseteq f(M) = M$ eine wesentliche Erweiterung mit $N = f(N) \subset f(W) \subseteq Q$. Das steht im Widerspruch zur Maximalität von N. ■

11. Injektive Hüllen und projektive Decken

Sei R ein Ring.

Definition 11.1 (Injektive Hülle)
Sei $Q \in {}_R\mathbf{Mod}$ injektiv und $M \subseteq Q$ ein Untermodul. Dann heißt Q **injektive Hülle** von M, wenn kein injektiver Untermodul $N \subset Q$ mit $M \subseteq N$ existiert.

Satz 11.1
Für $Q \in {}_R\mathbf{Mod}$ und jeden Untermodul $M \subseteq Q$ sind äquivalent:

(i) Q ist eine maximale wesentliche Erweiterung von M.

(ii) Q ist injektiv und eine wesentliche Erweiterung von M.

(iii) Q ist injektive Hülle von M.

BEWEIS:
(i)⇒(ii) Sei (i) erfüllt. Ist W eine wesentliche Erweiterung von Q, so auch von M. Denn für jeden Untermodul $0 \neq U \subseteq W$ ist $U \cap Q \neq 0$, also auch $0 \neq M \cap U \cap Q = U \cap M$. Wegen (i) folgt $Q = W$. Nach dem Satz 10.9 ist Q injektiv.

(ii)⇒(iii) Sei (ii) erfüllt und $N \subseteq Q$ ein injektiver Untermodul mit $M \subseteq N$. Da die kurze exakte Folge $0 \to N \hookrightarrow Q \to Q/N \to 0$ zerfällt, existiert ein Untermodul $N' \subseteq Q$ mit $Q = N \oplus N'$. Wegen $M \cap N' = 0$ folgt aus (ii), $N' = 0$, d. h. $Q = N$.

(iii)⇒(i) Sei (iii) erfüllt. Nach dem Satz 10.10 existiert eine maximale wesentliche Erweiterung $M \subseteq N$ mit $N = Q$. Wir haben bereits gezeigt, dass aus (i) der Punkt (ii) folgt, also ist N injektiv. ∎

Bemerkung 11.1
Nach dem Satz 10.6 existiert zu jedem $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ ein injektiver R-Modul mit $Q \supseteq M$. Nach dem Satz 10.10 existiert eine maximale wesentliche Erweiterung $M \subseteq N$ mit $N \subseteq Q$. Nach dem Satz 11.1 ist N eine injektive Hülle von M. Daher hat jeder R-Modul M eine injektive Hülle. Wir werden zeigen, dass diese bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Man spricht oft von *der* injektiven Hülle.

Satz 11.2
Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ mit injektiver Hülle Q.

(i) Ist $f\colon M \to M'$ ein R-Monomorphismus und $M' \subseteq Q'$ eine injektive Hülle, so existiert ein R-Monomorphismus $f'\colon Q \to Q'$ mit $f'(m) = f(m)$ für $m \in M$. Ist f sogar ein Isomorphismus, so auch f'.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & M' \arrow[d, hook] \\ Q \arrow[r, dotted, "f'"] & Q' \end{tikzcd}$$

(ii) Ist $Q' \in {}_R\mathbf{Mod}$ injektiv und $M \subseteq Q'$ ein Untermodul, so existiert ein R-Monomorphismus $g\colon Q \to Q'$ mit $g(m) = m$ für $m \in M$.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, hook] \arrow[dr, hook] & \\ Q \arrow[rr, dotted, "g"] & & Q' \end{tikzcd}$$

Beweis:

(i) Sei f ein R-Monomorphismus. Da Q' injektiv ist, existiert ein $f' \in \operatorname{Hom}_R(Q, Q')$ mit $f'(m) = f(m)$ für $m \in M$. Dann ist $\ker(f') \cap M = \ker(f) = 0$. Da $M \subseteq Q$ wesentlich ist, folgt, $\ker(f') = 0$, d. h. f' ist injektiv.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & Q \arrow[ddl, dotted, "f'"] \\ & M' \arrow[d, hook] & \\ & Q & \end{tikzcd}$$

Sei jetzt f bijektiv. Dann ist $Q \simeq f'(Q) \subseteq Q'$ ein injektiver Untermodul und $f'(Q) \supseteq f'(M) = f(M) = M'$. Da $Q' \subseteq M'$ eine injektive Hülle ist, folgt, $f'(Q) = Q'$, d. h. f' ist bijektiv.

(ii) Offenbar ist $Q' \subseteq Q'$ eine injektive Hülle. Nach (i) existiert zu der Inklusionsabbildung $f'\colon M \to Q'$ ein R-Monomorphismus $f'\colon Q \to Q'$ mit $f'(m) = f(m)$ für $m \in M$. ∎

Bemerkung 11.2

Zu je zwei injektiven Hüllen Q und Q' von M existiert also ein R-Isomorphismus $g\colon Q \to Q'$ mit $g(m) = m$ für $m \in M$.

Beispiel 11.1

Es ist $\mathbb{Q}$ die injektive Hülle von $\mathbb{Z}$ in ${}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$. Denn nach dem Satz 10.3 ist $\mathbb{Q} \in {}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$ injektiv. Sei $I \subseteq \mathbb{Q}$ ein injektiver Untermodul mit $\mathbb{Z} \subseteq I$. Nach dem Satz 10.3 ist I dividierbar. Für $a \in \mathbb{Z} \subseteq I$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert also ein $b \in I$ mit $a = nb$, d. h. $a/n \in I$. Also $I = \mathbb{Q}$.

Satz 11.3
Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln M_i. Für $i \in I$ sei $M_i \subseteq W_i$ eine wesentliche Erweiterung. Dann ist $\coprod_{i\in I} M_i \subseteq \coprod_{i\in I} W_i$ eine wesentliche Erweiterung.

Beweis:
Zunächst sei $I = \{1,2\}$ und $0 \neq U \subseteq W_1 \times W_2$ ein Untermodul. Sei $0 \neq (u_1,u_2) \in U_i$ und Œ $u_1 \neq 0$. Nach Voraussetzung ist $M_1 \cap Ru_1 \neq 0$. Sei $r_i \in R$ mit $0 \neq r_1u_1 \in M_1$. Im Fall $r_1u_2 = 0$ ist $0 \neq r_1(u_1,u_2) \in U \cap (M_1 \times M_2)$. Im Fall $r_1u_2 \neq 0$ ist $M_2 \cap Rr_1u_2 \neq 0$ nach Voraussetzung. Sei $r_2 \in R$ mit $0 \neq r_2r_1u_2 \in M_2$. Dann ist $0 \neq r_2r_1(u_1,u_2) \in U \cap (M_1 \times M_2)$. Damit ist die Behauptung für $I = \{1,2\}$ gezeigt. Induktiv erhält man die Behauptung für jede endliche Menge I. Sei jetzt I beliebig und $0 \neq U \subseteq \coprod_{i\in I} W_i$ Untermodul, etwa $0 \neq (u_i)_{i\in I} \in U$. Dann ist $J := \{\, i \in I \mid u_i \neq 0 \,\}$ endlich. Da $\coprod_{j\in J} M_j \subseteq \coprod_{j\in J} W_j$ wesentlich ist, ist $R(u_j)_{j\in J} \cap \coprod_{j\in J} M_j \neq 0$. Sei $r \in R$ mit $0 \neq r(u_j)_{j\in J} \in \coprod_{j\in J} M_j$. Dann ist $0 \neq r(u_i)_{i\in I} \in U \cap \coprod_{i\in I} M_i$, d. h. $U \cap \coprod_{i\in I} M_i \neq 0$. ∎

Satz 11.4
Für $M_1,\dots,M_n \in {}_R\mathbf{Mod}$ mit injektiven Hüllen $Q_1,\dots,Q_n$ ist $M_1 \times \ldots \times M_n \subseteq Q_1 \times \ldots \times Q_n$ eine injektive Hülle.

Beweis:
Nach dem Satz 10.2 ist $Q_1 \times \ldots \times Q_n$ injektiv. Nach dem Satz 11.3 ist $M_1 \times \ldots \times M_n \subseteq Q_1 \times \ldots \times Q_n$ eine wesentliche Erweiterung. Nach dem Satz 11.1 ergibt sich die Behauptung. ∎

Definition 11.2 (Kleiner, überflüssiger Untermodul)
Sei $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $L \subseteq M$ ein Untermodul. Dann heißt L **klein** oder **überflüssig** in M, falls $L + N \neq M$ für $N \subset M$.

Wir schreiben $L \ll M$.

Bemerkung 11.3
(i) Nach der Übungsaufgabe 25 ist die Summe endlich vieler kleiner Untermoduln wieder klein.

(ii) Analog ist $\mathrm{Rad}(M)$ die Summe aller kleinen Untermoduln von M.

Satz 11.5
Ist $M \in {}_R\mathbf{Mod}$, so ist $\mathrm{Rad}(M) \ll M$.

Beweis:
Sei $N \subseteq M$ ein Untermodul mit $M = N + \mathrm{Rad}(M)$. Nach dem Lemma von Nakayama (Satz 7.3) ist dann $N = M$. ∎

Definition 11.3 (Projektive Decke)
Eine **projektive Decke** von $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ ist ein R-Epimorphismus $f\colon P \to M$, wobei P ein projektiver R-Modul und $\ker(f) \ll P$ ist. Oft bezeichnet man P selbst als projektive Decke von M.

Satz 11.6
Seien $h\colon M \to N$ ein R-Epimorphismus und $f\colon P \to M$ sowie $g\colon Q \to N$ projektive Decken. Dann existieren $k \in \mathrm{Hom}_R(P,Q)$ und $l \in \mathrm{Hom}_R(Q,P)$ mit $k \circ l = \mathrm{id}_Q$ und $g \circ k = h \circ f$. Insbesondere ist k surjektiv, l injektiv, $P = \ker(k) \oplus \mathrm{Bld}(l)$ und die Einschränkung von k auf $\mathrm{Bld}(l)$ liefert einen R-Isomorphismus $\mathrm{Bld}(l) \simeq Q$, d. h. P enthält eine projektive Decke von N als direkten Summanden.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dotted, "k"] \arrow[d, "f"] & Q \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "h"] & N \end{tikzcd}$$

Beweis:
Da P projektiv ist, existiert ein $k \in \mathrm{Hom}_R(P,Q)$ mit $g \circ k = h \circ f$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, dotted, "k"'] & \\ & M \arrow[d, "h"] & \\ Q \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $g(k(P)) = h(f(P)) = N$. Daher: $Q = k(P) + \ker(g)$, denn für $x \in Q \Rightarrow \exists g(x) \in N \Rightarrow \exists y \in P\colon g(x) = g(k(y)) \Rightarrow x - k(y) \in \ker(g) \Rightarrow x \in k(P) + \ker(g)$. Wegen $\ker(g) \ll Q$ folgt, $Q = k(P)$, d. h. k ist surjektiv. Da Q projektiv ist, zerfällt die kurze exakte Folge $0 \to \ker(k) \hookrightarrow P \xrightarrow{k} Q \to 0$. Folglich existiert ein $l \in \mathrm{Hom}_R(Q,P)$ mit $k \circ l = \mathrm{id}_Q$ und $P = \ker(k) \oplus \mathrm{Bld}(l)$. Insbesondere ist l injektiv und die Einschränkung von k auf $\mathrm{Bld}(l)$ ist bijektiv. ∎

Bemerkung 11.4
Ist h bijektiv, so auch k. Denn wegen $\ker(k) \subseteq \ker(g \circ k) = \ker(f) \ll P$ ist $P = \ker(k) + \mathrm{Bld}(l) = \ker(f) + \mathrm{Bld}(l) = \mathrm{Bld}(l)$, d. h. $\ker(k) = 0$. Also ist k bijektiv.

Projektive Decken sind also bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Im Gegensatz zu den injektiven Hüllen existieren aber projektive Decken nicht immer.

Satz 11.7
Für projektive Decken $f_1\colon P_1 \to M_1, \dots, f_n\colon P_n \to M_n$ ist auch $f\colon P_1 \times \ldots \times P_n \to M_1 \times \ldots \times M_n$ mit $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$ eine projektive Decke.

Beweis:
Offenbar ist $P_1 \times \ldots \times P_n$ projektiv und f ist surjektiv mit dem Kern $\ker(f) = \ker(f_1) \times \ldots \times \ker(f_n)$ (siehe Übungsaufgabe 25). ∎

Bemerkung 11.5
Für jedes Idempotent $e \in R$ ist $R = Re \oplus R(1-e)$. Denn für $r \in R$ ist $r = r1 = r(e + (1-e)) = re + r(1-e)$. Also ist $R = Re + R(1-e)$. Für $r \in Re \cap R(1-e)$ ist $r = re = re(1-e) = r0 = 0$. Also ist $Re \cap R(1-e) = 0$.

Satz 11.8
Für jedes Idempotent $e \in R$ und jedes Linksideal $I \subseteq R$ mit $I \subseteq J(R)$ ist $f\colon Re \to {}^{Re}/_{Ie}$ eine projektive Decke.

BEWEIS:
Nach der obigen Bemerkung ist Re projektiv und $\ker(f) = Ie \subseteq J(R)e = J(R)Re = \mathrm{Rad}(Re)$. Nach dem Satz 11.5 und Übungsaufgabe 25 sind $\mathrm{Rad}(Re)$ und $\ker(f)$ klein in Re. ∎

Satz 11.9
Hat ein zyklischer R-Modul M eine projektive Decke, so ist $M \simeq {}^{Re}/_{Ie}$ für ein Idempotent $e \in R$ und für ein Linksideal $I \subseteq R$ mit $I \subseteq J(R)$. Ist M einfach, so existiert ein Idempotent $e \in R$, sodass $M \simeq {}^{Re}/_{J(R)e}$ und eRe ein lokaler Ring ist.

BEWEIS:
Sei $f\colon P \to M$ eine projektive Decke. Offenbar ist auch $\mathrm{id}_R\colon R \to R$ eine projektive Decke. Da M zyklisch ist, existiert ein R-Epimorphismus $g\colon R \to M$. Nach dem Satz 11.6 existieren $h \in \mathrm{Hom}_R(R,P)$ und $k \in \mathrm{Hom}_R(P,R)$ mit $h \circ k = \mathrm{id}_P$ und $f \circ h = g$. Es ist $R = \ker(h) \oplus \mathrm{Bld}(k)$ und $\mathrm{Bld}(k) \simeq P$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, dotted, "h"] \arrow[d, "\mathrm{id}_R"] & P \arrow[d, "f"] \\ R \arrow[r, "g"] & M \end{tikzcd}$$

Nach der Übungsaufgabe 39 existiert ein Idempotent $e \in R$ mit $\mathrm{Bld}(k) = Re$. Daher sei Œ $P = Re$. Wegen $I := \ker(f) \ll P$ ist $I \subseteq \mathrm{Rad}(P) \subseteq \mathrm{Rad}(R) = J(R)$, d. h. $I = Ie \subseteq J(R)e$.

Sei jetzt M einfach. Wegen $M \simeq {}^{P}/_{I}$ ist $I \subseteq P$ ein maximaler Untermodul und $I = Ie \subseteq J(R)e = J(R)Re \subseteq \mathrm{Rad}(Re) \subset Re$ wegen $e \notin \mathrm{Rad}(R)$, also auch $e \notin \mathrm{Rad}(Re)$. Also ist $I = J(R)e = \mathrm{Rad}(Re)$. Nach dem Satz 6.6 (iii) ist $(eRe)^o \cong \mathrm{End}_R(Re) =: E$. Daher genügt es zu zeigen, dass E ein lokaler Ring ist. Dazu sei $\varphi \in E \setminus U(E)$ (nicht invertierbar). Wir müssen zeigen, dass $\varphi \in J(E)$.

Wir nehmen an, φ sei surjektiv. Dann zerfällt die kurze exakte Folge $0 \to \ker(\varphi) \hookrightarrow P \xrightarrow{\varphi} P \to 0$, d. h. es existiert ein Untermodul $N \subseteq P$ mit $P = N \oplus \ker(\varphi)$ und $N \simeq P$. Da ${}^{P}/_{\mathrm{Rad}(P)}$ einfach ist, folgt $\ker(\varphi) = 0$. Also ist φ bijektiv.↯

Somit ist φ nicht surjektiv, d. h. $\varphi(P) \subseteq \mathrm{Rad}(P)$. Sei $\psi \in E$ beliebig. Nach dem Satz 7.5 genügt es zu zeigen, dass $\omega := \mathrm{id}_P - \varphi\psi$ invertierbar ist. Offenbar ist $P = \mathrm{id}_P(P) = (\omega +$

$\varphi\psi)(P) \subseteq \omega(P) + \varphi(\psi(P)) \subseteq \omega(P) + \mathrm{Rad}(P)$. Wegen $\mathrm{Rad}(P) \ll P$ folgt, $P = \omega(P)$, also ist $\omega(P)$ surjektiv. Wie oben folgt, dass ω sogar bijektiv ist. ■

12. Semiperfekte Ringe und Idempotente

Sei R ein Ring.

Definition 12.1 (Idempotent heben)
Sei $I \trianglelefteq R$. Ein Idempotent $\varepsilon \in R/I$ lässt sich **heben**, falls ein Idempotent $e \in R$ mit $\varepsilon = e + I$ existiert.

Beispiel 12.1
Das Idempotent $3 + 6\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ lässt sich nicht heben, da 0 und 1 die einzigen Idempotente in $\mathbb{Z}$ sind.

Satz 12.1
Sei $I \trianglelefteq R$ ein Nilideal. Dann lässt sich jedes Idempotent $\varepsilon \in R/I$ heben.

BEWEIS:
Sei $u \in R$ mit $\varepsilon = u + I$. Wegen $0 = \varepsilon(1-\varepsilon) = u(1-u) + I$ ist $u(1-u) \in I$. Daher existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $u^m(1-u)^m = 0$. Folglich:

$$\begin{aligned} 1 = (u + (1-u))^{2m} &= \sum_{i=0}^{2m} \binom{2m}{i} u^{2m-i}(1-u)^i \\ &= \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \binom{2m}{i} u^{2m-i}(1-u)^i}_{=:\, e} + \underbrace{\sum_{i=m+1}^{2m} \binom{2m}{i} u^{2m-i}(1-u)^i}_{=1-e=:\, f} \end{aligned}$$

Wegen $u^m(1-u)^m = 0$ ist $ef = 0$, d. h. $e = e1 = e(e+f) = e^2$. Wegen $u(1-u) \in I$ ist $e + I = u^{2m} + I = \varepsilon^{2m} = \varepsilon$. ∎

Definition 12.2 (Orthogonale Idempotente)
Idempotente e und f in R mit $ef = 0 = fe$ nennt man **orthogonal**.

Bemerkung 12.1
Für paarweise orthogonale Idempotente $e_1, \dots, e_n \in R$ ist auch $e_1 + \dots + e_n$ ein Idempotent.

Satz 12.2
Sei $I \trianglelefteq R$ mit $I \subseteq J(R)$, sodass sich jedes Idempotent in R/I heben lässt. Sind $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ paarweise orthogonale Idempotente mit $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = 1$, so existieren paarweise orthogonale Idempotente $e_1, \dots, e_n \in R$ mit $e_1 + \dots + e_n = 1$ und $e_i = e_i + I$ für $i = 1, \dots, n$, d. h. man kann $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ simultan heben.

Beweis:
Nach Voraussetzung existiert ein Idempotent $f_i \in R$ mit $f_i + I = \varepsilon_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $f_i f_j + I = \varepsilon_i \varepsilon_j = 0$ für $i \neq j$. Außerdem haben wir $u := f_1 + \cdots + f_n \in R$ und $u + I = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = 1_R + I$. Dabei ist $u \in 1 + I \subseteq 1 + J(R) \subseteq U(R)$ nach dem Satz 7.5 und $1 + I = uu^{-1} + I = (u + I)(u^{-1} + I) = u^{-1} + I$.

Für $i = 1, \ldots, n$ ist also $Rf_i = Ru^{-1}f_i = Re_i$, $e_i + I = (u^{-1} + I)(f_i + I) = f_i + I = \varepsilon_i$ und $e_1 + \cdots + e_n = u^{-1}(f_1 + \cdots + f_n) = u^{-1}uu = 1$. Wir haben die R-Homomorphismen $\alpha\colon P := Rf_1 \times \ldots \times Rf_n \to R$ mit $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + \cdots + x_n$ und $\beta\colon R \to P$ mit $y \mapsto (ye_1, \ldots, ye_n)$. Wir zeigen: $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_R$ und $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_P$. Es gilt für $y \in R$:

$$\begin{aligned}
\alpha(\beta(y)) &= \alpha(ye_1, \ldots, ye_n) = ye_1 + \cdots + ye_n = y \\
\beta(\alpha((x_1, \ldots, x_n))) &= \beta(x_1 + \cdots + x_n) \\
&= (x_1e_1 + \cdots + x_ne_1, \ldots, x_1e_n + \cdots + x_ne_n) \\
&\equiv (x_1, \ldots, x_n) \pmod{J(R)f_1 \times \ldots \times J(R)f_n}
\end{aligned}$$

Denn für $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\begin{aligned}
x_1e_i + \cdots + x_ne_i + I &= (x_1 + I)(e_i + I) + \cdots + (x_n + I)(e_i + I) \\
&= (x_1 + I)(f_i + I) + \cdots + (x_n + I)(f_i + I) \\
&= (x_i + I)(f_i + I) = x_i + I
\end{aligned}$$

d. h. $x_1e_i + \cdots + x_ne_i - x_i \in I$ und damit $x_1e_i + \cdots + x_ne_i - x_i \in If_i \subseteq J(R)f_i$. Wegen $J(R)f_i \times \ldots \times J(R)f_n = J(R)P \subseteq \mathrm{Rad}(P)$ folgt nach dem Lemma von Nakayama (Satz 7.3):

$$P = \mathrm{Bld}(\beta) + \mathrm{Rad}(P) = \mathrm{Bld}(\beta)$$

Daher sind β und auch α bijektiv. Für $i = 1, \ldots, n$ gilt also: $\alpha((0, \ldots, 0, e_i, 0, \ldots, 0)) = e_i = \alpha(\beta(e_i)) = \alpha((e_ie_1, \ldots, e_ie_n))$. Folglich haben wir:

$$e_ie_j = \begin{cases} e_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

■

Satz 12.3
Für jedes Idempotent $0 \neq e \in R$ sind äquivalent:

(i) e lässt sich nicht in der Form $e = f + g$ mit orthogonalen Idempotenten $f \neq 0, g \neq 0$ in R schreiben.

(ii) Der R-Linksmodul Re ist unzerlegbar.

(iii) 0 und e sind die einzigen Idempotente in eRe.

(iv) eR_R ist unzerlegbar.

Beweis:

(i)⇒(ii) Sei (i) erfüllt und $Re = L \oplus M$ mit Untermoduln L und M. Wir schreiben $e = f + g$ mit $f \in L$ und $g \in M$. Ist $x \in Re$ und $x = ye$ mit $y \in R$, so ist $xe = ye^2 = ye = x$. Insbesondere $f = fe = f^2 + fg$ mit $f^2 \in L$ und $fg \in M$. Folglich: $f = f^2$ und $0 = fg$. Analog ist $g^2 = g$ und $0 = gf$. Wegen (i) ist $f = 0$ oder $g = 0$. Sei ŒE $g = 0$. Dann ist $e = f \in L$ und damit $Re \subseteq L$, d. h. $M = 0$.

(ii)⇒(iii) Sei (ii) erfüllt. Nach dem Satz 8.2 sind 0 und 1 die einzigen Idempotente in $\mathrm{End}_R(Re)$ und nach dem Satz 6.6 (iii) ist $\mathrm{End}_R(Re) \cong \mathrm{End}_R(eRe)^o$.

(iii)⇒(i) Sei (iii) erfüllt und $e = f + g$ mit orthogonalen Idempotenten $f, g \in R$. Dann: $f = (f+g)f(f+g) \in eRe$, also $f \in \{0, e\}$. Folglich ist $f = 0$ oder $g = 0$.

(iv)⇒(i) analog ∎

Bemerkung 12.2
Ist $E \in R$ ein Idempotent und eRe ein lokaler Ring, so ist e primitiv in R. Gegebenenfalls heißt e **streng primitiv** oder **lokal**.

Satz 12.4
Sei $P \in {}_R\mathbf{Mod}$ projektiv und $E := \mathrm{End}_R(P)$. Dann ist $J(E) = \{\, f \in E \mid f(P) \ll P \,\}$.

Beweis:

$\subseteq$ Sei $f \in J(E)$ und $N \subseteq P$ ein Untermodul mit $P = f(P) + N$. Ist $g \colon P \to P/N$ kanonisch, so ist $g(f(P)) = f(P)+N/N = P/N$, also ist $g \circ f$ surjektiv. Da P projektiv ist, existiert ein $h \in E$ mit $g \circ f \circ h = g$, d. h. $g \circ (1 - f \circ h) = 0$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dotted, "h"'] \\ P \arrow[r, "g \circ f"] & P/N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Wegen $f \in J(E)$ ist $1 - f \circ h \in U(E)$, d. h. $g = 0$. Folglich ist $P = N$.

$\supseteq$ Sei $f \in E$ und $f(P) \ll P$. Sei ferner $g \in E$ und $:= \mathrm{id}_P - f \circ g$. Dann ist $P = \mathrm{id}_P(P) = (h + f \circ g)(P) \subseteq h(P) + f(P) \subseteq P$, d. h. $P = h(P) + f(P) = h(P)$. Da P projektiv ist, zerfällt die kurze exakte Folge $0 \to \ker(h) \hookrightarrow P \xrightarrow{h} P \to 0$. Daher existiert ein $k \in E$ mit $h \circ k = \mathrm{id}_P$. Daher ist $h \in E$ rechtsinvertierbar. Nach dem Satz 7.5 ist $f \in J(E)$. ∎

Satz 12.5
Äquivalent sind:

(1) Jeder einfache R-Modul hat eine projektive Decke.

(2) Jeder endlich erzeugte R-Modul hat eine projektive Decke.

(3) $R/J(R)$ ist ein halbeinfacher Ring und jedes Idempotent in $R/J(R)$ lässt sich heben.

(4) Es existieren paarweise orthogonale streng primitive Idempotente $e_1, \dots, e_n \in R$ mit $e_1 + \dots + e_n = 1$.

Beweis:
(1)⇒(2) klar

(2)⇒(3) Sei (2) erfüllt. Wir zeigen zunächst: $\overline{R} := R/J(R)$ ist ein halbeinfacher Ring. Dazu sei $\overline{L} = L/J(R) \subseteq \overline{R}$ ein Linksideal. Dann: $L \subseteq R$ Linksideal. Nach der Voraussetzung hat der zyklische R-Modul R/L eine projektive Decke. Nach dem Satz 11.9 ist $R/L \simeq Re/Ie$ für ein Idempotent $e \in R$ und ein Linksideal $I \subseteq R$ mit $I \subseteq J(R)$. Folglich:

$$J(R)[Re/Ie] \simeq J(R)[R/L] = J(R)+L/L = L/L = 0$$

Daher: $J(R)e \subseteq Ie \subseteq J(R)e$, d. h. $Ie = J(R)e$ und $R/L \simeq Re/J(R)e$. Man zeigt leicht, dass $Re/J(R)e \to \overline{R}(e + J(R))$ mit $x + J(R)e \mapsto x + J(R)$ ein R-Isomorphismus ist. Daher $R/L \simeq \overline{R}(e + J(R))$ als R-Modul und $\overline{R}$-Modul. Offenbar: $\overline{R}(e + J(R)) \in {}_{\overline{R}}\mathbf{Mod}$ projektiv. Daher zerfällt die folgende kurze exakte Sequenz in ${}_{\overline{R}}\mathbf{Mod}$: $0 \to L/J(R) \hookrightarrow R/J(R) \to R/L \to 0$. Daher hat $L/J(R)$ ein Komplement in $R/J(R)$. Dies zeigt, $\overline{R}$ ist ein halbeinfacher Ring.

Sei $\varepsilon_1 \in \overline{R}$ ein Idempotent und $\varepsilon_2 := 1 - \varepsilon_1$. Dann $\overline{R} = \overline{R}\varepsilon_1 \oplus \overline{R}\varepsilon_2$. Nach Voraussetzung haben $\overline{R}\varepsilon_1$ und $\overline{R}\varepsilon_2$ aus ${}_{\overline{R}}\mathbf{Mod}$ projektive Decken $f_1 \colon P_1 \to \overline{R}\varepsilon_1$ und $f_2 \colon P_2 \to \overline{R}\varepsilon_2$. Nach dem Satz 11.7 ist also $f' \colon P_1 \times P_2 \to \overline{R}$ mit $(x_1, x_2) \mapsto f_1(x_1) + f_2(x_2)$ eine projektive Decke. Andererseits ist nach Satz 11.8 die kanonische Abbildung $f \colon R \to \overline{R}$ eine projektive Decke.

$$\begin{tikzcd} P_1 \times P_2 \arrow[r, dotted, "g"] \arrow[d, "f'"] & R \arrow[d, "f"] \\ \overline{R} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\overline{R}}"] & \overline{R} \end{tikzcd}$$

Nach der Bemerkung 11.4 existiert also ein R-Isomorphismus $g \colon P_1 \times P_2 \to R$ mit $f \circ g = f'$. Wegen $P_1 \times P_2 = (P_1 \times 0) \oplus (0 \times P_2)$ ist $R = Q_1 \oplus Q_2$ mit $Q_1 = g(P_1 \times 0)$ und $Q_2 = g(0 \times P_2)$. Nach der Übungsaufgabe 39 existieren orthogonale Idempotente $e_1, e_2 \in R$ mit $Q_1 = Re_1$, $Q_2 = Re_2$ und $1 = e_1 + e_2$. Dann: $f(e_1) \in f(Q_1) = f(g(P_1 \times 0)) = f'(P_1 \times 0) = f_1(P_1) = \overline{R}\varepsilon_1$ und analog ist $f(e_2) \in \overline{R}\varepsilon_2$. Aus $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1_{\overline{R}} = f(1_R) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2)$ folgt, $\varepsilon_1 = f(e_1)$ und $\varepsilon_2 = f(e_2)$.

(3)⇒(4) Sei (3) erfüllt. Nach dem Struktursatz von Wedderburn (Satz 6.7) existieren $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{N}$ und Schiefkörper $D_1, \dots, D_k$ mit $\overline{R} := R/J(R) \cong D_1^{d_1 \times d_1} \times \dots D_k^{d_k \times d_k}$.

Daher existieren paarweise orthogonale Idempotente $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \overline{R}$ derart, dass $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = 1$ und $\varepsilon_i \overline{R} \varepsilon_i$ für $i = 1, \dots, n$ ein Schiefkörper ist:

$$e_i := \left(0, \dots, 0, \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0 \right)$$

Wegen Punkt (3) und Satz 12.2 existieren paarweise orthogonale Idempotente $e_1, \dots, e_n \in R$ derart, dass $e_1 + \dots + e_n = 1$ und $\varepsilon_i = e_i + J(R)$ für $i = 1, \dots, n$ ist. Für $i = 1, \dots, n$ ist $e_i R e_i \to \varepsilon_i \overline{R} \varepsilon_i$ mit $x \mapsto x + J(R)$ ein Ringepimorphismus mit dem Kern $e_i R e_i \cap J(R) = e_i J(R) e_i = J(e_i R e_i)$ (siehe auch Übungsaufgabe 28). Daher ${}^{e_i R e_i}/_{J(e_i R e_i)} \cong \varepsilon_i \overline{R} \varepsilon_i$ Schiefkörper, d. h. $e_i R e_i$ lokaler Ring, d. h. e_i streng primitiv.)

(4)⇒(1) Sei (4) erfüllt und $i \in \{1, \dots, n\}$. Nach dem Satz 7.2 hat $P_i := Re_i$ einen maximalen Untermodul M_i. Wir zeigen zunächst: $M_i \ll P_i$. Dazu sei $K_i \subseteq P_i$ ein Untermodul mit $P_i = K_i + M_i$. Wegen ${}^{P_i}/_{M_i} = {}^{K_i + M_i}/_{M_i} \simeq {}^{K_i}/_{K_i \cap M_i}$ existiert ein R-Epimorphismus $f_i \colon P_i \to {}^{K_i}/_{K_i \cap M_i}$. Das P_i ist projektiv.

$$\begin{tikzcd} & P_i \arrow[dl, dotted, "g_i"'] \arrow[d, "f_i"] & \\ K_i \arrow[r, "\pi_i"] & {}^{K_i}/_{K_i \cap M_i} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Wegen der Projektivität von P_i existiert zu der kanonischen Abbildung $\pi_i \colon K_i \to {}^{K_i}/_{K_i \cap M_i}$ ein $g_i \in \operatorname{Hom}_R(P_i, K_i)$ mit $\pi_i \circ g_i = f_i$. Dann: ${}^{K_i}/_{K_i \cap M_i} = f_i(P_i) = \pi_i(g_i(P_i)) = g_i(P_i) + {}^{K_i \cap M_i}/_{K_i \cap M_i}$, d. h. $P_i = K_i + M_i = g_i(P_i) + M_i$. Ferner ist $g_i' \colon P_i \to P_i$ mit $x \mapsto g_i(x)$ ein R-Endomorphismus. Wäre $K_i \neq P_i$, so wäre g_i nicht surjektiv, d. h. $g_i' \in E_i := \operatorname{End}_R(P_i)$ nicht invertierbar. Nach Satz 6.6 (iii) ist $E_i \cong (e_i R e_i)^o$ ein lokaler Ring, also $g_i' \in J(E_i)$. Nach dem Satz 12.4 ist $g_i(P_i) = g_i'(P_i) \ll P_i$. Also ist $P_i = M_i$ ↯ Folglich ist $K_i = P_i$ und wir haben gezeigt, dass $M_i \ll P_i$. Daher: $M_i \subseteq \operatorname{Rad}(P_i) \subseteq M_i$, d. h. $\operatorname{Rad}(P_i) = M_i$. Genauer gilt: $M_i = \operatorname{Rad}(Re_i) = J(R)Re_i$ (nach einer Übungsaufgabe). Insbesondere: ${}^{Re_i}/_{J(R)e_i} = {}^{P_i}/_{M_i} \in {}_R\mathbf{Mod}$ einfach. Man zeigt leicht:

$$ {}^{Re_i}/_{J(R)e_i} \to \left({}^{R}/_{J(R)}\right)(e_i + J(R)) \qquad x + J(R)e_i \mapsto x + J(R)$$

ist ein R-Isomorphismus. Dann haben wir $\overline{R} := {}^{R}/_{J(R)} = \overline{R}\overline{e_1} \oplus \dots \oplus \overline{R}\overline{e_n}$ mit $\overline{e_i} = e_i + J(R)$ mit einfachen $\overline{R}$-Moduln $\overline{R}\overline{e_1}, \dots, \overline{R}\overline{e_n}$. Daher ist $\overline{R}$ ein halbeinfacher Ring.

Jeder einfache R-Modul M wird von dem Radikal $J(R)$ annulliert. Es kann also als einfacher $\overline{R}$-Modul aufgefasst werden. Da $\overline{R}$ halbeinfach ist, ist das M zu einem der Moduln $\overline{R}\overline{e_i}$ isomorph: $M \simeq {}^{Re_i}/_{J(R)e_i}$. Nach dem Satz 11.8 ist die kanonische Abbildung $Re_i \to {}^{Re_i}/_{J(R)e_i}$ eine projektive Decke. ■

Bemerkung 12.3
Wenn R semiperfekt, so ist R^o auch semiperfekt.

Beispiel 12.2
Ist R linksartinsch oder auch rechtsartinsch, so ist R semiperfekt. Denn nach Bemerkung 7.2 (vi) ist ${}^{R}/_{J(R)}$ halbeinfach und nach Satz 7.5 ist $J(R)$ nilpotent. Nach dem Satz 12.1 lässt sich also jedes Idempotent in ${}^{R}/_{J(R)}$ heben.

Wegen der vierten Eigenschaft in obigem Satz ist jeder lokale Ring semiperfekt.

Der Ring $\mathbb{Z}$ ist nicht semiperfekt.

Bemerkung 12.4
Sei R semiperfekt und $1 = e_1 + \cdots + e_n$ mit paarweise orthogonalen streng primitiven Idempotenten $e_1, \ldots, e_n$. Dann: $R = Re_1 \oplus \ldots \oplus Re_n$ mit streng unzerlegbaren projektiven $Re_1, \ldots, Re_n \in {}_R\mathbf{Mod}$. Im Beweis von Satz 12.5 haben wir gezeigt:

(i) Für $i = 1, \ldots, n$ ist ${}^{Re_i}/_{J(R)e_i} \in {}_R\mathbf{Mod}$ einfach mit projektiver Decke $Re_i \to {}^{Re_i}/_{J(R)e_i}$ mit $x \mapsto x + J(R)e_i$.

(ii) Jeder einfache R-Modul ist zu einem ${}^{Re_i}/_{J(R)e_i}$ isomorph.

Satz 12.6
In der obigen Situation ist jeder unzerlegbare projektive R-Modul P zu einem Re_i isomorph. Dabei gilt:

$$Re_i \simeq Re_j \Leftrightarrow {}^{Re_i}/_{J(R)e_i} \simeq {}^{Re_j}/_{J(R)e_j}$$

13. Das Tensorprodukt

Sei R ein Ring.

Definition 13.1 (Ausgeglichene Abbildung)
Seien $M \in \mathbf{Mod}_R$ und $N \in {}_R\mathbf{Mod}$ sowie $A \in {}_\mathbb{Z}\mathbf{Mod}$. Eine Abbildung $f\colon M \times N \to A$ heißt **ausgeglichen**, falls gilt:

(i) $f(m+m',n) = f(m,n) + f(m',n)$

(ii) $f(m,n+n') = f(m,n) + f(m,n')$

(iii) $f(mr,n) = f(m,rn)$

Bemerkung 13.1
Daraus folgt leicht, $f(m,0) = 0 = f(0,n)$ und $f(-m,n) = -f(m,n) = f(m,-n)$.

Bemerkung 13.2
Sei R ein Ring, $M \in \mathbf{Mod}_R$, $N \in {}_R\mathbf{Mod}$, $A := \coprod_{(m,n)\in M\times N} \mathbb{Z} \in \mathbf{Ab}$ mit Standardbasis $\left\{ e_{(m,n)} \;\middle|\; m \in M, n \in N \right\}$. Die Teilmenge $X \subseteq A$ bestehe aus den Elementen $e_{(m+m',n)} - e_{(m,n)-e_{(m',n)}}$, $e_{(m,n+n')} - e_{(m,n)} - e_{(m,n')}$, $e_{(mr,n)} - e_{(m,rn)}$ mit $m,m' \in M$, $n,n' \in R$ und $r \in R$. Die Teilmenge $B \subseteq A$ sei die von X erzeugte Untergruppe und

$$M \otimes_R N := A/B \in \mathbf{Ab}$$

mit $m \otimes n := e_{(m,n)} + B \in A/B = M \otimes_R N$ mit $m \in M$ und $n \in N$.

Satz 13.1

(i) $(m+m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$, $m \otimes (n+n') = m \otimes n + m \otimes n'$, $mr \otimes n = m \otimes rn$ für $m,m' \in M$, $n,n' \in N$ und $r \in R$.

(ii) Jedes Element in $M \otimes_R N$ kann man in der Form $\sum_{i=1}^k m_i \otimes n_i$ mit endlich vielen $m_1,\ldots,m_k \in M$ und $n_1,\ldots,n_k \in N$ schreiben.

BEWEIS:

(i) $(m+m') \otimes n - m \otimes n - m' \otimes n = e_{(m+m',n)} - e_{(m,n)} - e_{(m',n)} + B = 0$. Die anderen Gleichungen zeigt man analog.

(ii) Jedes $a \in A$ kann man in der Form $a = \sum_{i=1}^k z_i e_{(m_i,n_i)}$ mit endlich vielen $m_i \in M$, $n_i \in N$ und $z_i \in \mathbb{Z}$ schreiben. Daher: $a + B = \sum_{i=1}^k z_i e_{(m_i,n_i)} + B = \sum_{i=1}^k z_i(m_i \otimes n_i) = \sum_{i=1}^k (z_i m_i \otimes n_i)$. ■

Bemerkung 13.3
Die Schreibweise $\sum_{i=1}^{k} m_i \otimes n_i$ ist im Allgemeinen nicht eindeutig. Ferner ist $M \otimes_R N \neq \{\, m \otimes n \mid m \in M, n \in N \,\}$.

Satz 13.2 (Universelle Eigenschaft des Tensorprodukts)
Seien $M \in \mathbf{Mod}_R$, $N \in {}_R\mathbf{Mod}$, $L \in \mathbf{Ab}$ und $f\colon M \times N \to L$ ausgeglichen sowie $t\colon M \times N \to M \otimes_R N$ kanonisch. Dann existiert genau ein $f' \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, L)$ mit $f'(m \otimes n) = f(m, n)$ für alle $m \in M$ und $n \in N$.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "f"'] & & M \otimes_R N \arrow[dl, dotted, "f'"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

BEWEIS:
Mit den obigen Bezeichnungen ist

$$F\colon A \to L, \qquad (z_{(m,n)})_{(m,n)\in M\times N} \mapsto \sum_{(m,n)\in M\times N} z_{(m,n)} f(m,n)$$

eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung. Dabei gilt fülle $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ und $r \in R$:

$$\begin{aligned} F(e_{(m+m',n)} - e_{(m,n)} - e_{(m',n)}) &= f(m+m',n) - f(m,n) - f(m',n) = 0 \\ F(e_{(m,n+n')} - e_{(m,n)} - e_{(m,n')}) &= \cdots = 0 \\ F(e_{(mr,n)} - e_{(m,rn)}) &= \cdots = 0 \end{aligned}$$

Folglich ist $F(B) = 0$. Daher ist die neue Abbildung $f'\colon M \otimes_R N = {}^{A}/_{B} \to L$ mit $a + B \mapsto F(a)$ wohldefiniert und $\mathbb{Z}$-linear mit $f'(m \otimes n) = f'(e_{(m,n)} + B) = F(e_{(m,n)}) = f(m,n)$ für alle $m \in M$ und $n \in N$.

Sei auch $f'' \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, L)$ eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung mit $f''(m \otimes n) = f(m,n) = f'(m \otimes n)$ für alle $m \in M$ und $n \in N$. Aus dem Satz 13.1 (ii) folgt, dass $f'' = f'$. ■

Satz 13.3
Seien $M, M' \in \mathbf{Mod}_R$, $N, N' \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $f \in \operatorname{Hom}_R(M, M')$ sowie $g \in \operatorname{Hom}_R(N, N')$. Dann existiert genau ein $h \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$ mit $h(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$ für alle $m \in M$ und $n \in N$.
BEWEIS:
Die Abbildung $H\colon M \times N \to M' \otimes_R N'$ mit $(m,n) \mapsto f(m) \otimes g(n)$ ist ausgeglichen. Denn für $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ und $r \in R$ gilt:

$$\begin{aligned} H(m+m',n) &= f(m+m') \otimes g(n) = (f(m) + f(m')) \otimes g(n) \\ &= f(m) \otimes g(n) + f(m') \otimes g(n) = H(m,n) + H(m',n) \\ H(m,n+n') &= \cdots = H(m,n) + H(m,n') \\ H(mr,n) &= \cdots = H(m,rn) \end{aligned}$$

Daher existiert genau ein $h \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$ mit $h(m \otimes n) = H(m,n) = f(m) \otimes g(n)$ für alle $m \in M$ und $n \in N$. ■

Definition 13.2 (Tensorprodukt)
Man bezeichnet $h =: f \otimes g$ als das **Tensorprodukt** von f und g.

Bemerkung 13.4
Also: $f \otimes g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$ und $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$ für alle $m \in M$ und $n \in N$.

Satz 13.4

(i) Für $M, M', M'' \in \mathbf{Mod}_R$, $N, N', N'' \in {}_R\mathbf{Mod}$ und R-Homomorphismus $M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M''$ und $N \xrightarrow{g} N' \xrightarrow{g'} N''$ gilt:

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f \circ f') \otimes (g' \circ g) \qquad \mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{M \otimes_R N}$$

(ii) Für $M, M' \in \mathbf{Mod}_R$, $N, N' \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, M')$ sowie $g, g' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, N')$ gilt:

$$\begin{aligned} (f + f') \otimes g &= (f \otimes g) + (f' \otimes g) & \qquad f \otimes 0 = 0 = 0 \otimes g \\ f \otimes (g + g') &= (f \otimes g) + (f \otimes g') & (-f) \otimes g = -(f \otimes g) = f \otimes (-g) \end{aligned}$$

BEWEIS:
siehe Skript ■

Satz 13.5
Für $M \in \mathbf{Mod}_R$ hat man einen (kanonischen) $\mathbb{Z}$-Isomorphismus $\mu\colon M \otimes_R R \to M$ mit $\mu(m \otimes r) = mr$ für alle $m \in$ und $r \in R$.

BEWEIS:
Offenbar ist $f\colon M \times R \to M$ mit $(m, r) \mapsto mr$ ausgeglichen. Daher existiert genau ein $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R R, M)$ mit $\mu(m \otimes r) = f(m, r) = mr$ für alle $m \in M$ und $r \in R$.

Andererseits ist $\nu\colon M \to M \otimes_R R$ mit $m \mapsto m \otimes 1$ eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung mit $\nu(\mu(m \otimes r)) = \nu(mr) = mr \otimes 1 = m \otimes r1 = m \otimes r$ und $\mu(\nu(m)) = \mu(m \otimes 1) = m1 = m$ für alle $m \in M$ und $r \in R$. ■

Bemerkung 13.5
Analog hat man für $N \in {}_R\mathbf{Mod}$ einen (kanonischen) $\mathbb{Z}$-Isomorphismus $\nu\colon R \otimes_R N \to N$ mit $\nu(r \otimes n) = rn$ für alle $n \in N$ und $r \in R$.

Satz 13.6
Für jede Familie von Moduln $(M_i)_{i \in I}$ in $\mathbf{Mod}_R$ und $N \in {}_R\mathbf{Mod}$ gilt:

$$\left(\coprod_{i \in I} M_i \right) \otimes_R N \simeq_{\mathbb{Z}} \coprod_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$$

Beweis:
Sei $M := \coprod_{i\in I} M_i$ mit Projektoren p_j und Injektoren q_j für $j \in I$. Dann haben wir $\mathbb{Z}$-Homomorphismen:

$$\begin{aligned}
p_j \otimes \mathrm{id}_N \colon M \otimes_R N &\to M_j \otimes_R N \\
q_j \otimes \mathrm{id}_N \colon M_j \otimes_R N &\to M \otimes_R N \\
f \colon \coprod_{j\in I}(M_j \otimes_R N) &\to M \otimes_R N \qquad (x_j)_{j\in I} \mapsto \sum_{j\in I}(q_j \otimes \mathrm{id}_N)(x_j) \\
g \colon M \otimes_R N &\to \coprod_{j\in I}(M_j \otimes_R N) \qquad x \mapsto ((p_j \otimes \mathrm{id}_N)(x))_{j\in I}
\end{aligned}$$

Dabei gilt für x$\in M \otimes_R N$: $|\{\, j \in I \mid (p_j \otimes \mathrm{id}_N)(x) \neq 0 \,\}| < \infty$. Denn dies gilt für jedes Element der Form $(m_i)_{i\in I} \otimes n$, denn $(p_j \otimes \mathrm{id}_N)(m_i)_{i\in I} \otimes n) = m_j \otimes n$. Also gilt es auch für endliche Summen solcher Elemente. Für $m = (m_i)_{i\in I} \in M$ und $n \in N$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(g(m \otimes n)) &= f(((p_j \otimes \mathrm{id}_N)(m \otimes n))_{j\in I}) = f((m_j \otimes n)_{j\in I}) \\
&= \sum_{j\in I}(q_j \otimes \mathrm{id}_N)(m_j \otimes n) = \sum_{j\in I} q_j(m_j) \otimes n = \left(\sum_{j\in I} q_j(m_j)\right) \otimes n = m \otimes n
\end{aligned}$$

Analog gilt für ein Element $x = (x_j)_{j\in I} \in \coprod_{j\in I}(M_j \otimes_R N)$:

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= g\left(\sum_{j\in I}(q_j \otimes \mathrm{id}_N)(x_j)\right) = \sum_{j\in I}(((p_i \otimes \mathrm{id}_N)(q_j \otimes \mathrm{id}_N))(x_j))_{i\in I} \\
&= \sum_{j\in I}(((p_i \circ q_j) \otimes \mathrm{id}_N)(x_j))_{i\in I} = \sum_{j\in I}(\delta_{ij}x_j)_{i\in I} = (x_j)_{j\in I} = x
\end{aligned}$$

Daher $f \circ g = \mathrm{id}$ und $g \circ f = \mathrm{id}$. ∎

Definition 13.3 (Kanonischer Isomorphismus)
Die obige Abbildung heißt **kanonischer Isomorphismus** zwischen $(\coprod_{i\in I} M_i) \otimes_R N$ und $\coprod_{i\in I}(M_i \otimes_R N)$.

Bemerkung 13.6
Analog hat man für $M \in \mathbf{Mod}_R$ und jede Familie $(N_i)_{i\in I}$ in ${}_R\mathbf{Mod}$ einen kanonischen $\mathbb{Z}$-Isomorphismus $M \otimes_R (\coprod_{i\in I} N_i) \to \coprod_{i\in I}(M \otimes_R N_i)$.

Satz 13.7
Für $M \in \mathbf{Mod}_R$ und jede kurze exakte Sequenz

$$0 \to N \xrightarrow{g} N' \xrightarrow{g'} N'' \to 0 \tag{13.1}$$

in ${}_R\mathbf{Mod}$ ist die folgende Sequenz in ${}_\mathbb{Z}\mathbf{Mod}$ exakt:

$$M \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes g} M \otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes g'} M \otimes_R N'' \to 0 \tag{13.2}$$

Zerfällt die Gleichung 13.1, so ist

$$0 \to M \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes g} M \otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes g'} M \otimes_R N'' \to 0$$

exakt und zerfallend.

BEWEIS:
Seien $m \in M$ und $n'' \in N''$. Da g' surjektiv ist, existiert ein $n' \in N'$ mit $n'' = g'(n')$. Daher: $m \otimes n'' = (\mathrm{id}_M \otimes g')(m \otimes n')$. Dies zeigt, dass $\mathrm{id}_M \otimes g'$ surjektiv ist. Offenbar: $(\mathrm{id}_M \otimes g') \circ (\mathrm{id}_M \otimes g) = \mathrm{id}_M \otimes (g' \circ g) = 0$, d. h. $B := \mathrm{Bld}(\mathrm{id}_M \otimes g) \trianglelefteq \ker(\mathrm{id}_M \otimes g') =: K$. Andererseits ist $f\colon M \times N'' \to {}^{M \otimes_R N'}/_B$ mit $(m, g'(n')) \mapsto m \otimes n + B$ wohldefiniert, denn sind $n_1', n_2' \in N'$ mit $g'(n_1') = g'(n_2')$, so ist $n_1' - n_2' \in \ker(g') = \mathrm{Bld}(g)$, d. h. $n_1' - n_2' = g(n)$ für ein $n \in N$. Daher ist $m \otimes n_1' - m \otimes n_2' = m \otimes (n_1' - n_2') = m \otimes g(n) = (\mathrm{id}_M \otimes g)(m \otimes n) \in B$. Man zeigt leicht, dass f ausgeglichen ist. Daher existiert ein $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N'', {}^{M \otimes_R N'}/_B)$ mit $f'(m \otimes n') = f(m, n'')$ für alle $m \in M$ und $n'' \in N''$. Insbesondere $(f' \circ (\mathrm{id}_M \otimes g'))(m \otimes n') = f'(m \otimes g'(n')) = f(m, g'(n')) = m \otimes n' + B$. Also ist $(f' \circ (\mathrm{id}_M \otimes g'))(x) = x + B$ für alle $x \in M \otimes_R N'$. Insbesondere gilt für alle $x \in K$: $0 = (f' \circ (\mathrm{id}_M \otimes g'))(x) = x + B \Rightarrow x \in B$. Daher ist $B = K$. Zerfällt die Gleichung 13.1, so existiert ein $h \in \mathrm{Hom}_R(N', N)$ mit $h \circ g = \mathrm{id}_N$. Daher: $\mathrm{id}_M \otimes h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N', M \otimes_R N)$ und $(\mathrm{id}_M \otimes h) \circ (\mathrm{id}_M \otimes g) = \mathrm{id}_M \otimes (h \circ g) = \mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{M \otimes_R N}$. Daher: $\mathrm{id}_M \otimes g$ injektiv und Gleichung 13.7 ist exakt und zerfallend. ■

Bemerkung 13.7
Eine analoge Aussage hat man für jede kurze exakte Sequenz $0 \to M \to M' \to M'' \to 0$ in $\mathbf{Mod}_R$ und alle $N \in {}_R\mathbf{Mod}$.

Beispiel 13.1
Für $k \in \mathbb{N}$ haben wir eine kurze exakte Sequenz in ${}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \to {}^{\mathbb{Z}}/_{k\mathbb{Z}} \to 0$$

Für $l \in \mathbb{Z}$ ist also auch:

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} ({}^{\mathbb{Z}}/_{l\mathbb{Z}}) \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} ({}^{\mathbb{Z}}/_{l\mathbb{Z}}) \to ({}^{\mathbb{Z}}/_{k\mathbb{Z}}) \otimes_{\mathbb{Z}} ({}^{\mathbb{Z}}/_{l\mathbb{Z}}) \to 0$$

exakt in ${}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$. Nach dem Homomorphiesatz gilt:

$$({}^{\mathbb{Z}}/_{k\mathbb{Z}}) \otimes_{\mathbb{Z}} ({}^{\mathbb{Z}}/_{l\mathbb{Z}}) \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} {}^{\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}}/_{\mathrm{Bld}(f \otimes \mathrm{id})}$$

Daher ist $f \otimes \mathrm{id}$ die Multiplikation mit k. Folglich:

$$\begin{aligned}({}^{\mathbb{Z}}/_{k\mathbb{Z}}) \otimes_{\mathbb{Z}} ({}^{\mathbb{Z}}/_{l\mathbb{Z}}) &\simeq {}^{\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})}/_{k(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}))} \simeq {}^{\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}}/_{k(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})} \\ &= {}^{\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}}/_{k\mathbb{Z} + l\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}} \simeq {}^{\mathbb{Z}}/_{k\mathbb{Z} + l\mathbb{Z}} \\ &\simeq {}^{\mathbb{Z}}/_{\mathrm{ggT}(k,l)\mathbb{Z}}\end{aligned}$$

Daher $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/_{\mathrm{ggT}(k,l)}\mathbb{Z}$ für $k, l \in \mathbb{N}$. Im Fall $k = l$ ist $k(x \otimes y) = x \otimes (ky) = x \otimes 0 = 0$ für $x \in \mathbb{Z}$ und $y \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, d. h. $f \otimes \mathrm{id} = 0$.

Für $k \geq 2$ ist also $f \otimes \mathrm{id}$ nicht injektiv, d. h. aus der Exaktheit von Gleichung 13.1 folgt i. A. nicht die von Gleichung 13.7. Für einen Untermodul M eines R-Moduls M' kann man also $M \otimes_R N$ i. A. nicht als $\mathbb{Z}$-Untermodul von $M' \otimes_R N$ auffassen.

Definition 13.4 (Flacher Modul)
$N \in {}_R\mathbf{Mod}$ heißt **flach**, falls für jede kurze exakte Sequenz $0 \to M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M'' \to 0$ in $\mathbf{Mod}_R$ die Sequenz $0 \to M \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_N} M' \otimes_R N \xrightarrow{f'' \otimes \mathrm{id}_N} M'' \otimes_R N \to 0$ exakt in ${}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$ ist. Analog definiert man flache R-Rechtsmoduln.

Satz 13.8

(i) Für jede Familie $(N_i)_{i \in I}$ in ${}_R\mathbf{Mod}$ gilt, $\coprod N_i$ ist genau dann flach, wenn für alle $i \in I$ die N_i flach sind.

(ii) $P \in {}_R\mathbf{Mod}$ projektiv $\Rightarrow$ P flach.

Beweis:
Sei $0 \to M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M'' \to 0$ exakt in $\mathbf{Mod}_R$.

(i) Sei $N := \coprod N_i$ mit Projektoren p_j und Injektoren q_j für $j \in I$. Wir betrachten das folgende Diagramm in ${}_R\mathbf{Mod}$:

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R N \arrow[r, "f \otimes \mathrm{id}_N"] \arrow[d, "h"] & M' \otimes_R N \arrow[d, "h'"] \\
\coprod (M \otimes_R N_i) \arrow[r, "g"] & \coprod (M' \otimes_R N_i)
\end{tikzcd}$$

Dabei sind h und h' die kanonischen Isomorphismen aus dem Satz 13.6 und $g((x_i)_{i \in I}) := ((f \otimes \mathrm{id}_{N_i})(x_i))_{i \in I}$ für $(x_i)_{i \in I} \in \coprod (M \otimes_R N_i)$.

Das Diagramm kommutiert, denn für $m \in M$ und $n \in (n_i)_{i \in I} \in N$ gilt:

$$\begin{aligned}
(h' \circ (f \otimes \mathrm{id}_N))(m \otimes n) &= h'(f(m) \otimes n) = ((\mathrm{id}_M \otimes p_i)(f(m) \otimes n))_{i \in I} \\
&= (f(m) \otimes n_i)_{i \in I} = ((f \otimes \mathrm{id}_{N_i})(m \otimes n_i))_{i \in I} \\
&= g((m \otimes n_i)_{i \in I}) = g(h(m \otimes n)) = (g \circ h)(m \otimes n)
\end{aligned}$$

Also ist $f \otimes \mathrm{id}_N$ genau dann injektiv, wenn g injektiv ist und dies ist genau dann der Fall, wenn $f \otimes \mathrm{id}_{N_i}$ für alle $i \in I$ injektiv ist.

(ii) Wir zeigen zunächst, dass ${}_R R$ flach ist. Dazu betrachten wir das folgende Diagramm in ${}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$:

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R R \arrow[r, "f \otimes \mathrm{id}_N"] \arrow[d, "\mu"] & M' \otimes_R R \arrow[d, "\mu'"] \\
M \arrow[r, "f"] & M'
\end{tikzcd}$$

Dabei sind μ und μ' die kanonischen Isomorphismen aus Satz 13.6 und für $m \in M$ sowie $r \in R$ gilt:

$$\begin{aligned}(\mu' \circ (f \otimes \mathrm{id}_R))(m \otimes r) &= \mu'(f(m) \otimes r) = f(m)r = f(mr) = f(\mu(m \otimes r)) \\ &= (f \circ \mu)(m \otimes r)\end{aligned}$$

Also kommutiert das Diagramm. Mit f ist aber auch $f \otimes \mathrm{id}_R$ injektiv. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Nach dem ersten Punkt ist also auch jeder freie R-Modul flach. Somit sind auch projektive R-Linksmoduln flach. ∎

14. Bimoduln

Im folgenden seien R, S, T immer Ringe.

Definition 14.1 (Bimodul)
Ein **R-S-Bimodul** ist eine Menge M mit den Verknüpfungen:

$$\begin{aligned} M \times M &\to M & (x,y) &\mapsto (x+y) \\ R \times M &\to M & (r,x) &\mapsto (rx) \\ M \times S &\to M & (x,s) &\mapsto (xs) \end{aligned}$$

Für diese gilt:

(i) $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $M \in \mathbf{Mod}_S$

(ii) $r \in R$, $s \in S$, $m \in M \Rightarrow (rm)s = r(ms)$

Bemerkung 14.1
Die R-S-Bimoduln bilden eine Kategorie ${}_R\mathbf{Mod}_S$.

Beispiel 14.1
a) R selbst ist ein R-R-Bimodul. Man schreibt ${}_RR_R$.

b) $M \in \mathbf{Mod}_R \Rightarrow M \in {}_{\mathrm{End}_R(M)}\mathbf{Mod}_R$. Analog ist $M \in {}_R\mathbf{Mod} \Rightarrow M \in {}_R\mathbf{Mod}_{\mathrm{End}_R(M)^o}$.

Bemerkung 14.2

(i) Für $M \in {}_R\mathbf{Mod}_S$ und $N \in {}_S\mathbf{Mod}_T$ ist $\mathrm{Hom}_R(M,N) \in {}_S\mathbf{Mod}_T$, wobei $(sft)(m) = f(ms) \cdot t$ für alle $s \in S$, $t \in T$, $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ und $m \in M$ ist.

(ii) Für $M \in {}_R\mathbf{Mod}_S$ und $N \in {}_T\mathbf{Mod}_S$ ist analog $\mathrm{Hom}_S(M,N) \in {}_T\mathbf{Mod}_R$, wobei $(tfr)(m) = t \cdot f(rm)$.

Satz 14.1
Für $M \in {}_R\mathbf{Mod}_S$ und $N \in {}_S\mathbf{Mod}_T$ ist $M \otimes_S N \in {}_R\mathbf{Mod}_T$, wobei $r(m \otimes n)t = (rm) \otimes (nt)$ für $r \in R$, $m \in M$, $n \in N$ und $t \in T$ gilt.

Beweis:
Für $r \in R$ ist $f_r \colon M \times N \to M \otimes_S N$ mit $(m,n) \mapsto (rm) \otimes n$ S-ausgeglichen. Daher existiert ein $f'_r \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_S N)$ mit $f'_r(m \otimes n) = f_r(m,n) = (rm) \otimes n$ mit $m \in M$ und $n \in N$. Dann gilt für $r, r' \in R$, $m \in M$ und $n \in N$:

$$\begin{aligned} (f'_r \circ f'_{r'})(m \otimes n) &= f'_r((r'm) \otimes n) = (r \cdot r'm) \otimes n = (rr' \cdot m) \otimes n = f'_{rr'}(m \otimes n) \\ (f'_r + f'_{r'})(m \otimes n) &= \cdots = f'_{r+r'}(m \otimes n) \\ f'_1(m \otimes n) &= m \otimes n \end{aligned}$$

Mir $rx := f'_r(x)$ für $r \in R$ und $x \in M \otimes_R N$ ist dann $M \otimes_S N \in {}_R\mathbf{Mod}$, denn für $r, r' \in R$ sowie $x, y \in M \otimes_S N$ gilt:

$$\begin{aligned} r(r'x) &= f_r(f'_{r'}(x)) = f'_{rr'}(x) = (rr')x \\ r(x+y) &= \cdots = rx + ry \\ 1x &= x \end{aligned}$$

Für $r \in R$, $m \in M$ und $n \in N$ ist dabei $r(m \otimes n) = f'_r(m \otimes n) = (rm) \otimes n$. Analog ist $M \otimes_S N \in \mathbf{Mod}_T$ mit $(m \otimes n)t = m \otimes (nt)$ für $m \in M$, $n \in N$ und $t \in T$.

Wegen $(r(m \otimes n))t = ((rm) \otimes n)t = (rm) \otimes (nt) = r(m \otimes (nt)) = r((m \otimes n)t)$ ist $M \otimes_S N \in {}_R\mathbf{Mod}_T$. ∎

Satz 14.2
Für $L \in \mathbf{Mod}_R$, $M \in {}_R\mathbf{Mod}_S$ und $N \in {}_S\mathbf{Mod}$ existiert genau ein $\mathbb{Z}$-Isomorphismus $f\colon (L \otimes_R M) \otimes_S N \to L \otimes_R (M \otimes_S N)$ mit $f((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$.

Beweis:
Für $z \in N$ ist $\beta_z\colon L \times M \to L \otimes_R (M \otimes_S N)$ mit $(x, y) \mapsto x \otimes (y \otimes z)$ R-ausgeglichen. Daher existiert ein $\beta'_z \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L \otimes_R M, L \otimes_R (M \otimes_S N))$ mit $\beta'_z(x \otimes y) = \beta_z(x, y) = x \otimes (y \otimes z)$ für $x \in L$ und $y \in M$. Man zeigt leicht: $\beta'_{z+z'} = \beta'_z + \beta'_{z'}$ und $\beta'_{sz}(u) = \beta'_z(us)$ für $z, z' \in N$, $s \in S$ und $u \in L \otimes_R M$. Daher ist $\gamma\colon (L \otimes_R M) \times N \to L \otimes_R (M \otimes_S N)$ mit $(u, z) \mapsto \beta'_z(u)$ S-ausgeglichen. Es existieren also ein $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(((L \otimes_R M) \otimes_S N), L \otimes_R (M \otimes_S N))$ mit $f(u \otimes z) = \gamma(u, z) = \beta'_z(u)$ für $u \in L \otimes_R M$ und $z \in N$. Insbesondere: $f((x \otimes y) \otimes z) = \beta'_z(x \otimes y) = x \otimes (y \otimes z)$. Analog existiert ein $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L \otimes_R (M \otimes_S N), (L \otimes_R M) \otimes_S N)$ mit $g(x \otimes (y \otimes z)) = (x \otimes y) \otimes z$. Man zeigt leicht, $g \circ f = \mathrm{id}$ und $f \circ g = \mathrm{id}$. Die Eindeutigkeit von f ist klar. ∎

Bemerkung 14.3

(i) Die Abbildung f heißt **kanonischer Isomorphismus** zwischen $(L \otimes_R M) \otimes_S N$ und $L \otimes_R (M \otimes_S N)$. Man identifiziert beide $\mathbb{Z}$-Moduln durch f.

(ii) Sind Q und T weitere Ringe, $L \in {}_Q\mathbf{Mod}_R$ und $N \in {}_S\mathbf{Mod}_T$, so ist f ein Isomorphismus in ${}_Q\mathbf{Mod}_T$.

(iii) Analog sind viele der Isomorphismen in Kapitel 13 Isomorphismen von Bimoduln, wenn die beteiligten Moduln Bimoduln sind.

Satz 14.3 (Frobenius-Nakayama-Relation)
Für $L \in \mathbf{Mod}_R$, $M \in {}_R\mathbf{Mod}_S$ und $N \in \mathbf{Mod}_S$ gilt:

$$\mathrm{Hom}_S(L \otimes_R M, N) \simeq_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(L, \mathrm{Hom}_S(M, N))$$

Beweis:
Nach der Bemerkung 14.2 (ii) ist $\mathrm{Hom}_S(M, N) \in \mathbf{Mod}_R$ mit $(fr)(m) := f(rm)$. Für $\alpha \in \mathrm{Hom}_S(L \otimes_R M, N)$ und $x \in L$ ist $\alpha_x\colon M \to N$ mit $y \mapsto \alpha(x \otimes y)$ eine S-lineare

Abbildung, d. h. $\alpha_x \in \mathrm{Hom}_S(M, N)$. Für $x, x' \in L$ und $r \in R$ gilt, $\alpha_{x+x'} = \alpha_x + \alpha_{x'}$ sowie $\alpha_{xr} = \alpha_x r$. Denn: $(\alpha_x r)(y) = \alpha_x(ry) = \alpha(x \otimes ry) = \alpha(xr \otimes y = \alpha_{xr}(y))$. Daher ist die Abbildung $\beta_\alpha \colon L \to \mathrm{Hom}_S(M, N)$ mit $x \mapsto \alpha_x$ eine R-lineare Abbildung. Wir erhalten so eine Abbildung $\beta \colon \mathrm{Hom}_S(L \otimes_R M, N) \to \mathrm{Hom}_R(L, \mathrm{Hom}_S(M, N))$ mit $\alpha \mapsto \beta_\alpha$. Man zeigt leicht, dass β eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung ist.

Für $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(L, \mathrm{Hom}_S(M, N))$ ist umgekehrt $\omega_\varphi \colon L \times M \to N$ mit $(x, y) \mapsto (\varphi(x)(y))$ R-ausgeglichen, induziert also ein $\omega'_\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L \otimes_R M, N)$ mit $\omega'_\varphi(x \otimes y) = \omega_\varphi(x, y) = (\varphi(x)(y))$. Man zeigt leicht, $\omega'_\varphi \in \mathrm{Hom}_S(L \otimes_R M, N)$. Wir erhalten so eine Abbildung $\omega \colon \mathrm{Hom}_R(L, \mathrm{Hom}_S(M, N)) \to \mathrm{Hom}_S(L \otimes_R M, N)$ mit $\varphi \mapsto \omega'_\varphi$. Man zeigt leicht: ω ist $\mathbb{Z}$-linear, $\beta \circ \omega = \mathrm{id}$ und $\omega \circ \beta = \mathrm{id}$. ■

Bemerkung 14.4

(i) Der oben definierte $\mathbb{Z}$-Isomorphismus heißt **kanonisch**.

(ii) Analog gilt für $L \in {}_R\mathbf{Mod}_S$, $M \in {}_S\mathbf{Mod}$ und $N \in {}_R\mathbf{Mod}$:

$$\mathrm{Hom}_R(L \otimes_S M, N) \simeq_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_R(L, N))$$

Der Satz ist die ringtheoretische Version der kanonischen Bijektion:

$$\mathrm{Abb}(L \times M, N) \to \mathrm{Abb}(L, \mathrm{Abb}(M, N))$$

Diese schreibt man besser in der Form $N^{L \times M} \to (N^M)^L$.

Definition 14.2 (Additiver Funktor)
Ein Funktor $\Phi \colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ mit $\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g)$ für alle $M, N \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ heißt **additiv**.

Bemerkung 14.5
$\Phi(0_{M,N}) = 0_{\Phi(M),\Phi(N)}$ für die Nullabbildung $0_{M,N} \colon M \to N$.

Satz 14.4
Sei $\Phi \colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ ein additiver Funktor. Für den Nullmodul $0 \in {}_R\mathbf{Mod}$ ist dann $\Phi 0$ der Nullmodul in ${}_S\mathbf{Mod}$.

Beweis:
Für die Nullabbildung $0_{0,0} \in \mathrm{Hom}_R(0, 0)$ gilt offenbar $0_{0,0} = \mathrm{id}_0$. Nach der Bemerkung 14.5 ist also $0_{\Phi 0, \Phi 0} = \Phi(0_{0,0}) = \Phi(\mathrm{id}_0) = \mathrm{id}_{\Phi 0}$. Daher ist $\Phi 0 = 0$. ■

Beispiel 14.2

(i) Für $X \in {}_R\mathbf{Mod}_S$ haben wir additive Funktoren $\mathrm{Hom}_R(X, ?) \colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ und $X \otimes_S ? \colon {}_S\mathbf{Mod} \to {}_R\mathbf{Mod}$.

(ii) Für additive Funktoren ${}_R\mathbf{Mod} \xrightarrow{\Phi} {}_S\mathbf{Mod} \xrightarrow{\Psi} {}_T\mathbf{Mod}$ ist auch $\Psi \circ \Phi$ additiv.

Definition 14.3 (Morita-äquivalent)
R und S heißen **Morita-äquivalent**, falls additive Funktoren ${}_R\mathbf{Mod} \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} {}_S\mathbf{Mod}$ mit $\Psi \circ \Phi \sim \mathrm{id}_{{}_R\mathbf{Mod}}$ und $\Phi \circ \Psi \sim \mathrm{id}_{{}_S\mathbf{Mod}}$ existieren. Man schreibt, $R \approx S$.

Satz 14.5
Die Relation $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation.

BEWEIS:
Der Beweis ist Routine. ∎

Beispiel 14.3
$R \cong S \Rightarrow R \approx S$.

Bemerkung 14.6
$R \approx S \Rightarrow R^o \approx S^o$

Satz 14.6
Sei $R \approx S$ vermöge additiver Funktoren ${}_R\mathbf{Mod} \rightleftarrows^{\Phi}_{\Psi} {}_S\mathbf{Mod}$. Für jede Familie $(M_i)_{i\in I}$ in ${}_R\mathbf{Mod}$ ist dann $\Phi(\prod M_i) \simeq_S \prod \Phi(M_i)$ und $\Phi(\coprod M_i) \simeq_S \coprod \Phi(M_i)$.

BEWEIS:
Seien $M := \prod M_i$ und $N := \prod \Phi M_i$ mit Projektoren f_j bzw. g_j für $j \in I$ und $\varphi\colon \Psi \circ \Phi \Rightarrow \mathrm{Id}_{{}_R\mathbf{Mod}}$ eine natürliche Äquivalenz. Für $j \in I$ ist $f_j \in \mathrm{Hom}_R(M, M_j)$, also $\Phi f_j \in \mathrm{Hom}_S(\Phi M, \Phi M_j)$. Daher ist $f\colon \Phi(M) \to N$ mit $x \mapsto ((\Phi f_j)(x))_{j\in I}$ S-linear.

Beweis ergänzen

Satz 14.7
$M \in {}_R\mathbf{Mod}$ ist genau dann endlich erzeugt, wenn zu jeder Familie $(M_i)_{I\in I}$ in ${}_R\mathbf{Mod}$ und jedem R-Epimorphismus $f\colon \coprod_{i\in I} M_i \to M$ eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ und ein R-Epimorphismus $g\colon \coprod_{j\in J} M_j \to M$ existiert.

BEWEIS:
„$\Rightarrow$" Sei $M = Rm_1 + \cdots + Rm_n$, $(M_i)_{i\in I}$, f wie oben und $q_j\colon M_j \to \coprod M_i$ die entsprechenden Injektoren mit $j \in I$. Für $k = 1, \ldots, n$ existiert ein $x_k = (x_{k_i})_{i\in I} \in \coprod M_i$ mit $m_k = f(x_k)$. Dabei ist $J_k := \left\{ j \in I \;\middle|\; x_{k_j} \neq 0 \right\}$ endlich. Daher: $J := \bigcup_{k=1}^n J_k \subseteq I$ endlich. Für $k = 1, \ldots, n$ ist $x_k = \sum_{j\in J} q_j(x_{k_j})$, also $m_k = f(x_k) = \sum_{j\in J}(f \circ q_j)(x_{k_j}) \in \sum_{j\in J} \mathrm{Bld}(f \circ q_j)$. Daher ist $M = \sum_{j\in J} \mathrm{Bld}(f \circ q_j)$ und $g\colon \coprod M_j \to M$ mit $(y_j)_{j\in J} \mapsto \sum (f \circ q_j)(y_j)$ ist ein R-Epimorphismus.

„$\Leftarrow$" Da M zu einem Faktormodul eines freien R-Moduls isomorph ist, existiert eine Menge I und ein R-Epimorphismus $f\colon \coprod_{i\in I} R \to M$. Nach der Voraussetzung existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ und ein R-Epimorphismus $g\colon \coprod_{j\in J} R \to M$. Mit $\coprod_{j\in J} R$ ist dann auch M endlich erzeugt. ∎

Definition 14.4 ((Pro)Generator)
$M \in {}_R\mathbf{Mod}$ heißt **R-Generator**, falls zu jedem $N \in {}_R\mathbf{Mod}$ eine Menge I existiert, so dass N zu einem Faktormodul von $\coprod_{i\in I} M$ isomorph ist. Ein R-Modul, der endlich erzeugt, projektiv und ein Generator ist, heißt **R-Progenerator**.

Beispiel 14.4
(i) ${}_R R$ ist ein R-Progenerator, wie auch $({}_R R)^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Ist R semiperfekt und sind $P_1, \dots, P_n$ Repräsentanten für die Isomorphieklassen unzerlegbarer projektiver R-Moduln, so ist $P_1^{a_1} \times \dots \times P_n^{a_n}$ für $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ ein R-Progenerator.

Satz 14.8
Sei $R \approx S$ vermöge additiver Funktoren ${}_R\mathbf{Mod} \rightleftarrows^{\Phi}_{\Psi} {}_S\mathbf{Mod}$. Für $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ gilt dann:

(i) $M \in {}_R\mathbf{mod} \Leftrightarrow \Phi M \in {}_S\mathbf{mod}$.

(ii) M projektiv (injektiv) $\Leftrightarrow \Phi M$ projektiv (injektiv).

(iii) M Generator $\Leftrightarrow \Phi M$ Generator.

(iv) M Progenerator $\Leftrightarrow \Phi M$ Progenerator.

BEWEIS:
„$\Rightarrow$" (i) Sei $M \in {}_R\mathbf{mod}$, $(N_i)_{i\in I}$ eine Familie in ${}_S\mathbf{Mod}$ und $f \in \mathrm{Hom}_S(\coprod_{i\in I} N_i, \Phi M)$ surjektiv. Dann ist $\Psi f\colon \underbrace{\Psi(\coprod N_i)}_{\simeq \coprod \Psi N_i} \to \underbrace{\Psi\Phi M}_{\simeq M}$ epi.

Nach Satz 14.7 existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ und ein R-Epimorphismus $g\colon \coprod_{j\in J} \Psi N_j \to M$. Dann ist $\Phi g\colon \Phi(\coprod_{j\in J} \Psi N_j) \to \Phi M$ ein S-Epimorphismus und $\Phi(\coprod_{j\in J} \Psi N_j) \simeq \coprod(\Phi\Psi N_j) \simeq N_j$. Nach dem Satz 14.7 ist $\Phi M \in {}_S\mathbf{mod}$.

(ii) Sei M projektiv, $L, N \in {}_S\mathbf{Mod}$ und $f \in \mathrm{Hom}_S(\Phi M, N)$, $g \in \mathrm{Hom}_S(L, N)$ surjektiv. Da $\Psi\Phi M \simeq M$ projektiv ist, existiert ein $h \in \mathrm{Hom}_R(\Psi\Phi M, \Psi L)$ mit $(\Psi g) \circ h = \Psi f$. Dann: $k := \Psi^{-1}_{\Phi M, L}(h) \in \mathrm{Hom}_S(\Phi M, L)$ und $\Psi f = (\Psi g) \circ (\Psi k) = \Psi(g \circ k) \Rightarrow f = g \circ k$. Der Nachweis für Injektivität geht analog.

(iii) Sei M ein Generator und $N \in {}_S\mathbf{Mod}$ beliebig, d. h. $\Psi N \in {}_R\mathbf{Mod}$. Dann existiert ein Menge I und ein R-Epimorphismus $f\colon \coprod_{i\in I} M \to \Psi N$. Daher ist $\Phi f\colon \underbrace{\Phi(\coprod_{i\in I} M)}_{\simeq \coprod(\Phi M)} \to \underbrace{\Phi\Psi N}_{\simeq N}$ ein S-Epimorphismus.

(iv) Dies folgt aus den obigen Punkten.

„$\Leftarrow$" (i) Sei $\Phi M \in {}_S\mathbf{mod}$. Wegen „$\Rightarrow$" ist $\Psi\Phi M \simeq M \in {}_R\mathbf{mod}$.

(ii)–(iv) gehen analog. ■

Satz 14.9
Sei $R \approx S$ vermöge additiver Funktoren ${}_R\mathbf{Mod} \rightleftarrows^{\Phi}_{\Psi} {}_S\mathbf{Mod}$. Dann ist $P := \Phi R$ ein Progenerator mit $\mathrm{End}_S(P) \cong R^o$.

BEWEIS:
Da ${}_R R$ ein Progenerator ist, ist auch $P := \Phi R$ ein Progenerator. Ferner ist $\mathrm{End}_R(R) \to \mathrm{End}_S(\Phi R)$ mit $f \mapsto \Phi f$ ein Ringisomorphismus. Ferner: $\mathrm{End}_R(R) \cong R^o$. ■

Bemerkung 14.7
Wir werden zeigen, dass umgekehrt $R \approx S$, falls ein S-Progenerator P existiert mit $R^o \cong \mathrm{End}_S(P)$.

15. Moritatheorie

Definition 15.1 (Morita-Kontext)
Ein **Morita-Kontext** ist ein Sixtupel $(R, S, P, Q, \sigma, \tau)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) R, S Ringe, $P \in {}_S\mathbf{Mod}_R$, $Q \in {}_R\mathbf{Mod}_S$, $\sigma \in \mathrm{Hom}_{S,S}(P \otimes_R Q, S)$, $\tau \in \mathrm{Hom}_{R,R}(Q \otimes_S P, R)$.

(ii) $\sigma(x \otimes y)x' = x\tau(y \otimes x')$ und $y\sigma(x \otimes y') = \tau(y \otimes x)y'$ für $x, x' \in P$ und $y, y' \in Q$.

Beispiel 15.1
Seien S ein Ring und $P \in {}_S\mathbf{Mod}$. Setze $R := \mathrm{End}_S(P)^o$ und $Q := \mathrm{Hom}_S(P, S)$. Dann: $P \in {}_S\mathbf{Mod}_R$ sowie $Q \in {}_R\mathbf{Mod}_S$. Offenbar ist $P \times Q \to S$ mit $(p, q) \mapsto q(p)$ R-ausgeglichen, induziert also einen $\mathbb{Z}$-Homomorphismus $\sigma \colon P \otimes_R Q \to S$ mit $\sigma(x \otimes y) = y(x)$ für $x \in P$ und $y \in Q$. Offensichtlich ist σ eine S-S-lineare Abbildung. Andererseits ist für $x \in P$ und $y \in Q$ die Abbildung $\tau_{y,x} \colon P \to P$ mit $p \mapsto y(p) \cdot x$ eine S-lineare Abbildung. Wir erhalten so eine Abbildung $Q \times P \to R$ mit $(y, x) \mapsto \tau_{y,x}$. Diese ist S-ausgeglichen. Daher existiert ein $\mathbb{Z}$-Homomorphismus $\tau \colon Q \otimes_S P \to R$ mit $\tau(y \otimes x) = \tau_{y,x}$. Diese Abbildung ist R-R-linear und ein Morita-Kontext.

Bemerkung 15.1
Wir sind hauptsächlich an der Situation aus dem Beispiel interessiert. Aber die Einführung eines Morita-Kontexts macht alles symmetrisch.

Satz 15.1
Im Beispiel 15.1 gilt:

(i) Ist P endlich erzeugt und projektiv, dann ist τ surjektiv.

(ii) Ist P ein Generator, dann ist σ surjektiv.

BEWEIS:

(i) Sei $P = Sp_1 + \cdots + Sp_n$ projektiv. Nach dem Satz 9.4 existieren $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{Hom}_S(P, S) = Q$ mit $p = \sum_{i=1}^n f_i(p) \cdot p_i = \sum_{i=1}^n \tau_{f_i,p_i}(p)$ für $p \in P$. Folglich ist $1_R = \mathrm{id}_P = \sum_{i=1}^n \tau_{f_i,p_i} = \sum_{i=1}^n \tau(f_i \otimes p_i) \in \mathrm{Bld}(\tau)$. Daher ist τ surjektiv.

(ii) Sei P ein Generator. Dann existiert ein S-Epimorphismus $f \colon \coprod_{i \in I} P \to S$ und eine Menge I. Sei $p = (p_i)_{i \in I} \in \coprod P$ mit $f(p) = 1$ und $J := \{\, i \in I \mid p_i \neq 0 \,\}$. Wir bezeichnen mit $g_j \in \mathrm{Hom}_S(P, \coprod P)$ die entsprechenden Injektoren mit $j \in I$. Dann ist $p = \sum_{i \in J} g_i(p_i)$ und $1_S = f(p) = \sum_{i \in J} f(g_i(p_i)) = \sigma(\sum_{i \in J} p_i \otimes (f \circ g_i)) \in \mathrm{Bld}(\sigma)$. Daher ist σ surjektiv. ■

Satz 15.2
Sei $(R, S, P, Q, \sigma, \tau)$ ein Morita-Kontext. Ist σ surjektiv, so gilt:

(i) σ ist bijektiv.

(ii) P und Q sind endlich erzeugt und projektiv über R.

(iii) P und Q sind S-Generatoren.

(iv) $Q \to \mathrm{Hom}_R(P, R)$ mit $q \mapsto \tau(q \otimes ?)$ ist ein R-S-Isomorphismus. Weiterhin ist $P \to \mathrm{Hom}_R(Q, R)$ mit $p \mapsto \tau(? \otimes p)$ ist ein S-R-Isomorphismus.

(v) Die Abbildung $S \to \mathrm{End}_R(P)$, die jedem $s \in S$ die Multiplikation mit s zuordnet, ist ein Ringisomorphismus. Die Abbildung $S^o \to \mathrm{End}_R(Q)$, die jedem $s \in S$ die Multiplikation mit s zuordnet, ist ein Ringisomorphismus.

Beweis:
Seien $p_1, \ldots, p_k \in P$ und $q_1, \ldots, q_k \in Q$ mit $\sigma(\sum_{i=1}^k p_i \otimes q_i) = 1_S$.

(i) Sind $x_1, \ldots, x_l \in P$ und $y_1, \ldots, y_l \in Q$ mit $\sigma(\sum_{j=1}^l x_j \otimes y_j) = 0$, so ist:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{l} x_j \otimes y_j &= \sum_{i,j} x_j \otimes y_j \sigma(p_i \otimes q_i) = \sum_{i,j} x_j \otimes \underbrace{\tau(y_j \otimes p_i)}_{\in R} q_i \\ &= \sum_{i,j} x_j \tau(y_j \otimes p_i) \otimes q_i = \sum_{i,j} \sigma(x_j \otimes y_j) p_i \otimes q_i = 0\end{aligned}$$

Daher ist σ injektiv.

(ii) Die Abbildungen $f\colon R^k \to P$ mit $(r_1, \ldots, r_k) \mapsto \sum_{i=1}^k p_i r_i$ und $g\colon P \to R^k$ mit $p \mapsto (\tau(q_i \otimes p))_{i=1}^k$ sind R-linear mit $f(g(p)) = \sum_{i=1}^k p_i \tau(q_i \otimes p) = \sum_{i=1}^k \sigma(p_i \otimes q_i)p = 1_S p = p$ für $p \in P$. Daher ist $0 \to \ker(f) \hookrightarrow R^k \xrightarrow{f} P \to 0$ eine zerfallende exakte Folge. Also ist P endlich erzeugt und projektiv. Analog ist auch Q endlich erzeugt und projektiv.

(iii) Die Abbildung $h\colon P^k \to S$ mit $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto \sigma(\sum_{i=1}^k x_i \otimes q_i)$ ist S-linear. Wegen $h(p_1, \ldots, p_k) = \sigma(\sum_{i=1}^k p_i \otimes q_i) = 1_S$ ist h surjektiv. Daher ist P ein S-Generator. Analog ist auch Q ein S-Generator.

(iv) Die Abbildung $Q \to \mathrm{Hom}_R(P, R)$ mit $q \mapsto \tau(q \otimes ?)$ ist wohldefiniert und R-S-linear. Ist $q \in Q$ mit $\tau(q \otimes p) = 0$ für alle $p \in P$, so ist

$$q = \sum_{i=1}^{k} q\sigma(p_i \otimes q_i) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\tau(q \otimes p_i)}_{=0} q_i = 0$$

Andererseits gilt für $\lambda \in \mathrm{Hom}_R(P,R)$ und $p \in P$:

$$\begin{aligned}\lambda(p) &= \lambda\left(\sum_{i=1}^{k}\sigma(p_i \otimes q_i)p\right) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{k} p_i \underbrace{\tau(q_i \otimes p)}_{\in R}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k}\lambda(p_i)\tau(q_i \otimes p) = \sum_{i=1}^{k}\tau(\lambda(p_i)q_i \otimes p)\end{aligned}$$

Also ist die angegebene Abbildung bijektiv. Die zweite Aussage erhält man analog.

(v) Die angegebene Abbildung ist wohldefiniert und ein Ringisomorphismus. Ist $s \in S$ mit $sP = 0$, so ist

$$s = s\sigma\left(\sum_{i=1}^{k} p_i \otimes q_i\right) = s\sum_{i=1}^{k}\sigma(p_i \otimes q_i) = \sum_{i=1}^{k}\sigma(sp_i \otimes q_i) = 0$$

Für $\varphi \in \mathrm{End}_R(P)$ und $p \in P$ ist andererseits

$$\begin{aligned}\varphi(p) &= \sum_{i=1}^{k}\varphi(\sigma(p_i \otimes q_i)p) = \sum_{i=1}^{k}\varphi(p_i \underbrace{\tau(q_i \otimes p)}_{\in R}) \\ &= \sum_{i=1}^{k}\varphi(p_i)\tau(q_i \otimes p) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sigma(\varphi(p_i) \otimes q_i)}_{\in S}\, p\end{aligned}$$

Folglich ist φ die Multiplikation mit $\sum_{i=1}^{k}\sigma(\varphi(p_i) \otimes q_i) \in S$, d. h. die angegebene Abbildung ist bijektiv. Die andere Aussage funktioniert analog. ∎

Satz 15.3
Für Ringe R und S sind äquivalent:

(i) $R \approx S$

(ii) Es existieren additive Funktoren ${}_R\mathbf{Mod} \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} {}_S\mathbf{Mod}$ mit $\Psi \circ \Phi \sim \mathrm{Id}_{{}_R\mathbf{Mod}}$ und $\Phi \circ \Psi \sim \mathrm{Id}_{{}_S\mathbf{Mod}}$.

(iii) Es existiert ein S-Progenerator P mit $R^o \cong \mathrm{End}_S(P)$.

(iv) Es existiert ein Morita-Kontext $(R, S, P, Q, \sigma, \tau)$ mit surjektiven σ und τ.

(v) Es existieren $P \in {}_S\mathbf{Mod}_R$ und $Q \in {}_R\mathbf{Mod}_S$ mit $P \otimes_R Q \simeq S$ in ${}_S\mathbf{Mod}_S$ und $Q \otimes_S P \simeq R$ in ${}_R\mathbf{Mod}_R$.

Beweis:
(i)⇒(ii) Definition 14.3

(ii)⇒(iii) Satz 14.9

(iii)$\Rightarrow$(iv) Satz 15.1

(iV)$\Rightarrow$(v) Satz 15.2

(v)$\Rightarrow$(ii) Seien P und Q wie in (v) und $\alpha\colon P \otimes_R Q \to S$ sowie $\beta\colon Q \otimes_S P \to R$ die entsprechenden Bimodul-Isomorphismen. Dann sind $\Phi := P \otimes_R ?\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ und $\Psi := Q \otimes_S ?\colon {}_S\mathbf{Mod} \to {}_R\mathbf{Mod}$ additive Funktoren. Für $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ haben wir einen RIsomorphismus $\varphi_M\colon \Psi\Phi M = Q \otimes_S P \otimes_R M \xrightarrow{\alpha\otimes \mathrm{id}_M} R \otimes_R M \xrightarrow{\mu_M} M$. Dann ist $\varphi := (\varphi_M)_{M\in {}_R\mathbf{Mod}}\colon \Psi \circ \Phi \Rightarrow \mathrm{Id}_{{}_R\mathbf{Mod}}$ eine natürliche Äquivalenz, denn man zeigt leicht, dass für $M, M' \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $f \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
Q \otimes_S P \otimes_R M \arrow[r, "\varphi_M"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Q \otimes \mathrm{id}_P \otimes f"] & M \arrow[d, "f"] \\
Q \otimes_S P \otimes_R M' \arrow[r, "\varphi_{M'}"] & M'
\end{tikzcd}$$

Der Rest geht analog. ■

Bemerkung 15.2

(i) $R \approx S \Rightarrow R^o \approx S^o$

(ii) Man kann zeigen, dass in der obigen Situation stets $\Phi \sim P \otimes_R ?$ ist.

Beispiel 15.2

(a) Es ist R^n ein R-Progenerator mit $\mathrm{End}_R(R^n) \simeq \mathrm{End}_R(R)^{n\times n} \cong (R^o)^{n\times n} \cong (R^{n\times n})^o$ für jeden Ring R und $n \in \mathbb{N}$. Daher gilt: $R \approx R^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(b) Für jedes Idempotent $e \in R$ mit $ReR = R$ ist $R \approx eRe$, denn $(R, eRe, eR, Re, \sigma, \tau)$ ist ein Morita-Kontext mit surjektiven $\sigma\colon eR \otimes_R Re \to eRe$ mit $x \otimes y \mapsto xy$ und $\tau\colon Re \otimes_{eRe} eR \to R$ mit $y \otimes x \mapsto yx$.

Bemerkung 15.3

Für $X, Y \in \mathbf{Set}$ mit $Y \subseteq X$ sei $\mathrm{in}_X^Y\colon Y \to X$ mit $y \mapsto x$ die Inklusionsabbildung.

Satz 15.4

Seien R und S Ringe mit $R \simeq S$ vermöge additiver Funktoren ${}_R\mathbf{Mod} \overset{\Phi}{\underset{\Psi}{\rightleftarrows}} {}_S\mathbf{Mod}$. Für $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ ist dann

$$\Lambda\colon \{\text{Untermoduln von } M\} \to \{\text{Untermoduln von } \Phi M\}, \qquad L \mapsto \mathrm{Bld}(\Phi(\mathrm{in}_L^M))$$

bijektiv. Daher gilt:

(i) $L \subseteq L' \Leftrightarrow \Lambda L \subseteq \Lambda L'$

(ii) $\Lambda(L + L') = \Lambda L + \Lambda L'$ und $\Lambda(L \cap L') = \Lambda L \cap \Lambda L'$

Beweis:
Sei $\varphi\colon \Psi \circ \Phi \Rightarrow \mathrm{Id}_{{}_R\mathbf{Mod}}$ eine natürliche Äquivalenz. Betrachte

$$\begin{array}{ll}
\{\text{Untermoduln von } M\} & \\
\quad\downarrow \Lambda & L \mapsto \mathrm{Bld}(\Phi(\mathrm{in}_L^M)) \\
\{\text{Untermoduln von } \Phi(M)\} & \\
\quad\downarrow \Delta & N \mapsto \mathrm{Bld}(\Psi(\mathrm{in}_N^{\Phi(M)})) \\
\{\text{Untermoduln von } \Psi(\Phi(M))\} & \\
\quad\downarrow \Gamma & K \mapsto \varphi_M(K) \\
\{\text{Untermoduln von } M\} &
\end{array}$$

Ist $L \subseteq M$ ein Untermodul, so ist $\Phi(\mathrm{in}_L^M)\colon \Phi L \to \Phi M$ injektiv (leicht, denn injektiv = mono) mit dem Bild ΛL. Daher existiert ein S-Isomorphismus $f\colon \Phi L \to \Lambda L$ mit $\Phi(\mathrm{in}_L^M)\colon \mathrm{in}_{\Lambda L}^{\Phi L} \circ f$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
\Gamma(\Delta(\Lambda L)) &= \mathrm{Bld}(\varphi_M \circ \Psi(\mathrm{in}_{\Lambda L}^{\Phi M})) = \mathrm{Bld}(\varphi_M \circ \Psi(\mathrm{in}_{\Lambda L}^{\Phi M}) \circ \Psi f) \\
&= \mathrm{Bld}(\varphi_M \circ \Psi(\Phi(\mathrm{in}_L^M))) = \mathrm{Bld}(\mathrm{in}_L^M \circ \varphi_L) = \mathrm{Bld}(\mathrm{in}_L^M) \\
&= L
\end{aligned}$$

Daher ist $\Gamma \circ \Delta \circ \Lambda = \mathrm{id}$. Insbesondere ist Λ injektiv und $\Gamma \circ \Delta$ ist surjektiv. Da Γ bijektiv ist, ist auch Δ surjektiv. Analog ist Δ auch injektiv, d. h. bijektiv. Daher ist Λ bijektiv.

(i) Seien $L \subseteq L' \subseteq M$ Untermoduln. Dann: $\mathrm{in}_L^M = \mathrm{in}_{L'}^M \circ \mathrm{in}_{L'}^L$, also $\Phi(\mathrm{in}_L^M) = \Phi(\mathrm{in}_{L'}^M) \circ \Phi(\mathrm{in}_{L'}^L)$. Daher: $\Lambda L = \mathrm{Bld}(\Phi(\mathrm{in}_L^M)) \subseteq \mathrm{Bld}(\Phi(\mathrm{in}_{L'}^M)) = \Lambda L'$. Analog folgt aus $\Lambda L \subseteq \Lambda L' \subseteq M$: $\Delta(\Lambda L) \subseteq \Delta(\Lambda L')$, also $L = \Gamma(\Delta(\Lambda L)) \subseteq \Gamma(\Delta(\Lambda L')) = L'$.

(ii) Folgt aus (i). ∎

Bemerkung 15.4
Seien R und S zwei Ringe mit $R \approx S$ vermöge additiver Funktoren ${}_R\mathbf{Mod} \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} {}_S\mathbf{Mod}$. Für $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ gilt dann nach dem Satz 15.4:

(i) M einfach (halbeinfach) $\Leftrightarrow$ ΦM einfach (halbeinfach).

(ii) M unzerlegbar $\Leftrightarrow$ ΦM unzerlegbar.

Nummerierung anpassen

(iii) M artinsch (noethersch) $\Leftrightarrow$ ΦM artinsch (noethersch).

Damit ergibt sich sofort:

(i) R halbeinfach $\Leftrightarrow$ S halbeinfach.

(ii) R artinsch (noethersch) $\Leftrightarrow$ S artinsch (noethersch).

Satz 15.5
Seien R und S zwei Ringe, die morita-äquivalent sind. Dann ist das Zentrum des Rings R isomorph zum Zentrum des Rings S.

BEWEIS:
Sei $(R, S, P, Q, \sigma, \tau)$ ein Morita-Kontext mit surjektivem σ und τ. Für $r \in Z(R)$ ist $\rho_r\colon P \to P$ mit $p \mapsto pr$ eine R-lineare Abbildung mit $\varphi(\rho_r(p)) = \varphi(pr) = \varphi(p)r = \rho_r(\varphi(p))$ für $\varphi \in \mathrm{End}_R(P)$ und $p \in P$. Folglich liegt ρ_r in $Z(\mathrm{End}_R(P))$. Nach dem Satz 15.2 existiert genau $\zeta(r) \in Z(S)$ mit $\zeta(r)p = \rho_r(p) = pr$ für $p \in P$. Analog existiert zu jedem $s \in Z(S)$ genau ein $\eta(s) \in Z(R)$ mit $p\eta(s) = sp$ für $p \in P$. Für $r \in Z(R)$ und $p \in P$ ist dann $pr = \zeta(r)p = p\eta(\zeta(r))$, insgesamt ist $p(r - \eta(\zeta(r))) = 0$. Da P ein R-Progrenerator ist, folgt, dass $r - \eta(\zeta(r)) = 0$, d. h. $\eta(\zeta(r)) = r$. Analog ist $\zeta \circ \eta = \mathrm{id}_{Z(S)}$. Daher: $\zeta\colon Z(R) \to Z(S)$ und $\eta\colon Z(S) \to Z(R)$ bijektiv mit $\eta = \zeta^{-1}$. Es ist leicht zu sehen, dass ζ ein Ringhomomorphismus ist. ■

Bemerkung 15.5
Für kommutative Ringe R, S gilt also nach Satz 15.5: $R \approx S \Leftrightarrow R \cong S$. Gleiches gilt, wenn R und S lokale Ringe sind. Denn ist P ein S-Progenerator mit $R^o \cong \mathrm{End}_S(P)$, so ist P frei, d. h. $P \simeq S^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und damit $R^o \cong \mathrm{End}_S(S^n) \cong \mathrm{End}_S(S)^{n\times n} \cong (S^o)^{n\times n} \cong (S^{n\times n})^o$, d. h. $R \cong S^{n\times n}$. Da R lokal ist, folgt, $n = 1$. Sonst ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Satz 15.6
Seien R und S Ringe mit $R \approx S$ vermöge additiver Funktoren ${}_R\mathbf{Mod} \rightleftarrows^{\Phi}_{\Psi} {}_S\mathbf{Mod}$. Dann ist $\Gamma\colon \{\text{Ideale in } R\} \to \{\text{Ideale in } S\}$ mit $I \mapsto \mathrm{Ann}_S(\Phi(R/I))$ bijektiv. Dabei gilt:

(i) $I \subseteq I' \Leftrightarrow \Gamma I \subseteq \Gamma I'$.

(ii) $\Gamma(I + I') = \Gamma(I) + \Gamma(I')$ und $\Gamma(I \cap I') = \Gamma I \cap \Gamma I'$

BEWEIS:
Für $I \trianglelefteq R$ ist sicher $\Gamma I \trianglelefteq S$. Für $J \trianglelefteq S$ ist analog $\Delta J := \mathrm{Ann}_R(\Psi(S/J)) \trianglelefteq R$. Ferner:

$$f\colon \coprod_{x\in\Psi(S/J)} R/\Delta(J) \to \Psi(S/J) \qquad (r_x + \Delta(J))_{x\in\Psi(S/J)} \mapsto \sum_{x\in\Psi(S/J)} r_x x$$

Die Abbildung ist wohldefiniert und ein R-Epimorphismus.

$$g\colon R/\Delta(J) \to \prod_{x\in\Psi(S/J)} \Psi(S/J) \qquad r + \Delta J \mapsto (rx)_{x\in\Psi(S/J)}$$

Die Abbildung ist wohldefiniert und ein R-Monomorphismus. Die Anwendung von Φ liefert einen S-Epimorphismus

$$\coprod_{x\in\Psi(S/J)} \Phi(R/\Delta(J)) \simeq \Phi(\coprod_{x\in\Psi(S/J)} R/\Delta(J)) \to \Phi\Psi(S/J) \simeq S/J$$

und einen S-Monomorphismus:

$$\Phi({}^{R}/_{\Delta(J)}) \to \Phi(\prod_{x\in\Psi({}^{S}/_{J})} \Psi({}^{S}/_{J})) \simeq \prod_{x\in\Psi({}^{S}/_{J})} \Phi\Psi({}^{S}/_{J}) \simeq \prod_{x\in\Psi({}^{S}/_{J})} {}^{S}/_{J}$$

Daher ist $J = \mathrm{Ann}_S({}^{S}/_{J}) \subseteq \mathrm{Ann}_S(\Phi({}^{R}/_{\Delta(J)})) = \Gamma\Delta(J)$. Analog ist $\Delta(\Gamma I) = I$ für $I \trianglelefteq R$.

(i) Seien $I, I' \trianglelefteq R$ mit $I \subseteq I'$. Dann ist $h\colon {}^{R}/_{I} \to {}^{R}/_{I'}$ mit $r + I \mapsto r + I'$ ein R-Epimorphismus. Daher: $\Phi(h)\colon \Phi({}^{R}/_{I}) \to \Phi({}^{R}/_{I'})$ ein S-Epimorphismus, d. h. $\Gamma I = \mathrm{Ann}_S(\Phi({}^{R}/_{I})) \subseteq \mathrm{Ann}_S(\Phi({}^{R}/_{I'})) = \Gamma I'$.

(ii) folgt aus (i) ■

Bemerkung 15.6
Sei $R \approx S$ wie oben. Dann gilt:

(i) R einfach $\Leftrightarrow$ S einfach.

(ii) $\Gamma(J(R)) = J(S)$. Denn für jeden einfachen S-Modul ist ΨN ein einfacher R-Modul, d. h. $J(R) \cdot \Psi N = 0$. Daher existiert ein R-Epimorphismus $f\colon {}^{R}/_{J(R)} \to \Psi N$. Also ist $\Phi(f)\colon \Phi({}^{R}/_{J(R)}) \to \Phi\Psi N \simeq N$ ein S-Epimorphismus. Folglich ist $\Gamma(J(R)) = \mathrm{Ann}_S(\Phi({}^{R}/_{J(R)})) \subseteq \mathrm{Ann}_S(N)$. Da N beliebig ist, folgt $\Gamma(J(R)) \subseteq J(S)$. Analog ist $\Delta(J(S)) \subseteq J(R)$, also $\Gamma(J(R)) \subseteq J(S) = \Gamma(\Delta(J(S))) \subseteq \Gamma(J(R))$, d. h. $J(R) \subseteq \Delta(J(S))$.

A. Übungsaufgaben

A.1. Übungsblatt 1

Aufgabe 1
Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass man folgendermaßen eine Kategorie $\mathcal{C}$ erhält:

(i) Das einzige Objekt in $\mathcal{C}$ in G.

(ii) Die Morphismen in $\mathcal{C}$ sind die Elemente von G.

(iii) Die Komposition von Morphismen in $\mathcal{C}$ ist die Multiplikation in G.

Die Assoziativität von Morphismen ist assoziativ wegen der Assoziativität der Gruppenelemente. Das neutrale Element der Gruppe ist der Identitätsmorphismus.

Aufgabe 2
Sei $(P, \leq)$ eine geordnete Menge. Zeigen Sie, dass man folgendermaßen eine Kategorie $\mathcal{C}$ erhält:

(i) Die Objekte von $\mathcal{C}$ sind die Elemente von P.

(ii) Für $x, y \in P$ sei $\mathcal{C}(x, y) := \{(x, y)\}$, falls $x \leq y$ ist, und $\mathcal{C}(x, y) := \emptyset$ sonst.

(iii) Für Morphismen $(x, y)(y, z)$ in $\mathcal{C}$ sei $(y, z) \circ (x, y) := (x, z)$.

Da $\leq$ transitiv ist, ist die Komposition von Morphismen wohldefiniert. Sei nun $a \leq b \leq c \leq d$. Dann ist:

$$(c, d) \circ ((b, c) \circ (a, b)) = (c, d) \circ (a, c) = (a, d)$$
$$((c, d) \circ (b, c)) \circ (a, b) = (b, d) \circ (a, b) = (a, d)$$

Da $\leq$ reflexiv ist, hat man $\mathcal{C}(x, x) = \{(x, x)\}$ für alle $x \in P$.

Aufgabe 3
Für jede Kategorie $\mathcal{C}$ definiert man die **entgegengesetzte Kategorie** $\mathcal{C}^o$ folgendermaßen:

(i) Die Objekte von $\mathcal{C}^o$ sind genau die Objekte in $\mathcal{C}$.

(ii) Die Morphismen $A \to B$ in $\mathcal{C}^o$ sind genau die Morphismen $B \to A$ in $\mathcal{C}$.

(iii) Für Morphismen $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, d. h. Morphismen $f\colon B \to A$, $g\colon C \to B$ in $\mathcal{C}$, ist die Komposition gf in $\mathcal{C}^o$ genau der Morphismus $f \circ g\colon C \to A$ in $\mathcal{C}$.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}^o$ tatsächlich eine Kategorie ist.
Die Komposition von Morphismen ist offensichtlich wohldefiniert. Seien $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ und $h\colon C \to D$ Morphismen in $\mathcal{C}^o$. Dann ist $(hg)f$ Morphismus in $\mathcal{C}$. Das entspricht dem Morphismus $h(gf)$ in $\mathcal{C}^o$. Die Identitätsmorphismen in $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^o$ stimmen offenbar überein.

Aufgabe 4
Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Dann bezeichnet man Funktoren $\mathcal{C}^o \to \mathcal{D}$ auch als **kontravariante Funktoren** von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$. (Im Unterschied dazu heißen Funktoren $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ genauer **kovariante Funktoren**.) Ein kontravarianter Funktor $\Phi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ordnet also jedem Objekt $A \in \mathcal{C}$ ein Objekt $\Phi A \in \mathcal{D}$ und jedem Morphismus $f\colon A \to B$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $\Phi f\colon \Phi B \to \Phi A$ zu. Dabei ist $\Phi(g \circ f) = \Phi(f) \circ \Phi(g)$ und $\Phi(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\Phi(A)}$ für alle $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ in $\mathcal{C}$.

Zeigen Sie, dass man einen kontravarianten Funktor $\mathcal{C}(?, X)\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ erhält, wenn man definiert:

(i) $\mathcal{C}(?, X)(A) := \mathcal{C}(A, X)$ für $A, X \in \mathcal{C}$.

(ii) $\mathcal{C}(?, X)(f) := \mathcal{C}(f, X)\colon \mathcal{C}(B, X) \to \mathcal{C}(A, X)$ mit $g \mapsto g \circ f$ für $A, B, C \in \mathcal{C}$ und $f \in \mathcal{C}(A, B)$.

Unter Beachtung, dass X fest ist, sieht man leicht, dass $\mathcal{C}(?, X)$ wohldefiniert ist.

(i) Es ist, $\mathcal{C}(?, X)(g \circ f) = \mathcal{C}(?, X)(f) \circ \mathcal{C}(?, X)(g)$. Seien nun $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ in $\mathcal{C}$. Dann ist $\mathcal{C}(?, X)(g \circ f)\colon \mathcal{C}(C, X) \to \mathcal{C}(A, X)$. Für $h \in \mathcal{C}(C, X)$ gilt dann:
$$\begin{aligned}(\mathcal{C}(?, X)(g \circ f))(h) &= h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \\ &= (\mathcal{C}(?, X)(g))(h) \circ f = \mathcal{C}(?, X)(f)((\mathcal{C}(?, X)(g))(h)) \\ &= (\mathcal{C}(?, X)(f) \circ \mathcal{C}(?, X)(g))(h)\end{aligned}$$

(ii) Es gilt, $\mathcal{C}(?, X)(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathcal{C}(?, X)(A)}$. Offenbar ist $\mathcal{C}(?, X)(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathcal{C}(A, X)}$ für alle $A \in \mathcal{C}$ und aus $f \in \mathcal{C}(A, X)$ folgt, $(\mathcal{C}(?, X)(\mathrm{id}_A))(f) = f \circ \mathrm{id}_A = f$.

Aufgabe 5
Für jeden Körper K und jeden K-Vektorraum V sei $V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)$ der Dualraum von V. Für jede lineare Abbildung $f\colon U \to V$ sei $f^*\colon V^* \to U^*$ mit $g \mapsto g \circ f$ die duale Abbildung zu f. Zeigen Sie, dass man durch $V \mapsto V^*$ und $f \mapsto f^*$ einen kontravarianten Funktor $\Delta\colon {}_K\mathbf{Vec} \to {}_K\mathbf{Vec}$ erhält.

Aufgabe 6

(i) Mit **Ri** bezeichnet man die Kategorie aller Ringe und Ringhomomorphismen. Zeigen Sie, dass die Inklusionsabbildung $i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ mono und epi in **Ri** ist.
Sei R ein Ring und $f, g\colon R \to \mathbb{Z}$ Homomorphismen. Da i injektiv ist, folgt aus $i \circ f = i \circ g$ auch $f = g$.

Seien $f, g\colon \mathbb{Q} \to R$ mit $f(i(z)) = g(i(z))$ für alle $z \in \mathbb{Z}$. Für $a/b \in \mathbb{Q}$ ist dann $f(a/b) = f(a)f(1/b) = f(a)f(b)^{-1} = f(i(a))f(i(b))^{-1} = \cdots = g(a/b)$.

(ii) Beweisen Sie, dass ein Morphismus in **Gr** genau dann mono ist, wenn er injektiv ist.

„$\Leftarrow$" Sei $f\colon G \to H$ in **Gr** injektiv. Für $g, h\colon \tilde{G} \to G$ mit $f(g(x)) = f(h(x))$ folgt $g(x) = h(x)$. Also ist f mono.

„$\Rightarrow$" Sei $f\colon G \to H$ mono. Wir betrachten Homomorphismen $i_{\ker f}, j_{\ker f}\colon \ker f \to G$ mit $i_{\ker f}(x) = x$ und $j_{\ker f}(x) = 1$ für alle $x \in \ker f$. Es gilt, $f \circ i_{\ker f} = f \circ j_{\ker f}$. Da f mono ist, gilt, $i_{\ker f} = j_{\ker f}$, d. h. $\ker f = \{1\}$.

(iii) Beweisen Sie, dass ein Morphismus $f\colon G \to H$ in **Gr** genau dann epi ist, wenn er surjektiv ist. (*Hinweis*: Sei $K := f(G)$ und $S := \mathrm{Sym}(H/K \cup \{\infty\})$; dabei sei $\infty \notin H/K$. Ferner sei $\sigma \in S$ die Permutation, die K und ∞ vertauscht und alle anderen Element fest lässt. Betrachten Sie die Abbildung $t\colon H \to S$, die jedem $a \in H$ die Permutation t_a mit $t_a(hK) := ahK$ für $h \in H$ und $t_a(\infty) := \infty$ zuordnet und die Abbildung $t'\colon H \to S$ mit $a \mapsto \sigma \circ t_a \circ \sigma$.)

Aufgabe 7
Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Morphismen in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Zeigen Sie:

(i) f, g mono (epi) $\Rightarrow g \circ f$ mono (epi).
Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ mono. Seien $h, \tilde{h}\colon D \to A$ mit $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ \tilde{h}$. Also $g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ \tilde{h})$. Da g mono ist, ist $f \circ h = f \circ \tilde{h}$ und da f mono ist, folgt, $h = \tilde{h}$.

Seien nun f und g epi sowie $h, \tilde{h}\colon C \to D$ mit $h \circ (g \circ f) = \tilde{h} \circ (g \circ f)$. Mit den obigen Überlegungen erhalten wir wieder das gewünschte Ergebnis.

(ii) $g \circ f$ mono (epi) $\Rightarrow f$ mono (g epi).
Seien $h, \tilde{h}\colon D \to A$ mit $f \circ h = f \circ \tilde{h}$. Dann folgen schrittweise: $g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ \tilde{h}) \Rightarrow (g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ \tilde{h}$. Da $g \circ f$ mono ist, folgt nun $h = \tilde{h}$.

Sei $g \circ f$ epi und $h, \tilde{h}\colon B \to D$ mit $h \circ g = \tilde{h} \circ g$. Dann folgt: $(h \circ g) \circ f = (\tilde{h} \circ g) \circ f \Rightarrow h \circ (g \circ f) = \tilde{h} \circ (g \circ f)$. Wegen epi ist $h = \tilde{h}$.

Aufgabe 8
Sei $f\colon A \to B$ ein Morphismus in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Beweisen Sie:

(i) f Sektion (Retraktion) $\Rightarrow f$ mono (epi).
Sei f eine Sektion. Dann existiert $f'\colon B \to A$ mit $f' \circ f = \mathrm{id}_A$. Seien $h, g\colon C \to A$ mit $f \circ g = f \circ h$. Dann ist $f' \circ (f \circ g) = f' \circ (f \circ h) \Rightarrow \mathrm{id}_A \circ g = g = h = \mathrm{id}_A \circ h$.

Sei f eine Retraktion mit $f \circ f' = \mathrm{id}_B$. Aus $g \circ f = h \circ f$ folgt, $(g \circ f) \circ f' = (h \circ f) \circ f' \Rightarrow g \circ \mathrm{id}_B = g = h = h \circ \mathrm{id}_B$.

(ii) f Sektion und Retraktion $\Rightarrow f$ Isomorphismus.
Sei f eine Sektion und Retraktion, d. h. es gibt $f', \tilde{f}\colon B \to A$ mit $f \circ f' = \mathrm{id}_B$ und $\tilde{f} \circ f = \mathrm{id}_A$. Dann ist $\tilde{f} = \tilde{f} \circ \mathrm{id}_B = \tilde{f} \circ (f \circ f') = (\tilde{f} \circ f) \circ f' = \mathrm{id}_A \circ f' = f'$. Also ist $\tilde{f} = f' = f$ und f iso.

A.2. Übungsblatt 2

Aufgabe 9
Sei $\Phi\colon \mathbf{Gr} \to \mathbf{Ab}$ der Funktor, der jeder Gruppe G die Faktorgruppe ${}^{G}/_{G'}$ zuordnet. Dabei ist $G' := \langle xyx^{-1}y^{-1}\colon x, y \in G\rangle$ die Kommutatorgruppe von G. Zeigen Sie, dass, Φ linksadjungiert zum kanonischen Funktor $\Psi\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Gr}$ ist.

Aufgabe 10
Zeigen Sie, dass der Funktor $\Phi\colon \mathbf{Gr} \to \mathbf{Ri}$ mit $G \mapsto \mathbb{Z}G$ linksadjungiert zum Funktor $\Psi\colon \mathbf{Ri} \to \mathbf{Gr}$ mit $R \mapsto U(R)$ ist. Dabei ist $\mathbb{Z}G$ der ganzzahlige Gruppenring von G und $U(R)$ die Einheitengruppe von R.

Aufgabe 11
Gegeben seien Funktoren $\Phi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $\Psi\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Ferner sei Φ linksadjungiert zu Ψ bezüglich $\nu = (\nu_{AB})_{A\in\mathcal{C}, B\in\mathcal{D}}$. Zeigen Sie für $A \in \mathcal{C}$ und $B \in \mathcal{D}$:

(i) Setzt man $\eta_A := \nu_{A,\Phi A}(\mathrm{id}_{\Phi(A)}) \in \mathcal{C}(A, \Psi\Phi A)$, so ist $\eta := (\eta_A)_{A\in\mathcal{C}}\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \Psi \circ \Phi$ eine natürliche Transformation; η heißt **Einheit** der Adjunktion (Φ, Ψ, ν).

(ii) Setzt man $\varepsilon_B := \nu^{-1}_{\Psi B, B}(\mathrm{id}_{\Psi B}) \in \mathcal{D}(\Phi\Psi B, B)$, so ist $\varepsilon := (\varepsilon_B)_{B\in\mathcal{D}}\colon \Phi \circ \Psi \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ eine natürliche Transformation; ε heißt **Koeinheit** von (Φ, Ψ, ν).

(iii) Dabei gilt: $(\Psi \circ \varepsilon) \circ (\nu \circ \Psi) = \mathrm{id}_\Psi$ und $(\varepsilon \circ \Phi) \circ (\Phi \circ \eta) = \mathrm{id}_\Phi$.

Aufgabe 12
Die Funktoren $\Phi, \Phi'\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ seien linksadjungiert zum Funktor $\Psi\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Zeigen Sie, dass Φ und Φ' natürliche äquivalent sind.

A.3. Übungsblatt 3

Aufgabe 13
Bestimmen Sie die Zentren der folgenden Ringe:

(i) des Gruppenrings RG; dabei ist R ein kommutativer Ring und G eine nicht unbedingt endliche Gruppe.
Sei $Q(G)$ die Menge der Konjugationsklassen. Für $C \in Q(G)$ sei $C^+ := \sum_{x\in C} x$ die Klassensumme von C. Dann ist:

$$Z(RG) = \sum_{C\in Q(G)} RC^+$$

Beweis:
Für $g \in G$ und $C \in Q(G)$ ist $gC^+g^{-1} = C^+$ und $gC^+ = C^+g$. Daraus folgt leicht die Teilmengenrelation „$\supseteq$“.

Sei nun $\alpha := \sum_{g\in G} r_g g \in Z(RG)$. Für $h \in G$ ist dann $\alpha = h\alpha h^{-1} = \sum_{g\in G} r_g hgh^{-1}$ und $r_{hgh^{-1}} = r_g$. Damit ist r_g konstant für $g \in Q(G)$. Also folgt auch „$\subseteq$“. ∎

(ii) des Quaternionenschiefkörpers $\mathbb{H}$.
Sei $\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in Z(\mathbb{H})$. Dann ist:

$$\begin{pmatrix} bi & ai \\ \overline{a}i & -\overline{b}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{b}i & \overline{a}i \\ ai & bi \end{pmatrix}$$

Also ist $a \in \mathbb{R}$ und $b = -\overline{b}$.

$$\begin{pmatrix} -b & a \\ -\overline{a} & -\overline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{b} & \overline{a} \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

Also ist $b = 0$ und wegen $\mathbb{R} \cdot \mathrm{Id}_{2\times 2} \subseteq Z(\mathbb{H})$ gilt, $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R} \cdot \mathrm{Id}_{2\times 2} \cong \mathbb{R}$.

(iii) des Matrixrings $R^{n\times n}$; dabei ist R ein beliebiger Ring und $n \in \mathbb{N}$.
Offenbar ist $Z(R) \cdot \mathrm{Id}_n \subseteq Z(R^{n\times n})$. Sei nun $A = (a_{ij}) \in Z(R^{n\times n})$. Für $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ sei E_{kl} die Matrix mit einer 1 an der Position (k, l) und sonst Nullen. Wegen $E_{kl}A = AE_{kl}$ erhält man:

$$a_{li} = \begin{cases} 0 & i \neq l \\ 1 & i = l \end{cases} \qquad \forall k, l$$

Damit ist $Z(R^{n\times n}) = Z(R) \cdot \mathrm{Id}_n$.

Aufgabe 14
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $R_1, R_2, \ldots, R_n$ Ringe.

(i) Zeigen Sie, dass jedes Ideal von $R_1 \times \ldots \times R_n$ die Form $I = I_1 \times \ldots \times I_n$ hat, wobei $I_j \trianglelefteq R_j$ für $j = 1, \ldots, n$ ist.
Sei $I \trianglelefteq R_1 \times \ldots \times R_n =: R$. Offenbar ist die Projektion $\pi_i \colon R \to R_i$ ein Ringepimorphismus. Insbesondere ist $\pi_i(I) =: I_1 \trianglelefteq R_i$ und $I \subseteq I_1 \times \ldots \times I_n$. Sei nun $x \in I_j$ beliebig. Dann existiert ein $y \in I$ mit $\pi_j(y) = x$. Also ist auch $x = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)y \in I$. Damit ist $I_1 \times \ldots \times I_n \subseteq I$.

(ii) Zeigen Sie, dass jedes Ideal in $R^{n\times n}$ die Form $I^{n\times n}$ hat, wobei I ein Ideal in R ist.
Sei $Y \trianglelefteq R^{n\times n}$ und $I := \left\{ x \in R \;\middle|\; \begin{pmatrix} x & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in Y \right\}$. Dann sieht man leicht, dass I ein Ideal in R ist. Sei nun $\alpha = (\alpha_{ij}) \in Y$ beliebig und E_{ij} wie in Übungsaufgabe 13. Dann ist auch $\begin{pmatrix} \alpha_{ij} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in E_{1i} \times E_{j1} \in Y$. Also ist $Y \subseteq I^{n\times n}$.

Sei $\alpha = (\alpha_{ij}) \in I^{n\times n}$ beliebig. Dann ist auch $\alpha = \sum_{i,j} E_{i1} \begin{pmatrix} \alpha_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix} E_{j1} \in Y$ und wir erhalten die Behauptung.

Aufgabe 15
Sei e ein Idempotent in einem Ring R.

(i) Zeigen Sie, dass eRe ein Teilring von R ist.
Das Nullelement ist $e0e = 0 \in eRe$ und das Einselement ist $e = e^2 = e1_Re \in eRe$. Für $ere, ese \in eRe$ folgt, $ere - ese = e(r-s)e \in eRe$ und $ere \cdot ese = e(re^2s)e = e(res)e \in eRe$.

(ii) Beweisen Sie, dass jedes Ideal von eRe die Form eIe hat, wobei I ein Ideal in R ist.
Sei $J \trianglelefteq eRe$ und $I := (J) \trianglelefteq R$. Für $\sum_{i=1}^n r_ix_is_i \in I$ mit $r_i, s_i \in R$ und $x_i \in J$ ist $e\sum_{i=1}^n r_ix_is_ie = \sum_{i=1}^n er_ix_is_ie = \sum_{i=1}^n (er_ie)x_i(es_ie) \in J$. Denn für $y_i \in R$ folgt, $x_i = ey_ie = e^2y_ie^2 = ex_ie \in eRe$. Also folgt insgesamt, $J = eJe \subseteq eIe \subseteq J$.

Aufgabe 16
Sei R ein Ring und $n \in \mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie, dass die oberen Dreiecksmatrizen in $R^{n\times n}$ einen Teilring T von $R^{n\times n}$ bilden.
klar

(ii) Beweisen Sie, dass die oberen Dreiecksmatrizen mit lauter Nullen auf der Hauptdiagonale ein Ideal I von T bilden.
Offenbar ist I eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition. Sei nun $A = (a_{ij}) \in T$ und $B = (b_{ij}) \in I$. Dann ist $\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ik} = 0 = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ik}$ für $i = 1, \dots, n$. Also ist AB und BA in I.

(iii) Berechnen Sie I^m für $m \in \mathbb{N}$.
I^m ist die Matrix die an den ersten m Stellen der ersten Zeile und den zugehörigen Diagonalen nur Nullen hat. Der Rest des Dreiecks ist dann mit Werten gefüllt.

(iv) Zeigen Sie: $T/I \cong R \times \ldots \times R$.
Die Abbildung $T \to R^n$ mit $\begin{pmatrix} a_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} \mapsto (a_1, \dots, a_n)$ ist ein Ringepimorphismus mit dem Kern I. Die Behauptung folgt aus dem Homomorphiesatz (Satz 4.1).

A.4. Übungsblatt 4

Aufgabe 17

(i) Seien I und J nilpotente Ideale in einem Ring R. Zeigen Sie, dass $I+J$ auch ein nilpotentes Ideal in R ist.
Sei $I^n = J^m = 0$. Dann ist $(I+J)^{n+m}$ die Summe von Produkten der Form $K_1, \dots, K_{n+m}$ mit $K_i \in \{I, J\}$. Dabei treten mindestens n Faktoren I oder J auf. Also haben wir:

$$K_1 \cdot \ldots \cdot K_{n+m} \subseteq \prod_{K_i = I} K_i = 0$$
$$K_1 \cdot \ldots \cdot K_{n+m} \subseteq \prod_{K_i = J} K_i = 0$$

(ii) Geben Sie ein Primideal an, das nicht maximal ist.
Es ist $I := 0 \trianglelefteq \mathbb{Z} = R$ nicht maximal. Denn da $\mathbb{Z}$ kommutativ ist und ${}^{\mathbb{Z}}/_{0} = \mathbb{Z}$ nullteilerfrei, ist 0 ein Primideal.

(iii) Finden Sie ein Semiprimideal, das kein Primideal ist.
Es ist $I = 6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \cdot 3\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$ der Durchschnitt zweier Primideale. Das ist aber kein Primideal, da $6 \notin \mathbb{P}$.

(iv) Finden Sie ein Nilideal, das nicht nilpotent ist.
Sei $R = I := {}^{\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]}/_{(x_i^i \colon i = 1, 2, \dots)}$. Wegen $0 \neq x_{n+1}^n \in I^n$ ist I nicht nilpotent. Sei nun $p \in I$ und $k \in \mathbb{N}$ maximal, so dass x_k in p vorkommt. Dann ist $p^k = 0$. Also ist I ein Nilideal.

Aufgabe 18

(i) Zeigen Sie, dass das Zentrum eines einfaches Rings stets ein Körper ist.
Sei R ein einfacher Ring. Dann ist $Z(R)$ ein kommutativer Ring. Sei nun $0 \neq x \in Z(R)$. Dann ist $Rx = xR \trianglelefteq R$. Da R einfach ist, gilt, $xR = Rx = R$ und es existiert ein $y \in R$ mit $xy = yx = 1$. Für alle $r \in R$ ist $ry = yxryxy = yrxy = yr$, also $y \in Z(R)$.

(ii) Beweisen Sie, dass ein Idempotent e eines einfachen Rings R genau dann in $Z(R)$ liegt, wenn gilt, $eR(1-e) = 0 = (1-e)Re$.
Für die Hinrichtung sei $e \in Z(R)$. Dann ist $eR(1-e) = Re(1-e) = R(e-e^2) = R(e-e) = 0$ und $(1-e)Re = (1-e)eR = 0$. Für die Rückrichtung sei $r \in R$. Dann ist $er = er - er(1-e) = ere = ere + (1-e)re = re$. Also ist $e \in Z(R)$.

Aufgabe 19

(i) Zeigen Sie, dass der Quaternionenschiefkörper $\mathbb{H}$ eine $\mathbb{R}$-Basis $1, I, J, K$ mit $I^2 = J^2 = K^2 = -1$ und $IJ = K = -JI$ hat.

Setze $1 := 1_2$, $I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $K := IJ = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -JI$. Dann ist $I^2 = J^2 = K^2 = -1$. Es ist $A = a1 + bJ + \alpha I + \beta K$ für:

$$A = \begin{pmatrix} a + \alpha i & b + \beta i \\ -b + \beta i & a - \alpha i \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

Dies zeigt, $\mathbb{H} = \mathbb{R}1 + \mathbb{R}I + \mathbb{R}J + \mathbb{R}K$. Offenbar sind 1, I, J und K auch linear unabhängig über $\mathbb{R}$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Elemente der Form

$$a1 + bI + cJ + dK/2 \qquad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a \equiv b \equiv c \equiv d \pmod 2$$

einen Teilring R von $\mathbb{H}$ bilden.

(iii) Bestimmen Sie $U(R)$.
Sei:

$$\begin{pmatrix} \frac{a+bi}{2} & \frac{c+di}{2} \\ \frac{-c+di}{2} & \frac{a-bi}{2} \end{pmatrix} \in U(R)$$

Dann ist

$$\frac{4}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \begin{pmatrix} \frac{a-bi}{2} & \frac{-c-di}{2} \\ \frac{c-di}{2} & \frac{a+bi}{2} \end{pmatrix} \in R$$

Also $\frac{4x}{a^2+b^2+c^2+d^2} \in \mathbb{Z}$ für $x \in \{a, b, c, d\}$. Insbesondere ist $4 \cdot \min\{|a|, |b|, |c|, |d|\}^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq \min\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$. Also ist $\min\{|a|, |b|, |c|, |d|\} \in \{0, 1\}$. Für den Fall $a \equiv b \equiv c \equiv d \pmod 2$ folgt sofort, dass $\{a, b, c, d\} \in \{\pm 1\}$. Sei nun $\min\{|a|, |b|, |c|, |d|\} = 0$. Aus $\max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$ folgt, $\max\{|a|, |b|, |c|, |d|\} \leq 4$.

Wir nehmen an, dass $|a| = 4$. Dann ist $b = c = d = 0$. Dies widerspricht aber $-1 \equiv \frac{4a}{a^2+b^2+c^2+d^2} \equiv \frac{0}{a^2+b^2+c^2+d^2} \equiv 0 \pmod 2$. Es folgt leicht, $(a, b, c, d) \in \{(\pm 2, 0, 0, 0), \ldots, (0, 0, 0, \pm 2)\}$. Umgekehrt sind diese Elemente tatsächlich Einheiten. Also ist $|U(R)| = 24$ und somit $U(R) \cong \mathrm{SL}(2, 3)$.

Aufgabe 20
Zeigen Sie, dass jedes Primideal eines Rings R ein minimales Primideal enthält.
Die Aufgabe wurde in Algebra 2 besprochen.

A.5. Übungsblatt 5

Aufgabe 21
Sei R ein Ring. Eine **Derivation** von R ist eine Abbildung $\delta\colon R \to R$ mit $\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$ und $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ für alle $a, b \in R$. Zeigen Sie:

(i) $R_\delta := \{\, c \in R \mid \delta(c) = 0 \,\}$ ist ein unitärer Teilring von R.
Sei $R_\delta := \{\, c \in R \mid \delta(c) = 0 \,\}$. Das Nullelement ist $0 \in R_\delta$. Denn für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt, $\delta(a) = \delta(a+0) = \delta(a) + \delta(0) \Rightarrow \delta(0) = 0$. Das Einselement ist $1 \in R_\delta$. Denn es gilt, $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1)1 + 1\delta(1) = \delta(1) + \delta(1) \Rightarrow \delta(1) = 0$. Nun ist noch zu zeigen, dass für $\delta(c) = 0$ folgt, dass $\delta(-c) = 0$ ist. Wir haben $0 = \delta(0) = \delta(c - c) = \delta(c) + \delta(-c) = 0 + \delta(-c) = \delta(-c)$. Der Rest ist klar, da die Elemente in R_δ die Elemente von R sind.

(ii) Für $x \in R$ ist $\delta_x \colon R \to R$ mit $a \mapsto xa - ax$ eine Derivation. Derivationen dieser Art heißen **innere Derivationen** von R.
Sei $a, b \in R$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\delta_x(a+b) &= x(a+b) - (a+b)x = xa + xb - ax - bx = (xa - ax) + (xb - bx) \\
&= \delta_x(a) + \delta_x(b) \\
\delta_x(a \cdot b) &= xab - abx = xab - axb + axb - abx = (xa - ax)b + a(xb - bx) \\
&= \delta_x(a)b + a\delta_x(b)
\end{aligned}$$

Aufgabe 22
Zeigen Sie, dass ein Ring R genau dann ein Schiefkörper ist, wenn 0 ein maximales Linksideal von R ist.

„$\Rightarrow$“ Sei Œ $R \neq 0$ ein Schiefkörper, also $U(R) = R \setminus \{0\}$. Sei $0 \neq I \trianglelefteq R \Rightarrow I \cap U(R) \neq \emptyset$. Für $u \in I \cap U(R)$ folgt nun, dass $r = (ru^{-1})u \in I$ für alle $r \in R$. Also ist $I = R$. Somit ist 0 maximales Linksideal von R.

„$\Leftarrow$“ Sei 0 ein maximales Linksideal von R und $x \in R \setminus \{0\}$. Dann $0 \neq (x) = R$. Also existiert ein $a \in R$ mit $ax = 1 \in R$. Nun ist noch zu zeigen, dass x rechtsinvertierbar ist.

Aufgabe 23
Sei $\mathfrak{P}$ eine total geordnete Menge von Primidealen in einem Ring R. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{P \in \mathfrak{P}} P$ und $\bigcup_{P \in \mathfrak{P}} P$ Primideale in R sind.

Aufgabe 24
Seien R ein Ring, $L, M, N \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $f \in \mathrm{Hom}_R(L, N)$ sowie $g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Dann heißt $P := \{\, (x, y) \in L \times M \mid f(x) = g(y) \,\}$ **Pullback** von f und g. Zeigen Sie:

(i) P ist ein Untermodul von $L \times M$.

(ii) Ist $A \in {}_R\mathbf{Mod}$ und sind $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(A, L)$ sowie $\beta \in \mathrm{Hom}_R(A, M)$ mit $f \circ \alpha = g \circ \beta$, so existiert genau ein $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(A, P)$ mit $p \circ \gamma = \alpha$ und $q \circ \gamma = \beta$. Dabei sind $p \colon P \to L$ und $q \colon P \to M$ die entsprechend eingeschränkten Projektoren.

A.6. Übungsblatt 6

Aufgabe 25
Seien R ein Ring, $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ und N ein Untermodul von M. Man nennt N **klein** (oder **überflüssig**) in M, falls für jeden Untermodul L von M gilt: $N + L = M \Rightarrow L = M$. Man schreibt dann, $N \ll M$. Zeigen Sie:

(i) Ist $A \in {}_R\mathbf{Mod}$ mit Untermoduln $C \subseteq B \subseteq A$, so gilt:

$$B \ll A \Leftrightarrow C \ll A \wedge B/C \ll A/C$$

(ii) Ist $A \in {}_R\mathbf{Mod}$ mit Untermoduln B, C von A, so gilt:

$$B \ll A \wedge C \ll A \Leftrightarrow B + C \ll A$$

(iii) Ist $A \in {}_R\mathbf{Mod}$ mit Untermoduln $C \ll B \subseteq A$, so ist $C \ll A$.

(iv) Sind $A_1, \ldots, A_n \in {}_R\mathbf{Mod}$ und ist B_i ein Untermodul von A_i für $i = 1, \ldots, n$, so gilt:

$$\coprod_{i=1}^{n} B_i \ll \coprod_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow B_i \ll A_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

Aufgabe 26
Seien R ein Ring und $M \in {}_R\mathbf{Mod}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Rad}(M)$ die Summe aller kleinen Untermoduln von M ist.

Aufgabe 27
(i) Bestimmen Sie $J(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Bestimmen Sie $J(K[X])$ für jeden Körper K.

Aufgabe 28
Sei R ein Ring. Zeigen Sie:

(i) $J(R^{n\times n}) = J(R)^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $J(eRe) = eJ(R)e$ für jedes Idempotent e in R.

(iii) 0 ist das einzige Idempotent in $J(R)$.

A.7. Übungsblatt 7

Aufgabe 29
Es seien $p \in \mathbb{P}$ und $A := \left\{ \frac{n}{p^k} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}$. Zeigen Sie, dass der $\mathbb{Z}$-Modul ${}^{A}/_{\mathbb{Z}}$ artinsch, aber nicht noethersch ist.

Aufgabe 30
Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $R := K^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass $M := K^{n \times 1}$ ein einfacher R-Modul ist.

Aufgabe 31
Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und R der Ring aller oberen Dreiecksmatrizen in $K^{n \times n}$.

(i) Bestimmen Sie alle Untermoduln von $M := K^{n \times 1}$.

(ii) Berechnen Sie die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher R-Moduln.

Aufgabe 32
Zeigen Sie:

(i) Für halbeinfache Ringe $R_1, \ldots, R_n$ ist auch $R_1 \times \ldots \times R_n$ ein halbeinfacher Ring.

(ii) Für jeden halbeinfachen Ring R und $n \in \mathbb{N}$ ist auch $R^{n \times n}$ ein halbeinfacher Ring.

(iii) Für jedes Ideal I in einem halbeinfachen Ring R ist auch ${}^{R}/_{I}$ ein halbeinfacher Ring.

(iv) Für jedes Idempotent e in einem halbeinfachen Ring R ist auch eRe ein halbeinfacher Ring.

A.8. Übungsblatt 8

Aufgabe 33
Zeigen Sie, dass für einen Ring R die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) R ist linksartinsch und einfach.

(ii) $R \cong D^{n \times n}$ für einen Schiefkörper D und ein $n \in \mathbb{N}$

(iii) R ist rechtsartinsch und einfach.

Aufgabe 34
Zeigen Sie, dass für Idempotente e und f in einem Ring R die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $Re \simeq Rf$.

(ii) Es existieren Elemente $a, b \in R$ mit $e = ab$ und $f = ba$.

(iii) Es existieren Elemente $a \in eRf$ und $b \in fRe$ mit $e = ab$ und $f = ba$.

Aufgabe 35
Seien e und f Idempotente in einem Ring R mit $e + J(R) = f + J(R)$. Zeigen Sie, dass eine Einheit u in R mit $ufu^{-1} = e$ existiert.

Aufgabe 36
Zeigen Sie, dass für jeden Ring R und alle $M, N \in {}_R\mathbf{Mod}$ gilt:

(i) Für $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ ist $f(\mathrm{Soc}(M)) \subseteq \mathrm{Soc}(N)$.

(ii) Ist N ein Untermodul von M, so ist $\mathrm{Soc}(N) = N \cap \mathrm{Soc}(M)$ und $\mathrm{Soc}(M)+N/N \subseteq \mathrm{Soc}(M/N)$.

(iii) Für jede Familie $(M_i)_{i\in I}$ von R-Moduln M_i ist $\mathrm{Soc}(\coprod_{i\in I} M_i) = \coprod_{i\in I} \mathrm{Soc}(M_i)$.

(iv) Der Sockel des regulären R-Linksmoduls ${}_RR$ ist ein Ideal in R.

A.9. Übungsblatt 9

Aufgabe 37

(i) Zeigen Sie, dass für jede Familie $(R_i)_{i\in I}$ von Ringen R_i gilt:

$$J(\prod_{i\in I} R_i) = \prod_{i\in I} J(R_i)$$

(ii) Finden Sie einen Ring R mit $\mathrm{Soc}({}_RR) \neq \mathrm{Soc}(R_R)$.

Aufgabe 38
Berechnen Sie $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$.

Aufgabe 39

(i) Sei R ein Ring und ${}_RR = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$ mit Linksidealen $L_1, \ldots, L_n$ von R. Zeigen Sie, dass Idempotente $e_1, \ldots, e_n \in R$ mit $e_1 + \cdots + e_n = 1$, $L_i = Re_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $e_ie_j = 0$ für $i \neq j$ existieren.

(ii) Seien umgekehrt $f_1, \ldots, f_n \in R$ Idempotente mit $f_1 + \cdots + f_n = 1$ und $f_if_j = 0$ für $i \neq j$. Zeigen Sie, dass $R = Rf_1 \oplus \ldots \oplus Rf_n$ mit Linksidealen $Rf_1, \ldots, Rf_n$ von R ist.

Aufgabe 40
Seien $e_1, \ldots, e_n$ Idempotente in einem Ring R mit $u := e_1 + \cdots + e_n \equiv 1 \pmod{J(R)}$ und $e_ie_j \equiv 0 \pmod{J(R)}$ für $i \neq j$. Zeigen Sie:

(i) $u \in U(R)$.

(ii) $R = Re_1 \oplus \ldots \oplus Re_n$.

(iii) Für $i = 1, \dots, n$ ist $f_i := u^{-1}e_i$ ein Idempotent in R mit $f_i \equiv e_i \pmod{J(R)}$.

(iv) Für $i \neq j$ ist $f_i f_j = 0$.

(v) $f_1 + \cdots + f_n = 1$.

A.10. Übungsblatt 10

Aufgabe 41
Zeigen Sie, dass für jeden Ring R und jeden projektiven R-Modul P gilt: $\mathrm{Rad}(P) = J(R)P$.
Wir zeigen zunächst die folgende Aussage: Für jede Familie von R-Moduln $(M_i)_{i\in I}$ gilt:

$$J(R)\coprod_{i\in I} M_i = \coprod_{i\in I} J(R)M_i$$

Zum Beweis sei $(m_i^j)_{i\in I} \in \coprod_{i\in I} M_i$ und $x_j \in J(R)$ für $j = 1, \dots, n$. Dann ist

$$\sum_{j=1}^{n} x_j (m_i^j)_{i\in I} = \sum_{j=1}^{n} (x_j m_i^j)_{i\in I} = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j m_i^j\right)_{i\in I} \in \coprod_{i\in I} J(R)M_i$$

Dies zeigt, $J(R)\coprod_{i\in I} M_i \subseteq \coprod_{i\in I} J(R)M_i$. Sei q_i der i-te Injektor und $\sum_{j=1}^{n} x_j m_j \in J(R)M_i$ mit $x_j \in J(R)$ und $m_j \in M_i$. Dann ist $q_i(\sum_{j=1}^{n} x_j m_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j q_i(m_j) \in J(R)\coprod_{i\in I} M_i$. Dies zeigt, $q_i(J(R)M_i) \subseteq J(R)\coprod_{i\in I} M_i$ und $\coprod_{i\in I} J(R)M_i \subseteq J(R)\coprod_{i\in I} M_i$. Damit wäre die Aussage gezeigt.

Ist $F = \coprod_{i\in I} R$ nun ein freier R-Modul, so gilt:

$$\mathrm{Rad}(F) = \coprod_{i\in I} \mathrm{Rad}({}_R R) = \coprod_{i\in I} J(R) = \coprod_{i\in I} J(R)R = J(R)\coprod_{i\in I} R = J(R)F$$

Sei nun P ein projektiver R-Modul. Dann existiert ein freier Modul F mit $F = P \times Q$ für einen Untermodul $Q \subseteq F$. Dann ist

$$\mathrm{Rad}(P) \times \mathrm{Rad}(Q) = \mathrm{Rad}(F) = J(R)F = J(R)(P \times Q) = J(R)P \times J(R)Q$$
$$\mathrm{Rad}(P) = J(R)P$$

Aufgabe 42
Seien R ein Ring und $P \in {}_R\mathbf{Mod}$. Zeigen Sie, dass P genau dann projektiv ist, wenn für jede exakte Folge $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ in ${}_R\mathbf{Mod}$ die Folge

$$\mathrm{Hom}_R(P, L) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(P,f)} \mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(P,g)} \mathrm{Hom}_R(P, N)$$

in ${}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$ exakt ist.

„⇒" Sei P projektiv und $\alpha \in \ker(\mathrm{Hom}_R(P,g)) \subseteq \mathrm{Hom}_R(P,M)$. Dann ist $g \circ \alpha = 0$ und $\alpha(P) \subseteq \ker(g) = f(L)$. Somit erhält man folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\ L \arrow[r, "f"'] & f(L) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Da P projektiv ist, existiert eine Abbildung $h \in \mathrm{Hom}_R(P,L)$ mit $\alpha = h \circ f$. Also ist $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(P,f)(\mathrm{Hom}_R(P,L))$. Sei umgekehrt $\alpha = f \circ h$ für ein $h \in \mathrm{Hom}_R(P,L)$. Dann ist $g \circ \alpha = g \circ f \circ h = 0$ und $\alpha \in \ker(\mathrm{Hom}_R(P,N))$.

„⇐" Sei $f\colon M \to N$ ein Epimorphismus und $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(P,N)$. Nach der Voraussetzung ist dann die Folge

$$\mathrm{Hom}_R(P,M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(P,f)} \mathrm{Hom}_R(P,N) \to 0$$

exakt. Also existiert ein $h \in \mathrm{Hom}_R(P,M)$ mit $\alpha = f \circ h$. Dies zeigt, dass P projektiv ist:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Aufgabe 43
Zeigen Sie, dass das von 2 und $1+\sqrt{-5}$ erzeugte Ideal I im Ring $R := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-5}$ ein projektiver R-Modul ist. (Allgemeiner ist jedes Ideal I eines Ganzheitsrings R in einem algebraischen Zahlkörper K ein projektiver R-Modul.)
Sei $\alpha\colon F = R \times R \to P := (2, 1+\sqrt{-5})$ der Epimorphismus mit $\alpha(1,0) = 2$ und $\alpha(0,1) = 1+\sqrt{-5}$. Wir suchen eine Abbildung $\beta\colon P \to F$ mit $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_P$. Dann ist nämlich $F = \ker(\alpha) \oplus \beta(P)$ und $\beta(P) \cong F/\ker(\alpha) \cong P$. Sei dazu $x := (a + b\sqrt{-5}, c + d\sqrt{-5}) \in F$ beliebig. Dann ist:

$$\alpha(x) = 2(a+b\sqrt{-5}) + (1+\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5}) = \underbrace{2a+c-5d}_{=:\sigma} + (\underbrace{2b+c+d}_{=:\tau})\sqrt{-5} \in P$$

Dabei ist $\sigma \equiv c + d \equiv \tau \pmod 2$ und

$$(\sigma + \tau\sqrt{-5})\frac{1-\sqrt{-5}}{2} = \frac{\sigma+5\tau}{2} + \frac{\tau-\sigma}{2}\sqrt{-5} \in R$$

Also können wir $\beta(z) := (-z, \frac{1-\sqrt{-5}}{2}z)$ für $z \in P$ definieren. Dann ist β sicher R-linear. Für $z \in P$ gilt außerdem:

$$\alpha(\beta(z)) = \alpha(-z, \frac{1-\sqrt{-5}}{2}z) = -2z + (1+\sqrt{-5})\frac{1-\sqrt{-5}}{2}z = z$$

Aufgabe 44

Gegeben seien ein Ring R und kurze exakte Folgen

$$0 \to L \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \to 0$$
$$0 \to L' \xrightarrow{f'} P' \xrightarrow{g'} M \to 0$$

in ${}_R\mathbf{Mod}$, wobei P, P' projektiv sind. Zeigen Sie: $L \times P' \simeq L' \times P$ (Schanuels Lemma).
Hinweis: Betrachten Sie den R-Modul $Q := \{ (x, x') \in P \times P' \mid g(x) = g'(x') \}$.
Sei Q der Pullback von g und g' (vergleiche Übungsaufgabe 24). Sei $p\colon Q \to P$ die Projektion auf die erste Komponente und $x \in P$ beliebig. Da g' surjektiv ist, existiert ein $x' \in P'$ mit $g(x) = g'(x')$, d. h. $(x, x') \in Q$. Also ist auch p surjektiv. Es gilt, $\ker(p) = \{ (0, x') \in P \times P' \mid g'(x') = 0 \} \cong \ker(g') = f'(L')$. Dies liefert eine kurze exakte Folge $0 \to L' \to Q \xrightarrow{p} P \to 0$. Da P projektiv ist, gilt, $Q \cong L' \times P$. Wählt man für p die Projektion auf die zweite Komponente, so erhält man analog $Q \cong L \times P'$. Die Behauptung folgt.

Aufgabe 45

Zeigen Sie, dass jeder nichttriviale projektive Modul über einem Ring einen maximalen Untermodul hat.
Sei F ein freier R-Modul und $F = P \oplus Q$ mit $P \neq 0$. Nach der Übungsaufgabe 41 genügt es zu zeigen, dass $J(R)P \neq P$. Nehmen wir das Gegenteil an. Sei $\{ x_i \mid i \in I \}$ eine Basis von F. Wir schreiben $x_i = y_i + z_i$ mit $y_i \in P$ und $z_i \in Q$. Wegen $y_i \in J(R)P$ existieren $r_1, \dots, r_m \in J(R)$ und $\widetilde{y_1}, \dots, \widetilde{y_m} \in P$ mit $y_i = \sum_{j=1}^m r_j \widetilde{y_j}$. Schreibt man die Elemente $\widetilde{y_i}$ als Linearkombination der Basis $\{ x_i \mid i \in I \}$, so erhält man die Darstellung $y_i = \sum_{j \in I} a_{ij} x_j$ mit $a_{ij} \in J(R)$ für alle $i, j \in I$. Wir zeigen nun, dass die Elemente $z_i = x_i - y_i = \sum_{j \in I} (\delta_{ij} - a_{ij}) x_j$ linear unabhängig sind. Nehmen wir dafür $r_1 z_1 + \dots + r_n z_n = 0$ mit $r_1, \dots, r_n \in R$ an. Sei $\pi\colon F \to \bigoplus_{i=1}^n Rx_i$ die Projektion. Dann ist auch:

$$0 = \pi(r_1 z_1 + \dots + r_n z_n) = \sum_{i=1}^n r_i \sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - a_{ij}) x_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n r_i (\delta_{ij} - a_{ij}) \right) x_j$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der x_i folgt, $\sum_{i=1}^n r_i(\delta_{ij} - a_{ij}) = 0$ für $j = 1, \dots, n$. Sei $A := (a_{ij})_{i,j=1}^n \in J(R)^{n \times n} = J(R^{n \times n})$. Nach dem Satz 7.5 ist dann $(\delta_{ij} - a_{ij})_{i,j=1}^n = 1_n - A \in \mathrm{GL}(n, R)$. Insbesondere sind die Zeilen $l_1, \dots, l_n$ von $1_n - A$ linear unabhängig. Wegen $\sum_{i=1}^n r_i l_i = 0$ ist also $r_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$.

Sei nun $x := \sum_{i=1}^m a_i x_i \in P$ beliebig vorgegeben und $\pi\colon F \to Q$ die Projektion. Dann ist $0 = \pi(x) = \sum_{i=1}^m a_i z_i$ und $a_1 = \dots = a_m = 0$. Dies liefert den Widerspruch $P = 0$.

A.11. Übungsblatt 11

Aufgabe 46

(i) Zeigen Sie, dass

$$A := \{ (2a_1, 2^2a_2, 2^3a_3, \dots) \mid a_1, a_2, \dots \in \mathbb{Z} \}$$
$$B := \{ (3b_1, 3^2b_2, 3^3b_3, \dots) \mid b_1, b_2, \dots \in \mathbb{Z} \}$$

Untermoduln des $\mathbb{Z}$-Moduls $M := \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$ mit $M = A + B$ sind.

(ii) Zeigen Sie, dass für den Untermodul $P := \coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$ von M gilt, $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M/P, \mathbb{Z}) = 0$.

(iii) Zeigen Sie, dass M nicht projektiv ist. Das direkte Produkt projektiver Moduln ist also nicht unbedingt wieder projektiv und das direkte Produkt freier Moduln ist nicht unbedingt wieder frei. Hinweis: Nehmen Sie an, dass M direkter Summand eines freien $\mathbb{Z}$-Moduls ist und beachten Sie, dass P abzählbar, M dagegen übdерabzählbar ist.

Aufgabe 47

Seien R ein Ring, $N \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $(M_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von R-Moduln. Konstruieren Sie $\mathbb{Z}$-Isomorphismen:

$$\operatorname{Hom}_R\left(\coprod_{i \in I} M_i, N\right) \to \prod_{i \in I} \operatorname{Hom}_R(M_i, N)$$
$$\operatorname{Hom}_R\left(N, \prod_{i \in I} M_i\right) \to \prod_{i \in I} \operatorname{Hom}_R(N, M_i)$$

Aufgabe 48

(i) Ist $\mathbb{Q}$ ein projektiver $\mathbb{Z}$-Modul?

(ii) Berechnen Sie die injektive Hülle des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 49

Zeigen Sie, dass für jeden Ring R und jedes kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ A' \arrow[r, "\varphi'"] & B' \arrow[r, "\psi'"] & C' \end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen in ${}_R\mathbf{Mod}$ gilt:

(i) Sind α, γ und φ' injektiv, so ist β injektiv.

(ii) Sind α, γ und ψ surjektiv, so ist β surjektiv.

(iii) Ist β injektiv und sind α, ψ surjektiv, so ist γ injektiv.

(iv) Ist β surjektiv und sind φ', γ injektiv, so ist α surjektiv.

A.12. Übungsblatt 12

Aufgabe 50
Seien R ein Ring, $M, N \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Man nennt f **projektiv**, falls ein projektiver R-Modul P und $f' \in \mathrm{Hom}_R(M, P)$, $f'' \in \mathrm{Hom}_R(P, N)$ mit $f = f'' \circ f'$ existieren. Man setzt dann

$$\mathrm{Hom}_R^p(M, N) := \{ g \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \mid g \text{ projektiv} \}$$

Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{Hom}_R^p(M, N)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Hom}_R(M, N)$. Man setzt

$$\overline{\mathrm{Hom}_R}(M, N) := {}^{\mathrm{Hom}_R(M,N)}\!/\!_{\mathrm{Hom}_R^p(M,N)}$$

(ii) Für $K, L \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $f \in \mathrm{Hom}_R^p(M, N)$, $g \in \mathrm{Hom}_R(K, M)$, $h \in \mathrm{Hom}_R(N, L)$ ist $f \circ g \in \mathrm{Hom}_R^p(K, N)$ und $h \circ f \in \mathrm{Hom}_R^p(M, L)$.

(iii) $\mathrm{End}_R^p(M) := \mathrm{Hom}_R^p(M, M) \trianglelefteq \mathrm{End}_R(M)$

(iv) Man erhält folgendermaßen eine Kategorie ${}_R\mathbf{StMod}$, die **stabile Modulkategorie** von R:

- Die Objekte von ${}_R\mathbf{StMod}$ sind die R-Moduln.
- Für $M, N \in {}_R\mathbf{Mod}$ ist $\overline{\mathrm{Hom}_R}(M, N)$ die Menge der Morphismen von M nach N in ${}_R\mathbf{StMod}$.
- Für $L, M, N \in {}_R\mathbf{Mod}$, $f \in \mathrm{Hom}_R(L, M)$, $g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ und $\overline{f} := f + \mathrm{Hom}_R^p(L, M) \in \overline{\mathrm{Hom}_R}(L, M)$, $\overline{g} := g + \mathrm{Hom}_R^p(M, N) \in \overline{\mathrm{Hom}_R}(M, N)$ ist $\overline{g} \circ \overline{f} = \overline{g \circ f}$.

(v) Man erhält einen (**kanonischen**) Funktor $\Phi\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_R\mathbf{StMod}$ mit $\Phi M := M$ für $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $\Phi f := \overline{f}$ für jeden Morphismus $f\colon M \to N$ in ${}_R\mathbf{Mod}$.

(vi) Ein R-Modul P ist genau dann projektiv, wenn id_P projektiv ist.

Aufgabe 51
(i) Sei e ein streng unzerlegbares Idempotent in einem Ring R und $(I_j)_{j \in J}$ eine Familie von Idealen in R mit $e \in \sum_{j \in J} I_j$. Zeigen Sie, dass ein $j \in J$ mit $e \in I_j$ existiert. (Rosenbergs Lemma)

(ii) Seien $I_1, \dots, I_n$ Ideale in einem Ring R mit $R = I_1 \oplus \dots \oplus I_n$. Zeigen Sie, dass paarweise orthogonale Idempotente $e_1, \dots, e_n \in Z(R)$ existieren mit $e_1 + \dots + e_n = 1$ und $I_j = Re_j = e_j R$ für $j = 1, \dots, n$.

Aufgabe 52
Sei R ein Ring und $M \in {}_R\mathbf{Mod}$. Zeigen Sie:

(i) Die abelsche Gruppe $M^* := \mathrm{Hom}_R(M, R)$ ist ein R-Rechtsmodul mit $(fr)(m) := f(m)r$ für $f \in M^*$, $r \in R$ und $m \in M$. Man nennt M^* den zu M **dualen Rechtsmodul**.

(ii) Analog hat man zu jedem $N \in \mathbf{Mod}_R$ einen dualen R-Linksmodul N^*.

(iii) Wie in der linearen Algebra existiert stets ein kanonischer R-Homomorphismus $\varepsilon_M \colon M \to M^{**}$.

(iv) Ist M projektiv, so ist ε_M injektiv.

(v) Ist M endlich erzeugt und projektiv, so ist ε_M bijektiv und M^* ist auch projektiv.

(vi) Ist $M \simeq Re$ für ein Idempotent $e \in R$, so ist $M^* \simeq eR$.

A.13. Übungsblatt 13

Aufgabe 53
Geben Sie bis auf Isomorphie alle endlich erzeugten unzerlegbaren $\mathbb{Z}$-Moduln an.
Sei $A \in {}_{\mathbb{Z}}\mathbf{mod}$ unzerlegbar. Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen muss A zyklisch sein. Sei zunächst $A = \mathbb{Z}$. Da $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ nach dem Satz 6.6 (iii) nur die Idempotente 0 und 1 besitzt, ist A nach dem Satz 8.2 unzerlegbar. Sei also $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für ein $n \geq 2$. Ist $n = kl$ mit $k \neq 1 \neq l$ und $\mathrm{ggT}(k, l) = 1$, so wäre $A \simeq \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ nach dem chinesischen Restsatz (Satz 4.4) zerlegbar. Also ist $n = p^m$ mit $p \in \mathbb{P}$ und $m \in \mathbb{N}$. Da A dann nur eine Untergruppe der Ordnung p besitzt, ist A tatsächlich unzerlegbar. Die endlich erzeugten unzerlegbaren $\mathbb{Z}$-Moduln sind also durch $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ mit $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$ und $m \in \mathbb{N}$ gegeben.

Aufgabe 54
Geben Sie ein Beispiel für einen Ring R, einen R-Rechtsmodul M und einen R-Linksmodul N mit $M \otimes_R N \neq \{\, m \otimes n \mid m \in M, n \in N \,\}$ an.
Sei $R = \mathbb{F}_2$, $M = R^2$ und $N = R^3$. Dann ist

$$M \otimes_R N = (R^2) \otimes_R N \overset{\text{Satz 13.6}}{\simeq} R \otimes_R N \times R \otimes_R N \overset{\text{Satz 13.5}}{\simeq} N \times N \simeq R^6$$

Aus $|M \times N| = 2^5 < 2^6 = |R^6| = |M \otimes_R N|$ folgt sofort die Behauptung.

Aufgabe 55
Ist $\mathbb{Q}$ ein flacher $\mathbb{Z}$-Modul?
Nach dem Satz 13.7 genügt es folgendes zu zeigen: Sind $M, N \in \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}}$ und $f\colon M \to N$ injektiv, so ist auch $f \otimes \mathrm{id}\colon M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ injektiv. Nach der Bemerkung 9.2 (iv) existiert eine kurze exakte Folge:

$$0 \to K \hookrightarrow F := \coprod_{i \in I} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} N \to 0$$

Sei $L := \pi^{-1}(f(M)) \subseteq F$ und $\varphi\colon L \to M$ mit $x \mapsto f^{-1}(\pi(x))$. Offenbar ist L dann ein $\mathbb{Z}$-Modul und φ ist wohldefiniert und $\mathbb{Z}$-linear, da f injektiv ist. Wegen $\pi(K) = 0 \subseteq f(M)$ ist $K \subseteq L$. Für $x \in L$ gilt außerdem: $x \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow f^{-1}(\pi(x)) = 0 \Leftrightarrow x \in K$. Also ist auch die Folge $0 \to K \hookrightarrow L \xrightarrow{\varphi} M \to 0$ exakt. Somit erhält man ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & L \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "\alpha"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
K \arrow[r, hook] & F \arrow[r, "\pi"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tensorieren liefert ein weiteres kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen (Satz 13.7):

$$\begin{tikzcd}
K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r, "\varphi \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, hook, "\alpha \otimes \mathrm{id}"] & M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r] \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}"] & 0 \\
K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r, hook] & F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r, "\pi \otimes \mathrm{id}"] & N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Nach der Übungsaufgabe 49 (iii) genügt es zu zeigen, dass $\forall \otimes \mathrm{id}\colon L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ injektiv ist, wobei $\alpha\colon L \hookrightarrow F$ die Inklusionsabbildung ist. Sei dafür $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes {}^{a_i}/_{b_i} \in \ker(\alpha \otimes \mathrm{id})$ mit $x_1, \ldots, x_n \in L$ und ${}^{a_1}/_{b_2}, \ldots, {}^{a_n}/_{b_n} \in \mathbb{Q}$. Mit $b := b_1 \ldots b_n$ und $b_i' := {}^{b}/_{b_i}$ ist dann

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \frac{a_i}{b_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \frac{a_i b_{i'}}{b} = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i b_i' \otimes \frac{1}{b} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_i b_i' \right) \otimes \frac{1}{b}$$

Somit ist auch

$$\begin{aligned}
0 = b \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_i b_i' \otimes \frac{1}{b} \right) &= \sum_{i=1}^{n} x_i a_i b_i' \otimes 1 \in F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \\
&= \left(\coprod_{i \in I} \mathbb{Z} \right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \overset{\text{Satz 13.6}}{\simeq} \coprod_{i \in I} (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \overset{\text{Satz 13.5}}{\simeq} \coprod_{i \in I} \mathbb{Q}
\end{aligned}$$

Geht man die obigen Isomorphismen elementweise durch, so erhält man $\sum_{i=1}^n x_i a_i b_i' = 0$. Damit ist auch $\sum_{i=1}^n x_i \otimes {}^{a_i}/_{b_i} = 0$ und alles ist gezeigt.

Aufgabe 56

Seien R ein Ring, $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ und $I \trianglelefteq R$. Zeigen Sie, dass die R-Moduln ${}^R/_I \otimes_R M$ und ${}^M/_{IM}$ isomorph sind. Dabei besteht IM aus allen Elementen der Form $x_1 m_1 + \cdots + x_k m_k$ mit $x_1, \ldots, x_k \in I$, $m_1, \ldots, m_k \in M$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

Wir betrachten die Abbildung $f\colon {}^R/_I \times M \to {}^M/_{IM}$ mit $(r + I, m) \mapsto rm + IM$. Ist $x \in I$, so ist $(r + x)m + IM = rm + xm + IM = rm + IM$. Also ist f wohldefiniert. Offenbar ist f ausgeglichen. Nach dem Satz 13.2 existiert also ein $\mathbb{Z}$-Homomorphismus $\alpha\colon {}^R/_I \otimes_R M \to {}^M/_{IM}$ mit $\alpha((r + I) \otimes m) = rm + IM$. Da ${}^R/_I$ ein R-R-Bimodul ist, ist ${}^R/_I \otimes_R M$ nach dem Satz 14.1 tatsächlich auch ein R-Linksmodul. Für $r, s \in R$ und $m \in M$ gilt dabei $\alpha(s((r + I) \otimes m)) = \alpha((sr + I) \otimes m) = srm + IM = s(rm + IM) = s\alpha((r + I) \otimes m)$. Also ist α auch R-linear.

Betrachten wir nun die Abbildung $\beta\colon {}^M/_{IM} \to {}^R/_I \otimes_R M$ mit $m + IM \mapsto (1 + I) \otimes m$. Sei $\sum_{i=1}^k x_i m_i \in IM$ mit $x_1, \ldots, x_k \in I$, $m_1, \ldots, m_k \in M$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist:

$$\beta\left(\sum_{i=1}^k x_i m_i\right) = (1 + I) \otimes \left(\sum_{i=1}^k x_i m_i\right) = \sum_{i=1}^k (x_i + I) \otimes m_i = \sum_{i=1}^k 0 \otimes m_i = 0$$

Also ist β wohldefiniert und R-linear. Schließlich ist auch $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{M/IM}$ und $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{R/I \otimes_R M}$. Somit ist α ein Isomorphismus.

Aufgabe 57

Seien R ein Ring, $M \in {}_R\mathbf{Mod}$, $S := \mathrm{End}_R(M)$ und $T := \mathrm{End}_S(M)$. Zeigen Sie, dass $Z(S) = T(S)$.

„$\subseteq$“ Wir bezeichnen mit $\cdot\colon S \times M \to M$ mit $(f, m) \mapsto f(m)$ die Skalarmultiplikation von S auf M. Sei $f \in Z(S)$ und $g \in S$. Dann ist $g(f \cdot m) = g(f(m)) = f(g(m)) = f \cdot g(m)$ für $m \in M$. Dies zeigt $f \in T$. Für ein Element $h \in T$ gilt außerdem $(h \circ f)(m) = h(f \cdot m) = f \cdot h(m) = (f \circ h)(m)$, da h eine S-lineare Abbildung ist. Also ist auch $f \in Z(T)$.

„$\supseteq$“ Sei $f \in Z(T)$ und $\mu_r\colon M \to M$ mit $m \mapsto rm$ für ein $r \in R$. Wir zeigen zunächst, dass $\mu_r \in T$. Dazu sei $g \in S$. Dann ist $\mu_r(g \cdot m) = \mu_r(g(m)) = rg(m) = g(rm) = g \cdot \mu_r(m)$. Wegen $f \in Z(T)$ ist also auch $f(rm) = (f \circ \mu_r)(m) = (\mu_r \circ f)(m) = rf(m)$. Dies zeigt, $f \in S$. Für ein $h \in S$ gilt weiter $(f \circ h)(m) = f(h \cdot m) = h \cdot f(m) = (h \circ f)(m)$, da f ein S-lineare Abbildung ist. Also ist auch $f \in Z(S)$.

Aufgabe 58

Zeigen Sie, dass zu jedem $\mathbb{Z}$-Modul A und jedem $a \in A \setminus \{0\}$ ein $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}})$ mit $f(a) \neq 0$ existiert.

Da ${}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$ injektiv ist, genügt es zu zeigen, dass ein $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\langle a \rangle, {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}})$ mit $f(a) \neq 0$ existiert:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \langle a \rangle \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, dotted] \\ & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

Hat a unendliche Ordnung, so können wir $f(na) := {}^{n}/_{2} + \mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{Z}$ definieren. Dann ist f sicher wohldefiniert und $\mathbb{Z}$-linear. Wie gefordert gilt auch $f(a) = {}^{1}/_{2} + \mathbb{Z} \neq 0$. Nehmen wir nun an, dass a die Ordnung $2 \leq m < \infty$ hat. Dann können wir $f(na) := {}^{n}/_{m} + \mathbb{Z}$ definieren. Ist $na = n'a$ für $n, n' \in \mathbb{Z}$, so folgt, $m \mid n - n'$ und ${}^{n}/_{m} - {}^{n'}/_{m} + \mathbb{Z} = \frac{(n-n')}{m} + \mathbb{Z} = 0$. Also ist f wohldefiniert und $\mathbb{Z}$-linear. Außerdem gilt $f(a) = {}^{1}/_{m} + \mathbb{Z} \neq 0$.

Literaturverzeichnis

[1] Frank W. Anderson, Ken R. Fuller: Rings and Categories of Modules. Springer 1998. 2. Auflage.

[2] Ibrahim Assem, Daniel Simson, Andrzej Skowronski: Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Volume 1: Techniques of Representation Theory. Cambridge University Press 2006.

[3] Maurice Auslander, Idun Reiten, Sverre O. Smalø: Representation Theory of Artin Algebras. Cambridge University Press 1995.

[4] Paul E. Bland: Rings and their Modules. de Gruyter 2011.

[5] Y. Drozd, V. V. Kirichenko: Finite dimensional algebras. Springer 1994.

[6] Friedrich Kasch: Moduln und Ringe. Teubner 1977.

[7] Tsi-Yuen Lam: A First Course in Noncommutative Rings. Springer 2001.

[8] Tsi-Yuen Lam: Lectures on Modules and Rings (Graduate Texts in Mathematics 189). Springer 1998.

[9] Richard S. Pierce: Associative Algebras (Graduate Texts in Mathematics). Springer 1982.

[10] Robert Wisbauer: Grundlagen der Modul- und Ringtheorie. Ein Handbuch für Studium und Forschung. Fischer 1988.

[11] Steve Awodey: Category Theory (Oxford Logic Guides). Oxford University Press 2010.

[12] Jiří Adámek, Horst Herrlich, George E. Strecker: Abstract and Concrete Categories The Joy of Cats. 2004. http://katmat.math.uni-bremen.de/acc

[13] Lang. Algebra.

Index