Vorlesung - Höhere Analysis I

Skript: PD Dr. Hans-Gerd Leopold, apl. Prof.
LaTeX-Satz: Markus Weimar

Wintersemester 2007/08
Fakultät für Mathematik und Informatik
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Vorwort

Diese Ausarbeitung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.
Sie entstand im Rahmen der privaten Prüfungsvorbereitung zu oben genannter Vorlesung und enthält daher nur vereinzelt Beweise und keinerlei Bilder, die eventuell für das vollkommene Verständnis notwendig sein könnten. Es wird allerdings gegebenen Falls auf weitere Ausführungen der Vorlesung hingewiesen.
Für Korrekturen und umfassende ergänzende Hinweise möchte ich insbesondere Lars Müller danken.

Inhaltsverzeichnis

1 Metrische und topologische Räume

1.1 Metrische Räume

Definition 1.1.1:
Sei X eine nichtleere Menge.

(i). Eine Abbildung $d\colon X \times X \to [0, \infty)$ heißt **Metrik** oder Abstandsfunktion :⇔ für alle $x, y, z \in X$ gilt:

(M1) $x \neq y \Rightarrow d(x, y) \neq 0$ (Definitheit)

(M2) $d(x, x) = 0$

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)

(M1) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Das Tupel $\boldsymbol{(X, d)}$ heißt dann **metrischer Raum** .

(ii). Gelten für d nur (M2) - (M4), so spricht man von einer **Pseudometrik** oder auch **Halbmetrik** bzw. von einem **pseudometrischen Raum** .

Beispiel:

(i). $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ versehen mit der **Betragsmetrik** $\boldsymbol{d_{|\cdot|}(x, y)} := |y - x|$ sind metrische Räume.

(ii). Jede beliebige nichtleere Menge X wird mit der **diskreten Metrik** .

$$\boldsymbol{d_{dis}(x, y)} := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

zu einem metrischen Raum.

(iii). $\mathbb{R}$ mit der **Arcustangensmetrik** $\boldsymbol{d_{arc}(x, y)} := |\arctan(x) - \arctan(y)|$ ist metrischer Raum (zum Beweis siehe Übungsserie 1).

(iv). $\mathbb{C}$ mit $d(z, w) := |\Re(z) - \Re(w)|$ ist ein peudometrischer Raum, da d hier nur Pseudometrik ist. Denn für $z := 1 + i$ und $w := 1 + 2i$ gilt $d(z, w) = 0$, obwohl $z \neq w$.

(v). Seien $x = (\xi_1, \dots, \xi_n), y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$. Dann definieren alle folgenden Funktionen Metriken auf diesen beiden Mengen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d_1(x,y)} &:= \sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k| \\
\boldsymbol{d_2(x,y)} &:= \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
\boldsymbol{d_p(x,y)} &:= \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ für } 1 \le p < \infty \\
\boldsymbol{d_\infty(x,y)} &:= \max_{k=1,\dots,n} |\xi_k - \eta_k|
\end{aligned}$$

Summiert man dagegen nur bis $n-1$, so werden sie zu Pseudometriken.

(vi). $(\mathbb{R}^2, d_M)$ ist ein metrischer Raum mit

$$\boldsymbol{d_M(x,y)} := \begin{cases} \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}, & x = \lambda y, \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \\ \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} + \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Hier ist der Abstand zweier linear abhängiger Punkte der euklidische und falls die Punkte nicht linear abhängig sind die Summe der Abstände zu einem zentralen Punkt (Nullpunkt). Die Metrik wird in Anlehnung an das französische Eisenbahnnetz / Pariser U-Bahnnetz auch **Metro-Metrik** genannt.

(vii). $(\mathbb{R}^2, d_u)$ mit

$$\boldsymbol{d_u(x,y)} := \begin{cases} |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2| + |\eta_2|, & \xi_1 \neq \eta_1 \\ |\xi_2 - \eta_2|, & \xi_1 = \eta_1 \end{cases}$$

ist ebenfalls ein metrischer Raum. Die Metrik wird auch als **Urwaldmetrik** bezeichnet.

Definition:
Man bezeichnet die Menge aller (unendlichen) **Folgen** über einem Körper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit $\boldsymbol{s} := \{x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \mid \xi_k \in \mathbb{K}\}$.
Man definiert darüber hinaus spezielle Mengen von Folgen mit gewissen Eigenschaften

(Teilmengen von s):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{l_p} &:= \{x \in s \mid \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\} && (\text{ für } 1 \leq p < \infty \text{ }) \\
\boldsymbol{l_\infty} &:= \{x \in s \mid \sup_k |\xi_k| < \infty\} && (\text{ Raum der } \textbf{beschränkten Folgen} \text{ }) \\
\boldsymbol{c} &:= \{x \in s \mid \lim_{k\to\infty} \xi_k \text{ existiert}\} && (\text{ Raum der } \textbf{konvergenten Folgen} \text{ }) \\
\boldsymbol{c_0} &:= \{x \in s \mid \lim_{k\to\infty} \xi_k = 0\} && (\text{ Raum der } \textbf{Nullfolgen} \text{ }) \\
\boldsymbol{F} &:= \{x \in s \mid x = (\xi_1, \ldots, \xi_k, 0, \ldots)\} && (\text{ Raum der } \textbf{finiten Folgen} \text{ }).
\end{aligned}$$

Beispiel (Fortsetzung):
(viii) s bildet mit $d(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}$ einen metrischen Raum. Dabei ist wieder $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ und $y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty}$. Da der zweite Bruch stets ≤ 1 ist und die Reihe über $\frac{1}{2^k}$ konvergiert ist d stets endlich. Zum Beweis der Dreiecksungleichung nutze man die strenge Monotonie der Funktion $f(t) = \frac{t}{1+t}$ auf $[0, \infty)$.
Die Funktionen $d^{(k)}(x,y) := |\xi_k - \eta_k|$ bilden für alle $k \in \mathbb{N}$ ein System von Pseudometriken (Halbnormen) auf s. Durch obigen Ansatz führt ein solches System stets auf eine Metrik.

l_p bildet mit der $\boldsymbol{l_p}$**-Metrik** $\boldsymbol{d_p(x,y)} := (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ einen metrischen Raum. Zum Beweis der Gültigkeit der Metrikaxiome verwendet man vom endlich-dimensionalen Fall ausgehend einen Grenzübergang, sowie die Minkowski'sche Ungleichung für die Dreiecksungleichung.

Aus den Mengen l_∞, c und c_0 erhält man einen metrischen Raum üblicherweise durch die Wahl der **Supremumsmetrik** : $\boldsymbol{d_\infty(x,y)} := \sup_k |\xi_k - \eta_k|$.

Definition:
(i) Für ein Gebiet M (in der Regel $M = [a,b]$) bezeichnet $\boldsymbol{C(M)}$ die Menge der **stetigen Funktionen** $f \colon M \to \mathbb{R}$.
(ii) Ist X eine beliebige Menge, so heißt $\boldsymbol{B(X)} := \{f \colon X \to \mathbb{C} \mid \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty\}$ die Menge der **beschränkten Funktionen** über X.

Beispiel (Fortsetzung):
(ix) $\boldsymbol{d_\infty(f,g)} := \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ definiert die Metrik auf $C([a,b])$.
Auf $B(X)$ ist durch $d_\infty(f,g) := \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$ eine Metrik gegeben. Wählt man für alle Teilmengen $Y \subset X$ die Pseudometrik $d_{\infty,Y}(f,g) := \sup_{x\in Y} |f(x) - g(x)|$, so kann man auch aus diesem, X ausschöpfenden System durch obigen Trick eine Metrik auf ganz X konstruieren.

(x) Für $1 \leq p < \infty$ bilden auch die Funktionen

$$\boldsymbol{d_p(f,g)} := \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Metriken auf $C([a,b])$. Dabei ist d_p offensichtlich eine symmetrische Abbildung $C([a,b]) \times C([a,b]) \to [0,\infty)$. Ist $f = g$ so folgt $d_p(f,g) = 0$ unmittelbar, die Umkehrung beweist man indirekt mit dem Argument, dass die Funktion $f - g$ stetig sein muss. Für die Dreiecksungleichung nutzt man die gewöhnliche Dreiecksungleichung für Beträge und die Linearität des Integrals.

Definition 1.1.2:
Sei (X,d) ein metrischer Raum.
(i) Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ heißt $\boldsymbol{K_\varepsilon(x)} := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ **offene Kugel** mit Radius ε um x.
(ii) Ist $M \subset X$, so heißt $x \in M$ **innerer Punkt** von M und M heißt **Umgebung** von x :$\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x) \subset M$.

Beispiel:
(i) In $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist $K_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ eine offene Kugel.

(ii) Kreise in $(\mathbb{R}^2, d_2)$: $(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 < \varepsilon^2$.

(iii) (X, d_{dis}):

$$K_\varepsilon(x) = \begin{cases} X, & \varepsilon > 1 \\ \{x\}, & 0 < \varepsilon \leq 1 \end{cases}$$

Definition 1.1.3:
Sei (X,d) ein pseudometrischer Raum.
$O \subset X$ heißt **offene Menge** (in (X,d)) :$\Leftrightarrow$ $\forall x \in O$ gilt: x ist innerer Punkt von O.

Beispiel:
Kreise ohne Rand im $\mathbb{R}^2$ sind offene Mengen

Bemerkung:
Offene Kugeln $K_\varepsilon(x)$ sind tatsächlich offene Mengen nach Definition 1.1.3.

Satz 1.1.1:
Sei (X, d) ein pseudometrischer Raum und $U \subset \mathcal{P}(X)$ das System aller offenen Mengen in (X, d). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\text{(i) } \emptyset, X \in U \\
&\text{(ii) } O_1, O_2 \in U \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in U \\
&\text{(iii) } O_i \in U \text{ für } i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in U.
\end{aligned}$$

Beweis::
Offensichtlich. ■

Bemerkung:
Durch Induktion kann man (ii) noch auf endlich viele Mengen O ausweiten.
I aus (iii) ist eine beliebige Indexmenge (z.B.: $\mathbb{N}$ oder auch $\mathbb{R}$), d.h. auch die überabzählbare Vereinigung offener Mengen bleibt offen. Der Durchschnitt von abzählbar unendlich vielen offenen Mengen muss dagegen schon nicht mehr offen sein, wie nachfolgendes Beispiel zeigt:

Beispiel:
Wähle $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ als metrischen Raum. Darin sind die Mengen $O_k := (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ für alle $k \in \mathbb{N}$ offen, die Menge $\{0\}$ jedoch nicht. Dennoch gilt: $\bigcap_{k=1}^{\infty} O_k = \{0\}$.

Definition 1.1.4:
Sei (X, d) ein metrischer Raum.
Die Menge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen** $:\Leftrightarrow X \setminus A$ ist offen in (X, d).

Bemerkung:
Abgeschlossen und offen sind nicht die einzigen Zustände. Es existieren auch Mengen die weder offen noch abgeschlossen sind.

Folgerung:
Sei (X, d) ein pseudometrischer Raum. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\text{(i) } X, \emptyset \text{ sind abgeschlossen} \\
&\text{(ii) } A_1, A_2 \subset X \text{ abgeschlossen } \Rightarrow A_1 \cup A_2 \text{ abgeschlossen} \\
&\text{(iii) } A_i \subset X \text{ für } i \in I \text{ abgeschlossen } \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \text{ abgeschlossen.}
\end{aligned}$$

Beweis::
Folgt leicht anhand von Definition 1.1.4, Satz 1.1.1 und den DeMorgan'schen Regeln. ■

Definition 1.1.5:
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann heißt

$$\overline{\boldsymbol{M}} := \bigcap_{\substack{M \subset A \\ A \text{ abgeschl.}}} A \qquad \textbf{Abschluss von } \boldsymbol{M}$$

$$\boldsymbol{M^o} = \operatorname{int}(M) := \bigcup_{\substack{O \subset M \\ O \text{ offen}}} O \qquad \textbf{Inneres von } \boldsymbol{M}$$

Bemerkung:
$\overline{M}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält. Sei dazu angenommen es existiere $B \subset \overline{M}$ abgeschlossen mit $M \subset B \neq \overline{M}$, dann folgt sofort der Widerspruch $B \subset \overline{M} = \bigcap\{A \mid M \subset A, A \text{ abgeschl.}\} \subset B$ zu $B \neq \overline{M}$.
Analog ist M^o die größte offene Menge, welche ganz in M enthalten ist.

Definition:
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann heißt $x \in X$ **Berührungspunkt** der Menge $M :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ gilt $K_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$.

Satz:
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann gilt:

(i) $\overline{M} = \{x \in X \mid x \text{ ist Berührungspunkt von } M\}$
(ii) $M^o = \{x \in X \mid x \text{ ist innerer Punkt von } M\}$
(iii) $X \setminus M^o = \overline{X \setminus M}$
(iv) $X \setminus \overline{M} = (X \setminus M)^o$
(v) $\overline{S} \cup \overline{T} = \overline{S \cup T}$
(vi) $(S \cap T)^o = S^o \cap T^o$.

Beweis::
Siehe Übungsserie 1. ■

Definition 1.1.6:
Sei (X, d) ein (pseudo-) metrischer Raum. Die Folge $(x_j)_{j=1}^\infty \subset X$ heißt **konvergent** in $X :\Leftrightarrow \exists x \in X$ und $\forall \varepsilon > 0 \, \exists j_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $d(x_j, x) < \varepsilon$ für alle $j \geq j_0(\varepsilon)$. Man schreibt in diesem Falle $x_j \to x$, $\lim_{j\to\infty} x_j = x$ oder äquivalent $\lim_{j\to\infty} d(x, x_j) = 0$.

Bemerkung:
Offensichtlich konvergiert die Folge, wenn für alle $j \geq j_0(\varepsilon)$ gilt $x_j \in K_\varepsilon(x)$.
Im metrischen Raum ist der Grenzwert einer konvergenten Folge stets eindeutig bestimmt. Zum Beweis wählt man $\varepsilon := \frac{d(x,x')}{3} > 0$, wobei $x \neq x'$ die angenommenen Grenzwerte bezeichnen. Ab der Stelle j_0 liegen dann alle x_j in $K_\varepsilon(x)$ und ab j_1 alle in $K_\varepsilon(x')$, nach der Wahl des ε gilt jedoch $K_\varepsilon(x) \cap K_\varepsilon(x') = \emptyset$ (Widerspruch).
Für pseudometrische Räume ist das nicht mehr richtig. Beispielsweile konvergiert in $\mathbb{C}$ mit $d(z,w) := |\Re(z) - \Re(w)|$ die Folge $z_j = \frac{1}{j}$ gegen jedes $z = 0 + yi$ für $y \in \mathbb{R}$.

Satz 1.1.2:
Ist (X,d) ein metrischer Raum und $M \subset X$, so gilt: $x \in \overline{M} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (x_j)_{j=1}^\infty \subset M$ mit $x_j \to x$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Bemerkung:
Ein (pseudo-) metrischer Raum induziert eine topologische Struktur auf X (Siehe dazu Abschnitt 1.2), aber auch eine uniforme Struktur, die sich in den Begriffen der Cauchy-Folge, Vollständigkeit oder gleichmäßige Stetigkeit manifestiert.

Definition 1.1.7:
Sei (X,d) ein (pseudo-) metrischer Raum. Die Folge $(x_j)_{j=1}^\infty \subset X$ heißt **Cauchy-Folge** :⇔ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $j_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $d(x_j, x_l) < \varepsilon$ für alle $j, l \geq j_1(\varepsilon)$.

Bemerkung:
Im (pseudo-) metrischer Raum ist jede konvergente Folge stets eine Cauchy-Folge, denn konvergiert $(x_j)_{j=1}^\infty$ gegen x, so folgt $d(x_j,x_l) \leq d(x_j,x) + d(x,x_l) < 2\varepsilon$ für $j,l \geq j_1(\varepsilon)$.

Definition 1.1.8:
Ein (pseudo-) metrischer Raum (X,d) heißt **vollständig** :⇔ Jede Cauchy-Folge konvergiert in X.

Beispiel:
(i) Die Räume $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sind vollständig.

(ii) $(\mathbb{R}^n, d_p)$ und $(\mathbb{C}^n, d_p)$ sind vollständig, denn $d_p(x_j, x) \to 0 \Leftrightarrow$ für alle $k = 1, \ldots, n$ gilt $\xi_k^{(j)} \to \xi_k$ in $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$).

(iii) Die Räume (l_p, d_p) sind vollständig für $1 \leq p \leq \infty$.
Dazu sei $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in l_p $(1 \leq p < \infty)$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $j_0(\varepsilon)$, sodass für alle $j, l \geq j_0(\varepsilon)$ gilt

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^j - \xi_k^l|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

Für beliebiges $\delta > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ ist damit $|\xi_k^j - \xi_k^l| < \delta$, für $j, l \geq j_1(\delta, k)$. Also bildet jede Komponente jeweils eine Cauchy-Folge $(\xi_k^j)_{j=1}^{\infty}$ in $\mathbb{C}$. Da $\mathbb{C}$ vollständig ist, existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $\xi_k \in \mathbb{C}$ mit $\xi_k^j \to \xi_k$. Man setzt $x := (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$. Mit obiger Ungleichung folgt für fixiertes $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{N} |\xi_k^j - \xi_k^l|^p < \widetilde{\varepsilon} && j, l \geq j_0(\widetilde{\varepsilon}) \\
\overset{l\to\infty}{\longrightarrow} \quad & \sum_{k=1}^{N} |\xi_k^j - \xi_k|^p < \widetilde{\varepsilon} && j \geq j_0(\widetilde{\varepsilon}) \\
\overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \quad & \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^j - \xi_k|^p < \widetilde{\varepsilon} && j \geq j_0(\widetilde{\varepsilon})
\end{aligned}$$

Damit konvergiert die Folge $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ gegen x in l_p. Dass $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ selbst in l_p liegt zeigt folgende Abschätzung mithilfe der Minkowski'schen Ungleichung:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \xi_k^j + \xi_k^j|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \xi_k^j|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^j|^p < \infty$$

Die Vollständigkeit von l_∞ kann wie folgt nachgewiesen werden:
Sei $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subset l_\infty$ eine beliebige Cauchy-Folge. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $j_1(\varepsilon)$, sodass für alle $j, l \geq j_1(\varepsilon)$ gilt $\sup_k |\xi_k^{(j)} - \xi_k^{(l)}| = d_\infty(x_j, x_l) < \varepsilon$. Daher ist für jedes k die Folge $(\xi_k^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Da diese Räume vollständig sind, existiert für jedes k ein ξ_k mit $\xi_k^{(j)} \to \xi_k$ für $j \to \infty$. Bezeichne nun $x := (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ und zeige, dass $d_\infty(x_j, x) \to 0$ gilt.

$$\begin{aligned}
|\xi_k^{(j)} - \xi_k| &\leq |\xi_k^{(j)} - \xi_k^{(l)}| + |\xi_k^{(l)} - \xi_k| \\
&\leq d_\infty(x_j, x_l) + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ für } l \geq l_0(\frac{\varepsilon}{2}, k) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ für } j, l \geq j_1(\frac{\varepsilon}{2})
\end{aligned}$$

Damit ist für alle k: $|\xi_k^{(j)} - \xi_k| < \varepsilon$, für $j \geq j_1(\frac{\varepsilon}{2})$, denn es werden nur Bedingungen an j gestellt. Also gilt $\sup_k |\xi_k^{(j)} - \xi_k| \leq \varepsilon$, für $j \geq j_1(\frac{\varepsilon}{2})$. Also ist l_∞ ein vollständiger metrischer Raum.

(iv) Der Raum $C([a,b])$ ist vollständig bezüglich der Supremumsmetrik, d.h. bzgl. $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$, aber unvollständig bezüglich der d_1-Metrik. Betrachte dazu die Folge $(f_j)_{j=1}^\infty$ mit

$$f_j(x) := \begin{cases} 0, & -1 \le x \le -\frac{1}{j} \\ \frac{jx+1}{2}, & -\frac{1}{j} < x < \frac{1}{j} \\ 1, & \frac{1}{j} \le x \le 1 \end{cases}$$

welche eine nicht in $C([-1,1])$ konvergente Cauchy-Folge bzgl. d_1 darstellt (denn es ist $d_1(f_j,f_k) < \max(\frac{1}{k},\frac{1}{j}) < \varepsilon$ für $k,j \ge j_1(\varepsilon)$). Bezüglich d_∞ ist $(f_j)_{j=1}^\infty$ nicht mal eine Cauchy-Folge, denn es ist $\sup_{x\in[-1,1]}|f_j(x)-f_k(x)| = \frac{1-\frac{j}{k}}{2}$ (o.B.d.A $j<k$).

Bemerkung:
Verschiedene Metriken auf einer Menge X können zwar die gleiche Topologie aber unterschiedliche uniforme Strukturen erzeugen, wie folgende Beispiele zeigen:

Beispiel:
(i) $X = \mathbb{R}$ mit den Metriken $d_{|\cdot|}(x,y) = |x-y|$ und $d_{arc} = |\arctan(x) - \arctan(y)|$. Wie in Übungsserie 1 gezeigt stimmen hier die Systeme der offenen Mengen überein, das heißt es wird die gleiche Topologie induziert. In $(\mathbb{R},|\cdot|)$ konvergiert jede Cauchy-Folge, daher ist dieser Raum vollständig. In $(\mathbb{R}, d_{arc})$ ist aber beispielsweise die Folge $x_j = j$ eine Cauchy-Folge (in $(\mathbb{R},|\cdot|)$ nicht!) ohne Grenzwert in $\mathbb{R}$, daher ist $(\mathbb{R}, d_{arc})$ nicht vollständig.

(ii) Wähle $X := \{\frac{1}{n+1} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ zusammen mit $d_{|\cdot|}$. Die Cauchy-Folge $x_j := \frac{1}{j+1}$ liegt zwar in X, konvergiert dort aber nicht, denn $0 \neq X$. Daher ist $(X, d_{|\cdot|})$ unvollständig. Zusammen mit der diskreten Metrik ist die Folge jedoch keine Cauchy-Folge, denn bei dieser Metrik müssen Folgen ab einer gewissen Stelle konstant sein, um Cauchy-Folge zu sein. Diese sind dann sicher konvergent, daher ist (X, d_{dis}) vollständig. Die erzeugte Topologie der beiden Räume ist allerdings die gleiche.

Lemma:
Ist (X,d) ein (pseudo-) metrischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge, so wird durch d eine (pseudo-) Metrik auf M induziert:

$$d_M(x,y) := d(x,y) \quad \forall x,y \in M.$$

Beweis::
Offensichtlich erfüllt d_M alle Bedingungen für eine Metrik auf M. ∎

Satz:
Zu jedem metrischen Raum (X, d) gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\widehat{X}, \widehat{d})$ und eine Isometrie $i\colon X \to \widehat{X}$ (d.h. $\forall x, y \in X$ gilt $d(x, y) = \widehat{d}(i(x), i(y))$), sodass gilt $\overline{i(X)} = \widehat{X}$.

Beweis::
Zur Idee siehe Vorlesung. ■

Beispiel:
$\mathbb{Q}$ kann eindeutig bis auf Isomorphie vervollständigt werden. Dabei entsteht $\mathbb{R}$. In diesem Sinne repräsentiert jede reelle Zahl eine Äquivalenzklasse von Cauchy-Folgen, die gegen diese konvergieren (siehe Beweisidee).

Definition 1.1.9 (Überdeckungskompaktheit):
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge.
(i) (X, d) heißt **(überdeckungs-) kompakt** :⇔ Aus jeder offenen Überdeckung $X \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ (mit O_i offen) kann man endlich viele O_i auswählen, welche bereits ganz X überdecken ($X \subset \bigcup_{l=1}^{L} O_{i_l}$).
(ii) M heißt **(überdeckungs-) kompakt** :⇔ Aus jeder offenen Überdeckung von M lässt sich stets eine endliche Überdeckung von M auswählen.

Bemerkung:
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Dann ist (M, d_M) wieder ein metrischer Raum und die offenen Mengen O_M in (M, d_M) lassen sich jeweils darstellen als $O_M = O_X \cap M$. Die Frage ob M überdeckungskompakt (gemäß (ii)) ist, ist nun äquivalent zur Frage ob (M, d_M) überdeckungskompakt (nach (i)) ist.

Beispiel:
Wählt man $X = \mathbb{R}$ und $M = [1, 2]$, so ist die Menge $[1, \frac{3}{2})$ offen in (M, d_M), da der Raum dort endet.

Definition 1.1.10 (Präkompaktheit):
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann heißt M **(überdeckungs-) präkompakt** :⇔ $\overline{M}$ ist kompakt.

Lemma (Eigenschaften des Kompaktheitsbegriffs):
Ist (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$, so folgt:
(i) M kompakt ⇒ M präkompakt und abgeschlossen.
(ii) (X, d) kompakt, $M \subset X$ ⇒ M präkompakt.

Beweis::
(i) mit dem Begriff der Folgenkompaktheit (siehe später).
(ii) Offensichtlich. ∎

Definition 1.1.11 (Folgenkompaktheit, ε-Netz):
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge.
(i) M heißt **(folgen-) kompakt** :⇔ Aus jeder Folge $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subset M$ kann eine konvergente Teilfolge ausgewählt werden, wobei der Grenzwert in M liegt.
(ii) M heißt **(folgen-) präkompakt** :⇔ Aus jeder Folge $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subset M$ kann eine konvergente Teilfolge ausgewählt werden.
(iii) $E \subset X$ heißt **ε-Netz** für M :⇔ Für jedes $x \in M$ existiert stets $y_x \in E$ mit $d(x, y_x) < \varepsilon$, d.h. $M \subset \bigcup_{y \in E} K_\varepsilon(y)$.

Beispiel:
Wähle $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $M = (a, b]$, dann ist M nicht (folgen-) kompakt, aber (folgen-) präkompakt.

Lemma:
Ist (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ (folgen-) präkompakt, so existiert für jedes $\varepsilon > 0$ stets ein endliches ε-Netz für M, d.h. $\exists x_1, \ldots, x_L \in X$ mit $M \subset \bigcup_{l=1}^{L} K_\varepsilon(x_l)$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Satz 1.1.3 (Satz von Heine-Borel):
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Dann ist
M (überdeckungs-) kompakt ⇔ M ist (folgen-) kompakt.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Bemerkung:
Das heißt es gibt im metrischen Raum nur DIE Kompaktheit, da beide Begriffe hier äquivalent sind.

Lemma:
Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $M \subset X$. Dann sind äquivalent:
(i) M ist präkompakt.
(ii) $\forall \varepsilon > 0$ existiert ein endliches ε-Netz für M.
(iii) $\forall \varepsilon > 0$ existiert ein präkompaktes ε-Netz für M.

BEWEIS::
(i) ⇒ (ii): Lemma von oben.
(ii) ⇒ (iii): trivial, da jede endliche Menge kompakt (Jede Folge enthält konvergente Teilfolge: da nur endliche viele Elemente da sind, muss mindestens eines unendlich oft vorkommen), also insbesondere auch präkompakt ist.
Rest: Siehe Vorlesung. ■

Definition:
Ist (X, d) ein metrischer Raum, so heißt $M \subset X$ **beschränkt** $:\Leftrightarrow \exists z \in X$, $\exists D > 0$ mit $M \subset K_D(z)$.

Lemma:
Im metrischen Raum gilt:
(i) Jede endliche Menge ist präkompakt.
(ii) Jede präkompakte Menge ist beschränkt.

BEWEIS::
(i) Endliche Mengen bilden selbst ihr eigenes ε-Netz.
(ii) Ist eine Menge präkompakt, so existiert nach obigem Lemma ein endliches ε-Netz $x_1, \ldots, x_l \in X$. Dann gilt $M \subset K_{2l\varepsilon}(x_i)$ für ein beliebiges $i \in \{1, \ldots, l\}$. ■

Bemerkung:
Man kann die Präkompaktheit einer Menge auch quantitativ messen:
Sei M eine präkompakte Teilmenge eines metrischen Raumes. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz für M. Man setzt

$$N(\varepsilon) := \min\{N \in \mathbb{N} \,|\, M \text{ wird durch } N \text{ Kugeln mit Radius } \varepsilon \text{ überdeckt}\}$$
$$\boldsymbol{e_k(M)} = E_{2^{k-1}}(M) := \inf\{\varepsilon > 0 \,|\, 2^{k-1} \text{ Kugeln vom Radius } \varepsilon \text{ überdecken } M\}$$

als Maße der Präkompaktheit. Dabei heißen die $e_k(M)$ (dynamische) **Entropiezahlen** der Menge M. Es gilt zum Beispiel:

$$e_{k+l+1}(M) \leq e_k(M) \cdot e_l(M).$$

1.2 Topologische Räume

Definition 1.2.1:
Ist X eine Menge und $\tau \subset \mathcal{P}(X)$, so heißt $\boldsymbol{(X, \tau)}$ **topologischer Raum** :⇔

$$\begin{aligned} &\text{(i) } \emptyset, X \in \tau \\ &\text{(ii) } O_1, O_2 \in \tau \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \tau \\ &\text{(iii) } O_i \in \tau, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \tau \end{aligned}$$

Die Mengen / Elemente der **Topologie** $\boldsymbol{\tau}$ werden als **offene Mengen** bezeichnet.

Lemma 1.2.1:
Ist (X, d) ein (pseudo-) metrischer Raum, so bilden die bzgl. d offenen Mengen eine Topologie τ_d auf X. (X, τ_d) ist dann ein topologischer Raum.

Beweis::
Folgt aus Satz 1.1.1. ∎

Definition:
(i) Man bezeichnet (X, τ_d) oder nur $\boldsymbol{\tau_d}$ als die **von** $\boldsymbol{(X, d)}$ **induzierte / erzeugte Topologie** .
(ii) Kann eine Topologie τ eines topologischen Raumes durch eine Metrik erzeugt werden (d.h. $\exists d$, mit $\tau = \tau_d$), so heißt (X, τ) **metrisierbar** .

Bemerkung:
Nicht jeder topologische Raum ist metrisierbar, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel (nicht metrisierbarer topologischer Raum):
$X = \{a, b\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$. Offensichtlich ist (X, τ) ein topologischer Raum. Man bezeichnet ihn als **Sierpinski-Raum** . (X, τ) ist jedoch nicht metrisierbar. Zum Beweis siehe Vorlesung.

Beispiel:
(i) X beliebig und $\tau_{in} = \{\emptyset, X\}$ bilden trivialerweise einen topologischen Raum. $\boldsymbol{\tau_{in}}$ wird als **indiskrete Topologie** bezeichnet. (X, τ_{in}) ist mittels $d_{in}(x, y) = 0$ (für alle $x, y \in X$) peusdo-metrisierbar.

(ii) X beliebig und $\tau_{dis} = \mathcal{P}(X)$ bilden ebenfalls einen topologischen Raum. $\boldsymbol{\tau_{dis}}$ heißt **diskrete Topologie** . Setzt man $d_{dis}(x, y) = 0$, für $x = y$ und $d_{dis}(x, y) = 1$ sonst, so ist ist (X, τ_{dis}) durch diese diskrete Metrik metrisierbar.

Lemma:
Für jeden topologischen Raum (X, τ) gilt: $\tau_{in} \subset \tau \subset \tau_{dis}$.

Beweis::
Klar. ∎

Bemerkung:
Verschiedene (Pseudo-) Metriken können durchaus die selbe Topologie erzeugen.

Beispiel (induzierte Topologien):
(i) $X = \mathbb{C}^n$ mit d_p für $1 \leq p \leq \infty$ erzeugen $\tau_{d_1} = \tau_{d_p} = \tau_{d_\infty}$ (alle offenen Mengen bezüglich der p-Metriken stimmen überein).

(ii) $X = \mathbb{R}$ mit $d_{|\cdot|}$ oder d_{arc} induzieren jeweils $\tau_{|\cdot|} = \tau_{d_{arc}}$. Das heißt die topologischen Räume $(\mathbb{R}, \tau_{|\cdot|})$ und $(\mathbb{R}, \tau_{d_{arc}})$ sind äquivalent, aber die entsprechenden metrische Räume sind verschieden bzw. haben verschiedene Eigenschaften. $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ ist vollständig und es existieren dort unbeschränkte Mengen. $(\mathbb{R}, d_{arc})$ dagegen ist nicht vollständig und alle Mengen sind durch π beschränkt (Vergleiche Übungsserie 1).

Definition 1.2.2:
Sei (X, τ) ein topologischer Raum. $A \subset X$ heißt **abgeschlossen** $:\Leftrightarrow X \setminus A \in \tau$ (offen).

Folgerung:
Ist (X, τ) ein topologischer Raum, so gilt:

(i) $X, \emptyset$ sind abgeschlossen

(ii) $A_1, A_2 \subset X$ abgeschlossen $\Rightarrow A_1 \cup A_2$ abgeschlossen

(iii) $A_i \subset X$ für $i \in I$ abgeschlossen $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen

Beweis::
Folgt aus Definition 1.2.1 und 1.2.2. ∎

Definition 1.2.3:
Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $M \subset X$. Dann heißt

(i) $M^o := \bigcup_{\substack{O \subset M \\ O \text{ offen}}} O$ **Inneres von M** und

(ii) $\overline{M} := \bigcap_{\substack{M \subset A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$ **Abschluss von M**

Definition 1.2.4:
Sei (X, τ) ein topologischer Raum, $x \in X$ und $U \subset X$.
(i) U heißt **Umgebung** von x (bezüglich τ) $:\Leftrightarrow \exists O \in \tau$ mit $x \in O$ und $O \subset U$.
(ii) $U_\tau(x) := \{U \,|\, U \text{ Umgebung von } x\}$ heißt **Umgebungssystem** von x bezüglich τ.

Bemerkung:
Umgebungen müssen keine offenen Mengen mehr sein. Daher ist es in der Stetigkeitsdefintion aus Analysis I auch egal, ob man $< \varepsilon$ oder $\leq \varepsilon$ schreibt.

Lemma (Eigenschaften):
Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Dann gilt für $x \in X$:
(i) Ist $U \subset X$, so impliziert $U \in U_\tau(x)$ stets $x \in U$.
(ii) Sind $U, V \subset X$, so folgt aus $U, V \in U_\tau(x)$: $U \cap V \subset U_\tau(x)$.
(iii) Sind $U, V \subset X$, so impliziert $U \in U_\tau(x)$ und $U \subset V$ stets $V \in U_\tau(x)$.
(iv) Für alle $U \in U_\tau(x)$ existiert $V \in U_\tau(x)$ mit $V \subset U$ und für alle $y \in V$ ist $V \in U_\tau(y)$.

BEWEIS::
Siehe Vorlesung. ■

Definition 1.2.5:
Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Folge $(x_j)_{j=1}^\infty \subset X$ heißt **konvergent** in (X, τ) $:\Leftrightarrow \exists x \in X$ und $\forall U \in U_\tau(x)$ existiert $j_0(U) \in \mathbb{N}$ mit $x_j \in U$ für $j \geq j_0(U)$.
Man schreibt in diesem Falle $x = \lim_{j\to\infty} x_j$, oder auch $x_j \to x$ (für $j \to \infty$).

Bemerkung:
(i) In metrischen Räumen wählt man spezielle Kugelumgebungen $U = K_\varepsilon(x)$ für $\varepsilon > 0$.
(ii) In pseudo-metrischen Räumen gilt: $x_j \to x$ bzgl. $d \Leftrightarrow x_j \to x$ bzgl. τ_d.
(iii) Für konvergente Folgen muss der Grenzwert nicht eindeutig bestimmt sein. Betrachte dazu einen pseudo-metrischen Raum und die davon induzierte Topologie.

Definition 1.2.6:
Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **Hausdorff-Raum** (erfüllt das **Hausdorff'sche Trennungsaxiom** , besitzt die **Hausdorff-Eigenschaft**) $:\Leftrightarrow$ Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existieren $U \in U_\tau(x)$ und $V \in U_\tau(y)$, sodass $U \cap V = \emptyset$.

Bemerkung:
In einem topologischen Raum mit der Hausdorff'schen Eigenschaft gibt es also um zwei verschiedene Punkte auch zwei offene Umgebungen, welche von einander unabhängig sind. Somit sind alle Punkte von einander trennbar. In diesen Räumen ist der Grenzwert (falls er existiert) stets eindeutig bestimmt - Vergleiche dazu den Widerspruchsbeweis, dass der Grenzwert im metrischen Raum eindeutig bestimmt ist.

Definition 1.2.7:
Sei (X, τ) ein topologischer Raum, $x \in X$ und $M \subset X$. Dann heißt x:
(i) **innerer Punkt** von $M :\Leftrightarrow \exists U \in U_\tau(x)$ mit $U \subset M$.
(ii) **äußerer Punkt** von $M :\Leftrightarrow x$ ist innerer Punkt von $X \setminus M$.
(iii) **Berührungspunkt** von $M :\Leftrightarrow \forall U \in U_\tau(x)$ gilt $U \cap M \neq \emptyset$.
(iv) **Häufungspunkt** von $M :\Leftrightarrow \forall U \in U_\tau(x)$ gilt $(U \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset$.
(v) **Randpunkt** von $M :\Leftrightarrow \forall U \in U_\tau(x)$ gilt $U \cap M \neq \emptyset$ und $U \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$. (Berührungspunkt von M und von $X \setminus M$). Die Menge aller **Randpunkte** von M wird mit $\boldsymbol{\partial M}$ bezeichnet.
(vi) **isolierter Punkt** von $M :\Leftrightarrow x \in M$ und $\exists U \in U_\tau(x)$ mit $(U \setminus \{x\}) \cap M = \emptyset$ (bzw. $U \setminus \{x\} \subset X \setminus M$).

Lemma (Eigenschaften):
Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $M, N \subset X$. Es gilt:
(i) $M^o = \{x \in X \,|\, x \text{ ist innerer Punkt von } M\}$.
(ii) $\overline{M} = \{x \in X \,|\, x \text{ ist Berührungspunkt von } M\}$.
(iii) $\partial M = \overline{M} \setminus M^o$.
(iv) $X \setminus M^o = \overline{X \setminus M}$.
(v) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$.
(vi) $(M \cap N)^o = M^o \cap N^o$.

Beweis::
Einfach. ∎

Lemma (Analogon zu Satz 1.1.2):
Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Ist $(x_j)_{j=1}^\infty \subset M \subset X$ mit $x_j \to x$, so gilt $x \in \overline{M}$.

Beweis::
Analog zum metrischen Fall. ∎

Bemerkung:
Im metrischen Raum galt sogar auch die Umkehrung: $x \in \overline{M} \Rightarrow \exists (x_j)_{j=1}^\infty \subset M$ mit $x_j \to x$. Offensichtlich kann das im Allgemeinen im topologischen Raum nicht mehr gelten. Zum Beweis Siehe Vorlesung.

Definition 1.2.8:
Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $x \in X$.
$U_{\tau,B}(x) \subset U_\tau(x)$ heißt **Umgebungsbasis** von x bzgl. $\tau :\Leftrightarrow$ Für alle $V \in U_\tau(x)$ existiert $U \in U_{\tau,B}(x)$ mit $U \subset V$.

Bemerkung:
Für eine Folge in einem topologischen Raum genügt es für die Konvergenz lediglich die Existenz eines j_0 für alle Mengen der Umgebungsbasis zu prüfen. Dies entspricht dem Ansatz sich im metrischen Raum von allgemeinen ε-Kugeln auf Kugeln mit dem Radius $\frac{1}{j}$ für $j \in \mathbb{N}$ zurück zu ziehen.

Definition:
Der topologische Raum (X, τ) erfüllt das **erste Abzählbarkeitsaxiom** $:\Leftrightarrow$ Für jedes $x \in X$ existiert eine abzählbare Umgebungsbasis $U_{\tau,B}(x)$.

Bemerkung:
In einem topologischen Raum, welcher das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt gilt auch stets die Umkehrung des vorrigen Lemmas (bzw. Satz 1.1.2).

Beispiel:
(i) In jedem topologischen Raum (X, τ) ist $U_{\tau,B,\text{ offen}}(x) := \{O \,|\, O \in \tau, x \in O\}$ Umgebungsbasis für alle $x \in X$.

(ii) Ist (X, d) ein (pseudo-) metrischer Raum und τ_d die durch d erzeugte Topologie. Dann ist $U_{\tau_d,B,\text{ offen}}(x) := \{K_\varepsilon(x) \,|\, \varepsilon > 0\}$ eine überabzählbare Umgebungsbasis für jedes $x \in X$ (denn: $U \in U_\tau(x) \Rightarrow \exists O \in \tau$ mit $O \subset U$ und $x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x) \subset O$).

(iii) In Fall des Beispiel (ii) existiert jedoch auch immer eine abzählbare Umgebungsbasis $\{K_{\frac{1}{j}}(x) \,|\, j \in \mathbb{N}\}$ aus offenen Mengen.

Bemerkung:
Nach dem letzten Beispiel erfüllt also jede durch eine (Pseudo-) Metrik d induzierte Topologie (X, τ_d) das erste Abzählbarkeitsaxiom.
In allgemeinen topologischen Räumen gilt das jedoch nicht. Betrachte dazu das Beispiel der Koendlichen Mengen: $\tau_C = \{O \subset X \,|\, X \setminus O \text{ endlich }\} \cup \{\emptyset\}$.

Beispiel:
Betrachte den topologischen Raum $(\mathbb{R}, \tau_C)$. Hier besitzt kein $x \in \mathbb{R}$ bezüglich τ_C eine abzählbare Umgebungsbasis, denn nimmt man an, dass für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ die Menge $B(x) := \{B_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis ist, so ist $\bigcap_{j=1}^\infty B_j = \{x\}$. Denn offensichtlich ist $x \in B_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$, also gilt $\{x\} \subset \bigcap_{j=1}^\infty B_j$. Und für $y \neq x$ ist $y \notin \bigcap_{j=1}^\infty B_j$, denn es ist $\mathbb{R} \setminus \{y\} \in \tau_C$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{y\} \in U_{\tau_C}(x)$. Da B eine Umgebungsbasis ist, existiert ein $B_j \in B$ mit $B_j \subset \mathbb{R} \setminus \{y\}$. Das wäre ein Widerspruch zu $y \in \bigcap_{j=1}^\infty B_j$.
Dann ist $\mathbb{R} \setminus \{x\} = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{j=1}^\infty B_j = \bigcup_{j=1}^\infty (\mathbb{R} \setminus B_j)$ eine abzählbare Vereinigung endlicher Mengen (da $B_j \in \tau_C$). $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ ist aber offensichtlich überabzählbar (Widerspruch!).

Bemerkung:
Damit weiß man auch, dass $(\mathbb{R}, \tau_C)$ nicht metrisierbar sein kann, da sonst immer eine abzählbare Umgebungsbasis existiert.
Alle obigen Überlegungen gelten analog für abgeschlossene Mengen.
Im Folgenden sollen Netze, eine Verallgemeinerung des Folgenbegriffs nach Moore / Smith (1922), betrachtet werden, um damit weitere aus dem metrischen Raum bekannte Eigenschaften für topologische Räume übernehmen zu können.

Definition:
Sei (X, τ) ein topologischer Raum.
(a) $(I, \leq)$ heißt **gerichtete Menge** $:\Leftrightarrow \forall i, j, k \in I$ gilt:

$$\begin{aligned} &\text{(i) } i \leq i \\ &\text{(ii) } i \leq j, j \leq k \Rightarrow i \leq k \\ &\text{(iii) } i_1, i_2 \in I \Rightarrow \exists j \in I \text{ mit } i_1 \leq j, i_2 \leq j. \end{aligned}$$

(b) Ist $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge, so bezeichnet man eine Abbildung $I \to X$, notiert als $(x_i)_{i \in I} \subset X$, als **Netz** .
(c) Ein Netz $(x_i)_{i \in I} \subset X$ **konvergiert** gegen $x \in X$ (schreibe $x_i \to x$) $:\Leftrightarrow$ Es existiert ein $x \in X$ und für alle $U \in U_\tau(x)$ existiert $i(U) \in I$, sodass $x_i \in U$ für alle $i \geq i(U)$ gilt.

Beispiel:
Eine triviale gerichtete Menge ist $I = \mathbb{N}$. Die entsprechenden Netze sind dann einfach die bereits bekannten Folgen.
Eine andere gerichtete Menge wäre die Umgebungsbasis $U_{\tau,B}(x)$ eines Punktes x eines topologischen Raumes, mit der Relation $\leq$ für $U, V \in U_{\tau,B}(x)$ wie folgt definiert:
$V \leq U :\Leftrightarrow U \subset V$. Dann ist U mit $U \geq V_1$, $U \geq V_2$ dasjenige Basiselement, welches in $V_1 \cap V_2$ enthalten ist (es existiert stets).

Satz (Gegenstück zu Satz 1.1.2):
Ist (X, τ) ein topologischer Raum, $M \subset X$ und $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge, so gilt:
$x \in \overline{M} \Leftrightarrow$ Es existiert ein Netz $(x_i)_{i \in I} \subset M$ mit $x_i \to x$.

Beweis::
Entfällt. ∎

Bemerkung:
Nun ein paar Bemerkungen zum Kompaktheitsbegriff in topologischen Räumen. Zunächst wird dazu ganz analog zu in metrischen Räumen die Überdeckungskompaktheit definiert. Mit der Erkenntnis, dass jeder metrische Raum die Hausdorff-Eigenschaft besitzt leuchtet ein:

Satz:
Gilt in einem topologischen Raum (X, τ) das Hausdorff'sche Trennungsaxiom, so ist jede überdeckungskompakte Teilmenge von X abgeschlossen.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
Die aus dem metrischen Raum bekannte Folgenkompaktheit ist in dieser Form zwar auch in topologischen Räumen definierbar, aber im Allgemeinen nicht äquivalent zur Überdeckungskompaktheit. Man findet Beispiele, wo jeweils ein Kompaktheitsbegriff gilt, der andere jedoch nicht.
Eine Rettung ist die Netzkompaktheit. Dann gilt: (X, τ) ist überdeckungskompakt $\Leftrightarrow$ Für alle Netze $(x_i)_{i \in I} \subset X$ existiert ein konvergentes Teilnetz.

Lemma:
Erfüllt ein topologischer Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom, so folgt aus der Überdeckungskompaktheit die Folgenkompaktheit.

Beweis::
Siehe „einfache“ Beweisrichtung in Satz 1.1.3. ■

Definition:
Ist (X, τ) ein topologischer Raum und $M \subset X$, so wird M mit der **von M induzierten Topologie** (**Teilraumtopologie** , **Relativtopologie**) $\tau_M := \{O \cap M \mid O \in \tau\}$ zu einem topologischen Raum.

Bemerkung:
Vergleiche dazu die Einschränkung einer Metrik auf eine Teilmenge des Raumes. Auch daraus wird wieder ein metrischer Raum.

1.3 Stetige Abbildungen

Definition 1.3.1 (ε-δ-Stetigkeit):
Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei (pseudo-) metrischen Räumen (X, d_1), (Y, d_2).
f heißt **stetig in x_0** $\in X :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, sodass für $x \in X$ mit $d_1(x, x_0) < \delta$ stets $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ gilt.

Satz 1.3.1:
Seien (X, d_1), (Y, d_2) (pseudo-) metrische Räume und $f\colon X \to Y$. Dann ist f stetig in $x_0 \in X \Leftrightarrow$ für jede Folge $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subset X$ mit $x_j \to x_0$ gilt stets $f(x_j) \to f(x_0)$ für $j \to \infty$.

BEWEIS::
Vergleiche Vorlesung Analysis I. ∎

Bemerkung:
Diese Charakterisierung wird auch als **Folgenstetigkeit** von Abbildungen in metrischen Räumen bezeichnet.

Definition:
$f\colon X \to Y$ heißt **stetig auf X** $:\Leftrightarrow f$ ist stetig in jedem Punkt $x_0 \in X$.

Satz 1.3.2:
Für Abbildungen $f\colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) f ist stetig auf X.
(ii) Das vollständige Urbild $f^{-1}(O) \subset X$ ist für alle offenen Mengen $O \subset Y$ wieder offen.
(iii) Das vollständige Urbild $f^{-1}(A) \subset X$ ist für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset Y$ wieder abgeschlossen.

BEWEIS::
Siehe Vorlesung. ∎

Bemerkung:
Für diese Charakterisierung ist das Urbild entscheident. Für die Bilder gilt die Aussage im Allgemeinen nicht, wie folgendes Beispiel zeigt:
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \equiv c$ konstant. Dann sind die Mengen (a, b) und (d, e) offen. Allerdings ist das Bild $f((a, b)) = \{c\}$ eine abgeschlossene Menge. Das Urbild offener Mengen ist jedoch immer offen:

$$f^{-1}((d, e)) = \begin{cases} \emptyset, & c \notin (d, e) \\ \mathbb{R}, & c \in (d, e) \end{cases}$$

Satz 1.3.3 (Satz von Tietze-Urysohn für metrische Räume):
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann existiert zu jeder stetigen Funktion $f\colon A \to [a, b] \subset \mathbb{R}$ eine stetige Fortsetzung $F\colon X \to [a, b]$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Bemerkung:
Der Begriff Fortsetzung meint insbesondere die Identität $f = F$ auf A.

Folgerung:
Für abgeschlossene Teilmengen A eines metrischen Raumes (X, d) existiert zu jedem $x_0 \notin A$ eine stetige Funktion $\varphi\colon X \to [0, 1]$ mit $\varphi(x) = 0$, für $x \in A$ und $\varphi(x_0) = 1$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Folgerung:
Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d) und $f\colon A \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) eine beschränkte, stetige Funktion. Dann existiert eine beschränkte, stetige Fortsetzung $F\colon X \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) mit $\|F\|_\infty = \sup_{x\in X}|F(x)| = \sup_{x\in A}|f(x)| = \|f\|_\infty$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Definition 1.3.2:
Seien (X, d_1), (X, d_2) zwei (pseudo-) metrische Räume.
Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt **gleichmäßig stetig auf M** $\subset X :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, sodass für alle $x_0, x_1 \in M$ mit $d_1(x_0, x_1) < \delta(\varepsilon)$ stets $d_2(f(x_0), f(x_1)) < \varepsilon$ gilt.

Bemerkung:
Da in metrischen Räumen δ- bzw. ε-Kugeln auf M bzw. auf ganz X oder Y stets vergleichbar sind, kann ein solches universelles δ gefunden werden. In allgemeinen topologischen Räumen ist die Definition einer gleichmäßigen Stetigkeit dagegen nicht sinnvoll.

Beispiel:
Eine (pseudo-) Metrik $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ ist stets eine gleichmäßig stetige Abbildung des (pseudo-) metrischen Produktraums $((X \times X), \widehat{d})$ in die reellen Zahlen. Dabei ist $\widehat{d}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$, für $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (X \times X)$.
(Beachte dabei: $d(\cdot, \cdot) \geq 0$)

Satz 1.3.4:
Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen und $M \subset X$ kompakt, sowie $f|_M$ stetig auf M. Dann gilt:
(i) Das Bild von M unter der Abbildung f (kurz: $f(M)$) ist kompakt in (Y, d_2).
(ii) $f(M)$ ist beschränkt.
(iii) $f|_M$ ist gleichmäßig stetig.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
Dabei bezeichnet $f|_M$ die Einschränkung der Abbildung f auf den Definitionsbereich $D(f) := M$.

Definition 1.3.3:
Seien (X, τ), (Y, σ) zwei topologische Räume.
Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt **stetig in $\boldsymbol{x_0}$** $\in X$ $:\Leftrightarrow \forall V \in U_\sigma(f(x_0))$ gilt stets $f^{-1}(V) \in U_\tau(x_0)$.

Lemma (Äquivalente Definition mit Umgebungsbasen):
Seien (X, τ), (Y, σ) zwei topologische Räume. So gilt:
$f\colon X \to Y$ ist stetig in $x_0 \in X \Leftrightarrow \forall V \in U_{\sigma,B}(f(x_0))\, \exists U \in U_{\tau,B}(x_0)$ mit $f(U) \subset V$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
Analog zu Satz 1.3.1 kann man nun auch im topologischen Raum Folgenstetigkeit definieren. Nun gilt im Allgemeinen aber nur noch, dass aus der Stetigkeit (gemäß Def. 1.3.3) die Folgenstetigkeit folgt. Die Umkehrung gilt nur, falls entweder in x_0 (in (X, τ)) eine abzählbare Umgebungsbasis existiert, oder aber in allgemeinen topologischen Räumen die Folgenkonvergenz durch die Netzkonvergenz ersetzt wird.

Definition:
Im topologischen Raum (X, τ) heißt eine Abbildung $f\colon X \to Y$ **stetig auf $\boldsymbol{X}$** $:\Leftrightarrow f$ ist in jedem Punkt $x_0 \in X$ stetig.

Bemerkung:
Satz 1.3.2 kann nun auch für topologische Räume übernommen werden:

Satz:
Für Abbildungen $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) f ist stetig auf X.
(ii) Das vollständige Urbild $f^{-1}(O) \subset X$ ist für alle offenen Mengen $O \subset Y$ wieder offen.
(iii) Das vollständige Urbild $f^{-1}(A) \subset X$ ist für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset Y$ wieder abgeschlossen.

Beweis::
Analog zu Satz 1.3.2. ∎

Definition:
Seien (X, τ_1) und (X, τ_2) zwei unterschiedliche Topologien für eine Grundmenge. Dann heißt τ_2 **feiner** als $\tau_1 :\Leftrightarrow \tau_1 \subset \tau_2$.

Bemerkung:
Dabei müssen die Topologien vergleichbar sein.
Betrachte nun die identische Abbildung $id\colon (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$.

Lemma:
Seien (X, τ_1) und (X, τ_2) zwei unterschiedliche Topologien für eine Grundmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) τ_2 ist feiner als τ_1.
(ii) id ist stetig.
(iii) $\forall x \in X$ gilt $U \in U_{\tau_1}(x) \Rightarrow U \in U_{\tau_2}(x)$.

Beweis::
Einfach. ∎

Bemerkung:
Versucht man Satz 1.3.4 auf topologische Räume zu übertragen, so fällt auf, dass die Aussagen (ii)+(iii) nicht sinnvoll sind, da die entsprechenden Definitionen nicht existieren. Es bleibt also:

Satz:
Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen und (X, τ) kompakt. Dann ist auch das Bild $f(X)$ kompakt in (Y, σ).

Beweis::
Einfach. ∎

Bemerkung:
Satz 1.3.3 ist in allgemeinen topologischen Räumen nicht richtig. Er gilt nur für spezielle, sogenannte normale topologische Räume. Die Gültigkeit des Satzes liefert sogar ein Kriterium für die Normalität eines topologischen Raumes.

Definition:
Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **normal** (oder **T_4-Raum** , oder **Tietze-Raum**) $:\Leftrightarrow$ Zu je zwei disjunkten und abgeschlossenen Mengen $A, B \subset X$ existieren zwei disjunkte und offene Mengen $U, V \in \tau$ mit $A \subset U$ und $B \subset V$.

Bemerkung:
Im Allgemeinen ist die Hausdorff-Eigenschaft topologischer Räume unabhängig von der soeben definierten **T_4-Eigenschaft** .

Beispiel (T_4-Raum ohne Hausdorff-Eigenschaft):
Im topologischen Raum (X, τ_{in}) mit $X = \{a, b\}$ und $\tau_{in} = \{\emptyset, \{a, b\}\}$ sind die Punkte a, b nicht trennbar. Daher besitzt er die T_4-Eigenschaft, ist jedoch kein Hausdorff-Raum. Für ein Beispiel eines Hausdorff-Raumes, ohne T_4-Eigenschaft siehe Heine S.151.

Bemerkung:
Metrisierbare topologische Räume sind stets sowohl Hausdorff-, als auch T_4-Raum.

Satz 1.3.5 (Satz von Tietze-Urysohn):
Für einen topologischen Raum (X, τ) sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) (X, τ) ist normal.
(ii) Sind $A, B \subset X$ disjunkt und abgeschlossen, so existiert $f\colon X \to [0, 1]$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.
(iii) Ist $A \subset X$ abgeschlossen und $f\colon A \to [a, b]$ stetig auf A mit der induzierten Topologie ((A, τ_A) mit $\tau_A = \{O \cap A \,|\, O \in \tau\}$), so existiert eine stetige Fortsetzung $F\colon X \to [a, b]$.

Beweis::
Entfällt. ■

1.4 Fixpunktsätze

Definition 1.4.1:
Seien (X, d_1) und (Y, d_2) zwei (pseudo-) metrische Räume und $f\colon X \to Y$.
(i) f heißt **lipschitzsetig** $:\Leftrightarrow \exists L \geq 0$, sodass $\forall x, y \in X$ gilt: $d_2(f(x), f(y)) \leq L d_1(x, y)$. Dabei heißt L **Lipschitzkonstante** .
(ii) f heißt **strenge Kontraktion** $:\Leftrightarrow$ f ist lipschitzstetig mit $0 \leq L < 1$.

Lemma:
Ist eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen zwei (pseudo-) metrischen Räumen lipschitzstetig, so ist f auch gleichmäßig stetig.

Beweis::
Offensichtlich. ■

Bemerkung:
Die Umkehrung kann gelten, muss aber nicht, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel:
$X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Dann ist $f(x) = \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig, aber nicht lipschitzstetig bezüglich der Betragsmetrik ($d(x, y) = |y - x|$), bezüglich $d(x, y) = \sqrt{|y - x|}$ jedoch schon.

Satz 1.4.1 (Banach'scher Fixpunktsatz, 1922):
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f\colon X \to X$ eine strenge Kontraktion ($0 \leq L < 1$). Dann besitzt f genau einen Fixpunkt, d.h. $\exists! x^* \in X$ mit $f(x^*) = x^*$. Dieser kann als Grenzwert einer Folge $(x_j)_{j=0}^{\infty} \subset X$ mit $x_{j+1} = f(x_j)$ und beliebigem Startwert $x_0 \in X$ gewonnen werden. Es gilt ferner für alle $j \in \mathbb{N}$: $d(x_j, x^*) \leq \frac{L^j}{1-L} d(x_1, x_0)$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
Die Bedingung $L < 1$ ist wesentlich, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel:
Wähle $(X, d) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$ (vollständig!). Sei $M \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein abgeschlossener Kreisring (z.B.: $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\}$). Dann ist $(M, |\cdot|)$ ein vollständiger metrischer Raum. Sei die Abbildung f nun die Drehung um den Winkel α (mit $0 < \alpha < 2\pi$). Für alle $z, w \in M$ gilt: $|f(z) - f(w)| = 1 \cdot |z - w|$, d.h. $L = 1$. Man sieht leicht, dass f keinen Fixpunkt in M besitzt, da $0 \notin M$.

Folgerung 1.4.1:
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $A \subset X$ eine abgeschlossene, nichtleere Teilmenge und $f\colon A \to A$ eine strenge Kontraktion. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt x^* in A.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Beispiel (nichtlineare Integralgleichung als Fixpunktproblem):
Gegeben sei die Gleichung

$$f(t) - \left(\int_0^t \frac{1}{2} f(\tau) d\tau\right)^2 = 1, \quad t \in [0,1]$$

Gibt es dafür eine Lösung $f \in C([0,1])$? Es ist bereits bekannt, dass der metrische Raum $(C([0,1]), d_\infty)$ mit $d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]}|f(t) - g(t)|$ vollständig ist.
Ein Fixpunkt der Abbildung $T\colon C([0,1]) \to C([0,1])$, mit $(Tf)(t) := 1 + \left(\int_0^t \frac{1}{2} f(\tau)d\tau\right)^2$ wäre Lösung der obigen Gleichung. T ist jedoch keine Kontraktion auf ganz $C([0,1])$. Definiere daher die Menge $A := \{f \in C([a,b]) \,|\, 1 \le f(t) \le 1 + t, \quad t \in [0,1]\}$ und zeige, dass $T\colon A \to A$. Es gilt:

$$\begin{aligned}1 \le (Tf)(t) &\le 1 + \left(\int_0^t \frac{1}{2}(1+\tau)d\tau\right)^2 = 1 + \left(\frac{t}{2} + \frac{t^2}{4}\right)^2 \le 1 + \left(\frac{t}{2} + \frac{t}{4}\right)^2 \\ &\le 1 + t^2 \le 1 + t\end{aligned}$$

Zeige darüber hinaus, dass A abgeschlossen ist:
Dazu sei $(f_j)_{j=1}^\infty \subset A$ mit $f_j \to g \in C([0,1])$ gleichmäßig (d.h. bezüglich d_∞). Dann ist $f_j(t) \to g(t)$ für alle $t \in [0,1]$ und wegen $1 \le f_j(t) \le 1 + t$ gilt für jedes feste t auch $1 \le g(t) \le 1 + t$. Damit ist $g \in A$.
Es bleibt zu zeigen, dass es sich bei T um eine strenge Kontraktion handelt:
Es gilt für beliebige $f, g \in A$ und $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}|(Tf)(t) - (Tg)(t)| &= |\left(\int_0^t \frac{1}{2} f(\tau)d\tau\right)^2 - \left(\int_0^t \frac{1}{2} g(\tau)d\tau\right)^2| \\ &= |\int_0^t \frac{1}{2} f(\tau)d\tau - \int_0^t \frac{1}{2} g(\tau)d\tau| \cdot |\int_0^t \frac{1}{2} f(\tau)d\tau + \int_0^t \frac{1}{2} g(\tau)d\tau| \\ &\le |\int_0^t \frac{f(\tau) - g(\tau)}{2} d\tau| \cdot |\int_0^t \frac{1}{2}(1+\tau)d\tau + \int_0^t \frac{1}{2}(1+\tau)d\tau| \\ &\le t \cdot \frac{1}{2} d_\infty(f,g) \cdot \left(t + \frac{t^2}{2}\right) \\ &\le 1 \cdot \frac{1}{2} d_\infty(f,g) \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{4} \cdot d_\infty(f,g)\end{aligned}$$

Damit existiert nach dem Banach'schen Fixpunktsatz genau ein Fixpunkt von T in A, also ist die Integralgleichung lösbar.

Folgerung 1.4.2:
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $f\colon X \to X$ lipschitzstetig und erst die Funktion $f^{j_0}(\cdot) = f(f(\dots(\cdot)))$ eine strenge Kontraktion. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt $x^* \in X$, welcher auch wieder iterativ gewonnen werden kann.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Satz 1.4.2 (Weissinger'scher Fixpunktsatz):
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $F\colon X \to X$ eine Abbildung. Weiter exisiteren $a_n \geq 0$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, sodass für alle $x, y \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $d(F^n(x), F^n(y)) \leq a_n d(x, y)$. Dann besitzt F genau einen Fixpunkt $x^* \in X$, welcher iterativ als Grenzwert der Folge $(F^n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ mit beliebigem Startpunkt $x_0 \in X$ ermittelt werden kann. Es gilt die Fehlerabschätzung $d(x^*, F^n(x_0)) \leq \left(\sum_{j=n}^{\infty} a_j\right) d(F(x_0), x_0)$.

Beweis::
Siehe Übungsserie 4 / Aufgabe 3. ■

2 Banachräume

2.1 Grundbegriffe

Bemerkung:
Im Folgenden werden insbesondere die **Körper** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ betrachtet.

Definition:
Eine nichtleere Menge X heißt **linearer Raum** oder **Vektorraum** über dem Körper $\mathbb{K}$ $:\Leftrightarrow$ Es existieren Abbildungen $+\colon X \times X \to X$, sodass für alle $x, y, z \in X$ gilt:

$$\begin{gathered} x + y = y + x \\ (x + y) + z = x + (y + z) \\ \exists 0_X \in X \text{ sodass } x + 0_X = x \\ \exists (-x) \in X \text{ sodass } x + (-x) = 0_X \end{gathered}$$

und $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$, sodass für alle $x, y \in X$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\begin{gathered} \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \\ (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \\ (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) \\ 1_{\mathbb{K}} x = x \end{gathered}$$

Definition:
Eine nichtleere Teilmenge E eines Vektorraums X heißt **Unterraum** oder **linearer Teilraum** $:\Leftrightarrow$ Für alle $x, y \in E$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda x + \mu y \in E$.

Definition:
Ist $M \subset X$, so bezeichnet

$$\textbf{Span}(\boldsymbol{M}) := \{y \in X \mid y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \text{ mit } y_j \in M \text{ und } \lambda_j \in \mathbb{K} \text{ sowie } n \in \mathbb{N}\}$$

den **Spann von M** bzw. die **lineare Hülle von M** in X.

Definition:
(i) Die endliche Menge $\{x_1, \dots, x_N\} \subset X$ heißt **linear unabhängig** :⇔ Aus $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j x_j = 0$ folgt $\lambda_j = 0$ für $j = 1 \dots, N$.
(ii) $M \subset X$ heißt **linear unabhängig** :⇔ Jede endliche Teilmenge aus M ist linear unabhängig.

Bemerkung:
Die leere Menge ist per Definition linear unabhängig.
Jede Menge die den Nullvektor enthält muss linear abhängig sein.

Definition:
Eine Teilmenge $B \subset X$ heißt **(algebraische) Basis** oder auch **Hamelbasis** des Vektorraums X :⇔ B ist linear unabhängig und $\mathrm{Span}(B) = X$.

Bemerkung:
Jedes Element eines Vektorraums kann also durch eine endliche Linearkombination von Basiselementen mit Koeffizienten des Körpers dargestellt werden, und zwar eindeutig!
Neben der Hamelbasis gibt es weitere (nicht zwingend algebraische) Basisbegriffe, wie zum Beispiel die Schauderbasis eines Banachraumes. Dabei sind dann auch abzählbare Linearkombinationen möglich. Ein Beispiel ist die Standardbasis der Einheitsvektoren in l_p, welche ganz offensichtlich keine Hamelbasis sein kann.

Satz (Hamelbasis):
Sei X ein linearer Raum. Dann kann jede linear unabhängige Menge $M \subset X$ zu einer Basis (Hamelbasis) von X erweitert werden.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Folgerung:
Jeder lineare Raum besitzt eine algebraische Basis.

Beweis::
Die leere Menge ist stets linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums und kann zu einer Hamelbasis ergänzt werden. ■

Definition 2.1.1:
Ein (reeller oder komplexer) linearer Raum X heißt **normierter Raum** :⇔ Es existiert eine Abbildung $p\colon X \to [0, \infty)$, sodass für alle $x \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) gilt:

$$\begin{aligned} &\text{(i) } x \neq 0 \Rightarrow p(x) > 0 && \text{(Definitheit)} \\ &\text{(ii) } p(\lambda x) = |\lambda| p(x) && \text{(Homogenität)} \\ &\text{(iii) } p(x+y) \leq p(x) + p(y) && \text{(Dreiecksungleichung)} \end{aligned}$$

p heißt dann **Norm** .

Bemerkung:
Man schreibt statt $p(\cdot)$ auch $\|\cdot\|_X$, bzw. $\|\cdot|X\|$ oder auch nur $\|\cdot\|$ (falls der zugehörige lineare Raum klar ist) .
Der normierte Raum selbst wird sowohl mit $(X, \|\cdot\|)$, als auch nur mit X beschrieben (falls die verwendete Norm klar ist).

Definition:
Gilt in Definition 2.1.1
(a) nur (ii) und (iii), so heißt p **Halbnorm** .
(b) statt (iii) nur $p(x+y) \leq d(p(x)+p(y))$ mit einer Konstanten $d > 1$, so heißt p **Quasinorm** .
(c) statt (ii) $p(\lambda x) = |\lambda|^q p(x)$ mit einer Konstanten $q \neq 1$ so heißt p **q-homogene Norm** .
Die zugehörigen Räume heißen in diesen Fällen **halbnormiert** , **quasinormiert** bzw. **q-homogen-normiert** .

Lemma:
Es gilt stets $p(0) = 0$.

Beweis::
Aus (ii) folgt mit $0x = 0$ trivialerweise $p(0) = |0|p(x) = 0$. ■

Lemma:
Jeder (halb-) normierte Raum $(X, \|\cdot\|)$ wird mit $d_{\|\cdot\|}(x,y) := \|x-y\|$ ein (pseudo-) metrischer Raum $(X, d_{\|\cdot\|})$ bzw. sogar ein topologischer Raum $(X, \tau_{d_{\|\cdot\|}})$.

Beweis::
Klar. ■

Definition 2.1.2:
Sei X halbnormierter Raum und $(x_j)_{j=1}^\infty \subset X$ eine Folge darin.
(i) $(x_j)_{j=1}^\infty$ heißt **konvergent** :⇔ $\exists x \in X$ und $\forall \varepsilon > 0\, \exists j_0(\varepsilon)$ mit $\|x_j - x\| < \varepsilon$ für alle $j \geq j_0(\varepsilon)$.
(ii) $(x_j)_{j=1}^\infty$ heißt **Cauchy-Folge** (CF) :⇔ $\forall \varepsilon > 0\, \exists j_1(\varepsilon)$ mit $\|x_j - x_m\| < \varepsilon$ für alle $j, m \geq j_1(\varepsilon)$.
(iii) X heißt **vollständig** :⇔ Jede Cauchy-Folge konvergiert in X.
(iv) X heißt **Banachraum** :⇔ X ist vollständiger normierter Raum.

Lemma:
Sei X (halb-) normierter Raum. Dann gilt:
(i) $(x_j)_{j=1}^\infty \subset X$ konvergiert gegen $x \in X \Leftrightarrow \lim_{j\to\infty} \|x_j - x\| = 0$.
(ii) $(X, \|\cdot\|)$ ist vollständig ⇔ $(X, d_{\|\cdot\|})$ ist vollständiger (pseudo-) metrischer Raum.

Beweis::
Entfällt. Für (i) siehe eventuell Vorlesung „Mengenlehre als Fundament für Mathematik und Informatik“. ■

Beispiel:
(i) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder auch $\mathbb{C}$ mit $\|\cdot\| = |\cdot|$ sind normierte Räume ($\mathbb{R}, \mathbb{C}$ sogar vollständig).

(ii) Die diskrete Metrik auf einem Vektorraum besitzt kein Gegenstück.

(iii) Die Arcus-Tangens-Metrik auf $\mathbb{R}$ ($d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$) besitzt wegen der Homogenität der Norm auch kein Gegenstück.

(iv) Das Gegenstück zu $\mathbb{C}$ mit $d(z,w) = |\Re(z) - \Re(w)|$ ist die Halbnorm $\|\cdot\| := |\Re(\cdot)|$.

(v) $\mathbb{R}^n$ oder auch $\mathbb{C}^n$ wird für $1 \leq p < \infty$ mit $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{p}} = \|x \,|\, l_p^n\| := (\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ zum Banachraum. Die Funktion $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{\infty}} = \|x \,|\, l_\infty^n\| = \max_{k=1,\dots,n} |\xi_k|$ bildet die Maximumsnorm des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$. Dabei ist wie üblich $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

(vi)+ (vii) Auch für die metrischen Räume mit der Urwald-Metrik bzw. der Eisenbahn-Metrik existiert keine Norm.

(viii) Die Menge aller Folgen $s = \{x \,|\, x = (\xi_k)_{k=1}^\infty\}$ ist mit komponentenweiser Addition bzw. Multiplikation mit einem Skalar ein Vektorraum. Wegen der Homogenität, welche eine Norm erfüllen müsste, existiert auch zum metrischen Raum (s,d) mit $d(x,y) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}$ keine Norm.
$l_p = \{x \,|\, \|x|l_p\| < \infty\}$ ist für $1 \leq p < \infty$ mit der Norm $\|\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{l_p}\| = (\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ ein vollständiger normierter Raum.
$l_\infty = \{x \,|\, \|x|l_\infty\| < \infty\}$ ist ein normierter Raum durch $\|\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{l_\infty}\| = \sup_k |\xi_k|$.
Die Mengen der konvergenten Folgen c, bzw. der Nullfolgen c_0 sind lineare Teilräume von l_∞.
Für $0 < p < 1$ ist $(\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ nur eine Quasinorm auf l_p. Es gilt die scharfe Abschätzung $\|x + y|l_p\| \leq 2^{\frac{1}{p}-1}(\|x|l_p\| + \|y|l_p\|)$.

(ix) Die stetigen Funktionen $C([a,b])$ sind mit der Norm $\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{\infty}} = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| < \infty$ (da stetige Funktionen auf abgeschlossenen Mengen beschränkt sind) vollständig.
Die Funktion $\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{p}} := \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ ist für $1 \leq p < \infty$ ebenfalls eine Norm auf $C([a,b])$. Mit ihr ist der Raum jedoch nicht vollständig.

(x) Die Menge $\boldsymbol{C^1([a,b])}$ der **stetig differenzierbaren** Funktionen über $[a,b]$ ist ein Untervektorraum von $C([a,b])$. Mit der Supremumsnorm aus (ix) ist der Raum jedoch nicht vollständig. Dazu sei beispielsweise die Funktionenfolge $(f_j)_{j=1}^\infty \subset C^1([-1,1])$ mit $f_j(t) := \left(t^2 + \frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{2}}$ gegeben. Bezüglich der Supremumsnorm handelt es sich dabei um

eine Cauchy-Folge, deren Grenzfunktion $f(t) = |t|$ zwar stetig, aber nicht differenzierbar in $t = 0$ ist.
Man kann auf $C^1([a,b])$ weitere Normen definieren: $\|f\| := \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$ oder auch $|||f||| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Diese Normen sind äquivalent mit $\|f\| \leq |||f||| \leq 2\|f\|$ und $C^1([a,b])$ ist damit jeweils vollständig. Sei dazu $(f_j)_{j=1}^\infty$ eine beliebige Cauchy-Folge in $(C^1([a,b]), \|\cdot\|)$. Dann sind die Folgen $(f_j)_{j=1}^\infty$ und $(f_j')_{j=1}^\infty$ Cauchy-Folgen in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$. Da dieser Raum vollständig ist (dazu siehe (ix)) existieren Funktionen $f, g \in C([a,b])$ mit $f_j \to f$ und $f_j' \to g$ (gleichmäßig, d.h. bezüglich $\|\cdot\|_\infty$). In den Vorlesungen Analysis 1 und 2 wurde gezeigt, dass dann $g = f'$ gilt, d.h. $f \in C^1([a,b])$.

(xi) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\begin{aligned} C^k(\overline{\Omega}) := \{\varphi \,|\, \varphi\colon \Omega \to \mathbb{C} \text{ mit } \varphi\, k\text{-mal stetig diff'bar und für } |\alpha| \leq k \\ \text{ist } D^\alpha\varphi \text{ stetig auf } \overline{\Omega} \text{ fortsetzbar, sowie } \|\varphi\| < \infty\} \end{aligned}$$

ein Vektorraum und mit $\|\varphi|C^k(\overline{\Omega})\| := \sum_{|\alpha|\leq k}\|D^\alpha\varphi\|_\infty = \sum_{|\alpha|\leq k}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|D^\alpha\varphi(x)|$ ein vollständiger normierter Raum (Banachraum).

(xii) Bezeichne $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ den offenen komplexen Einheitskreis und H^∞ die Menge aller beschränkten, holomorphen Funktionen $\mathbb{D} \to \mathbb{C}$. Mit der Norm $\|f\|_\infty := \sup_{|z|<1}|f(z)| < \infty$ (da beschränkt) ist $(H^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum. Zum Beweis wähle man eine Cauchy-Folge $(f_j)_{j=1}^\infty \subset H^\infty$. Dann gibt es eine stetige Funktion f, mit $f_j \to f$ gleichmäßig (in $\|\cdot\|_\infty$). Mit Hilfe der Funktionentheorie kann man zeigen, dass f dann holomorph ist und somit in H^∞ liegt.

Lemma (Grundlegende Eigenschaften):
(i) In normierten Räumen ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.
(ii) X halbnormierter Raum $\Rightarrow$ Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge.
(iii) X Banachraum (vollst., normiert) $\Rightarrow$ Jede Cauchyfolge konvergiert in X.
(iv) Die Begriffe aus Abschnitt 1.1 (offene Kugel, offene/abgeschlossene Menge, Charakterisierung von Punkten) und damit zusammenhängende Eigenschaften übertragen sich.

Beweis::
Wie Abschnitt 1.1 + 1.2. ∎

Beispiel:
Für (iv): Sei $M \subset X$. Dann gilt: $x \in \overline{M} \;\Leftrightarrow\; \exists (x_j)_{j=1}^\infty \subset M$ mit $x_j \to x$.

Lemma 2.1.1:
(i) Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $U \subset X$ ein (topol.) abgeschlossener Unterraum, so ist auch $(U, \|\cdot\|)$ schon Banachraum.
(ii) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $U \subset X$ ein vollständiger Unterraum (d.h. $(U, \|\cdot\|)$ Banachraum). Dann ist U abgeschlossen.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
Das erklärt auch obiges Beispiel 10: Da $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ ein nicht abgeschlossener Unterraum vom Banachraum $C([a,b])$ ist kann es eine Folge in $C^1([a,b])$ geben, die gegen $f(\cdot) = |\cdot| \in C([a,b]) \setminus C^1([a,b])$ konvergiert. Damit ist $C^1([a,b])$ nicht vollständig.

Lemma 2.1.2:
Für (halb-) normierte Räume X sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) X ist vollständig.
(ii) Jede absolut konvergente Reihe der Folge $(x_j)_{j=1}^\infty$ (d.h. $\sum_{j=1}^\infty \|x_j\| < \infty$) besitzt einen Grenzwert in X (d.h. $\exists x \in X$ mit $x = \lim_{J\to\infty} \sum_{j=1}^J x_j$).

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Definition:
In einem (halb-) normierten Raum X definiert man:
(i) $M \subset X$ ist **beschränkt** $:\Leftrightarrow \exists c > 0$, sodass $\forall x \in M$ gilt $\|x\| \leq c$.
(ii) $(x_j)_{j=1}^\infty \subset X$ ist **beschränkt** $:\Leftrightarrow \exists c > 0$, sodass $\forall j \in \mathbb{N}$ gilt $\|x_j\| \leq c$.

Lemma (Einfache Eigenschaften):
Sei X ein (halb-) normierter Raum über dem Körper $\mathbb{K}$. Weiter seien $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty \subset X$, $x, y \in X$, sowie $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \subset \mathbb{K}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt:
(i) $x_j \to x$ und $y_j \to y \Rightarrow x_j + y_j \to x + y$.
(ii) $x_j \to x$ und $\lambda_j \to \lambda \Rightarrow \lambda_j x_j \to \lambda x$.
(iii) $x_j \to x \Rightarrow \|x_j\| \to \|x\|$ in $\mathbb{R}$ (Stetigkeit der Norm).
(iv) $x_j \to x \Rightarrow (x_j)_{j=1}^\infty$ ist beschränkt.

Beweis::
Siehe Vorlesungen Analysis I + II. ■

Lemma 2.1.3:
Sei $(X, \|\cdot\|^*)$ ein halbnormierter Raum. Es gilt:
(i) Die Menge $N := \{x \in X \mid \|x\|^* = 0\}$ ist ein linearer Teilraum von X.
(ii) Die Abbildung $\|[x]\| := \|x\|^*$ ist eine Norm auf dem Faktorraum $X/_N$.
(iii) Ist $(X, \|\cdot\|^*)$ vollständig, so ist $(X/_N, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.

Beweis::
Offensichtlich. ■

Bemerkung:
Der Faktorraum $X/_N$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen $[x]$ gewisser $x \in X$. Dabei ist $[x] := x + N = \{x + y \,|\, y \in N\}$, d.h. $x, y \in [x] = x + N \;\Leftrightarrow\; x = x + 0, y = x + a$ mit $0, a \in N \;\Leftrightarrow\; y - x = x + a - x - 0 = a \in N \;\Leftrightarrow\; \|a\|^* = \|y - x\|^* = 0$.

Bemerkung:
Zur Betrachtung der L_p-Räume nun ein paar Definitionen aus der Maß- und Integrationstheorie.

Definition:
(i) Ist die Menge $T \neq \emptyset$, so heißt $\Sigma \subset \mathcal{P}(T)$ **σ-Algebra** über T :⇔

$$\begin{aligned}
&\text{(a) } \emptyset \in \Sigma \\
&\text{(b) } E \in \Sigma \Rightarrow T \setminus E \in \Sigma \\
&\text{(c) } E_j \in \Sigma, \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \Sigma
\end{aligned}$$

(ii) Für eine σ-Algebra Σ heißt eine Abbildung $\mu\colon \Sigma \to [0, \infty]$ **Maß** :⇔

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) μ ist **σ-additiv** $\left(\text{d.h. } E_j \in \Sigma \text{ paarweise disjunkt } \Rightarrow \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)\right)$

(iii) (T, Σ, μ) heißt **Maßraum** :⇔ Σ ist σ-Algebra über der Menge $T \neq \emptyset$ und μ ein Maß auf Σ.
(iv) Ein Maßraum (bzw. das Maß selbst) heißt **endlich** :⇔ $\mu(T) < \infty$.
(v) Ein Maßraum (bzw. das Maß selbst) heißt **σ-endlich** :⇔ $\exists (E_j)_{j=1}^{\infty} \subset \Sigma$ sodass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt: $\mu(E_j) < \infty$ und $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = T$.

Bemerkung:
Ist (T, d) ein metrischer oder (T, τ) ein topologischer Raum, so existieren dort offene Mengen. Das kleinste Mengensystem mit den Eigenschaften einer Σ-Algebra, welches alle offenen Mengen enthält bezeichnet man als σ-Algebra der Borelmengen. Als Maß wird dann häufig das Lebesgue-Maß λ verwendet.

Definition:
Sei (T, Σ, μ) ein Maßraum und $1 \leq p < \infty$.
(i) Eine Funktion $f\colon T \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) heißt **meßbar** :⇔ für alle $A \subset \mathbb{R}$ gilt $f^{-1}(A) \in \Sigma$ (vollst. Urbild)
(ii) Man definiert das **Lebesgue-Integral** solcher Funktionen: $\int_T f(x) d\mu(x)$ (über Treppenfunktionen).
(iii) $\boldsymbol{\widehat{L_p}(T, \Sigma, \mu,} \mathbb{C}\boldsymbol{)} := \{f\colon T \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ meßbar mit } \int_T |f(x)|^p d\mu(x) < \infty\}$

Bemerkung:
Die Menge $\widehat{L_p} := \widehat{L_p}(T, \Sigma, \mu, \mathbb{C})$ bildet für $1 \leq p < \infty$ einen linearen Raum (Vektorraum) und die Abbildung $\|\cdot\|_p^* := (\int_T |\cdot(x)|^p d\mu(x))^{\frac{1}{p}} < \infty$ definiert eine Halbnorm darüber, sodass $(\widehat{L_p}, \|\cdot\|^*)$ ein vollständiger halbnormierter Raum ist. Definiert man $N = N_p$ wie in Lemma 2.1.3 so bilden die Räume $\boldsymbol{L_p} := \widehat{L_p}/_{N_p}$ mit der Norm $\|[\cdot]\| := (\int_T |\cdot(x)|^p d\mu(x))^{\frac{1}{p}}$ für $1 \leq p < \infty$ einen Banachraum, wobei $f, g \in [f] \in L_p \;\Leftrightarrow\; f = g$ μ-f.ü. Man schreibt oft $f \in L_p$, meint aber eigentlich einen Vertreter $f \in [f]$ einer Äquivalenzklasse aus L_p.

Definition:
Sei (T, Σ, μ) ein Maßraum und $f\colon T \to \mathbb{C}$ meßbar. Dann bezeichnet

$$\textbf{ess-}\sup_{\boldsymbol{x \in T}} |\boldsymbol{f(x)}| := \inf_{\substack{N \in \Sigma,\\ \mu(N)=0}} \{ \sup_{x \in T \setminus N} |f(x)| \}$$

das **wesentliche Supremum** (essentielles Supremum).

Bemerkung:
Für (abschnittsweise) stetige Funktionen ergibt sich die Identität mit dem klassischen Supremum.
Im Grunde ist das wesentliche Supremum die kleinste obere Schranke für den Funktionswert einer Menge von Funktionen, welche sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden.
Definiert man $\|\cdot\|_\infty^* := \text{ess-}\sup_{x \in T} |\cdot(x)|$, so kann man analog zum obigen Vorgehen auch den Raum $\boldsymbol{L_\infty}$ definieren.

Beispiel:
(i) $T = \mathbb{R}$ oder $T = I \subset \mathbb{R}$ (Intervall) und Σ die σ-Algebra der Borelmengen, sowie $\mu = \lambda$ das Lebesgue-Maß.

(ii) $T = \Omega \subset \mathbb{R}^n$ und wieder Σ die σ-Algebra der Borelmengen, sowie $\mu = \lambda_n$ das n-dimensionale Lebesgue-Maß.

(iii) $T = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, sowie $\mu(\cdot) = \#(\cdot)$ das Zähl-Maß. Dann ist $L_p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) = l_p$.

(iv) L_∞ ist Banachraum.

(v) Für $0 < p < 1$ ist L_p nur Quasi-Banachraum.

Lemma 2.1.4:
Sei X ein endlich-dimensionaler linearer Raum über dem Körper $\mathbb{K}$ und $\{y_1, \ldots y_n\} \subset X$ eine fixierte Basis. Dann gilt:
(i) Jedes $x \in X$ ist eindeutig darstellbar als $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k$ mit $\lambda_k \in \mathbb{K}$.
(ii) Mit $\|x\|_0 := \sum_{k=1}^n |\lambda_k|$ wird $(X, \|\cdot\|_0)$ zum Banachraum.

BEWEIS::
Siehe Vorlesung. ∎

<u>Definition</u> 2.1.3:
Sei X ein linearer Raum und $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ (halb-) Normen auf X.
(i) $\|\cdot\|_1$ heißt **schwächer** als $\|\cdot\|_2$ $:\Leftrightarrow \exists c > 0$, sodass $\forall x \in X$ gilt: $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$.
(ii) $\|\cdot\|_1$ ist **äquivalent** zu $\|\cdot\|_2$ $:\Leftrightarrow \exists c_1, c_2 > 0$, sodass $\forall x \in X$ gilt:
$c_1\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2\|x\|_2$

<u>Bemerkung</u>:
Normen sind äquivalent, falls jeweils die eine schwächer ist als die andere.
Damit hat man eine Halbordnung bzw. eine Äquivalenzrelation auf Normen definiert.

<u>Satz</u> 2.1.1:
Alle Normen auf einem endlich-dimensionalen linearen Raum sind äquivalent.

BEWEIS::
Siehe Vorlesung. ∎

<u>Bemerkung</u>:
Sie führen also zur gleichen Konvergenz und zur gleichen Topologie auf X.

<u>Definition</u> 2.1.4:
Sei X ein normierter / metrischer / topologischer Raum.
(i) $M \subset X$ heißt **dicht** in X $:\Leftrightarrow \overline{M} = X$.
(ii) X heißt **separabel** $:\Leftrightarrow$ Es existiert eine abzählbare, dichte Teilmenge $M \subset X$.

<u>Lemma</u>:
Sei X ein normierter / metrischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) M liegt dicht in X.
(ii) $\overline{M} = X$.
(iii) $\forall x \in X$ existiert $(y_j)_{j=1}^{\infty} \subset M$ mit $y_j \to x$.
(iv) $\forall x \in X \, \forall \varepsilon > 0$ existiert stets $y(x, \varepsilon) \in M$ mit $d(x, y) < \varepsilon$.

BEWEIS::
Klar. ∎

Beispiel:
$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p), (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ oder jeder andere beliebige endlich-dimensionale Raum X mit beliebiger Norm ist separabel. Zum Beweis wähle eine Basis $B := \{y_1, \dots y_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ und definiere $M := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k \text{ mit } \lambda_k \in \mathbb{Q}\}$. Da $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}^n$ abzählbar sind und dicht liegen, ist auch M abzählbar und liegt dicht im $\mathbb{R}^n$.

Lemma 2.1.5:
Sei X ein normierter Raum. Dann gilt:
X ist separabel $\Leftrightarrow$ Es existiert eine abzählbare Menge $A \subset X$ mit $\overline{\text{Span}(A)} = X$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Beispiel:
(i) Für $1 \leq p < \infty$ ist $(l_p, \|\cdot\|_p)$ separabel.
Zum Beweis setze $A := \{e_j \,|\, e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \quad j\text{-ter Einheitsvektor } \}$. Dann ist $\overline{\text{Span}(A)} = l_p$ (Abschluss in l_p), denn es ist

$$x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p \quad \Leftrightarrow \quad \|x - \sum_{k=1}^{N} \xi_k e_k\|_p = \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \to 0, \text{ für } N \to \infty$$

Also ist l_p separabel nach Lemma 2.1.5. Sucht man noch eine abzählbare, dichte Teilmenge von l_p, so bietet sich die Menge $M \subset F$ der finiten Folgen, mit rationalen Komponenten an.

(ii) $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ ist separabel (analog).

(iii) $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ist nicht separabel.

(iv) $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein separabeler Banachraum.
Zeige dazu, dass die Menge der endlichen Linearkombinationen von Polynomen $\text{Span}(\{x^n | n \in \mathbb{N}\})$ dicht in $C([a, b])$ liegt (Bernsteinpolynome, Weierstrass'scher Approximationssatz).

(v) $(L_\infty([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ ist nicht separabel.

(vi) Für $1 \leq p < \infty$ ist $(L_p([a, b]), \|\cdot\|_p)$ separabel.
Dazu zeigt man, dass $C([a, b])$ dicht in $L_p([a, b])$ liegt und nach (iv) selbst separabel ist.

2.2 Kompakte Mengen in speziellen Banachräumen

Lemma 2.2.1 (Lemma von Riesz):
Sei E ein (nichtleerer) abgeschlossener echter Unterraum eines Banachraums $(X, \|\cdot\|)$. Dann exisitert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x_\varepsilon \in X \setminus E$ mit $\|x_\varepsilon\| = 1$ und $\inf_{y \in E} \|x_\varepsilon - y\| \geq 1 - \varepsilon$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
Abgeschlossen ist hier im topologischen Sinne zu sehen. Z.B. ist $\mathbb{Q}$ ein echter Unterraum von $\mathbb{R}$, aber nicht abgeschlossen.

Satz 2.2.1:
Ein Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ ist endlich-dimensional $\Leftrightarrow$ Jede beschränkte Menge in X ist präkompakt.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
Vergleiche dazu kompakte / präkompakte Mengen in metrischen Räumen (Abschnitt 1.1): Folgenkompaktheit $\cong$ Überdeckungskompaktheit, ε-Netz, usw.

Satz 2.2.2:
Für $1 \leq p < \infty$ ist $M \subset l_p$ präkompakt $\Leftrightarrow$
(i) M ist in l_p beschränkt und
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists k_0(\varepsilon)$ sodass $\forall x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in M$ gilt $\sum_{k=k_0}^\infty |\xi_k|^p < \varepsilon$ (gleichmäßge Restsummenabschätzung).

Beweis::
Siehe Übungsserie 5. ■

Bemerkung:
Ist M endlich-dimensinal und beschränkt, so auch präkompakt.

Definition 2.2.1:
Eine Familie stetiger Funktionen $\{f_\alpha \,|\, \alpha \in A\} \subset C(\overline{\Omega})$ heißt **gleichgradig stetig** $:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, sodass für alle $x, x' \in \overline{\Omega}$ mit $\|x - x'\| < \delta$ und alle α der Indexmenge A gilt $|f_\alpha(x) - f_\alpha(x')| < \varepsilon$.

Bemerkung:
Es sind dann alle Funktionen f_α gleichmäßig stetig und δ hängt nicht von der konkreten Funktion der Familie ab.
Wir betrachten $C(\overline{\Omega})$ (stetige Funktionen $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) im Folgenden stets mit der Supremumsnorm.

Satz 2.2.3 (Arzela-Ascoli):
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann ist
$\{f_\alpha \,|\, \alpha \in A\} \subset C(\overline{\Omega})$ präkompakt $\Leftrightarrow$ $\{f_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$ ist beschränkt und gleichgradig stetig.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
In metrischen Räumen ist jede präkompakte Menge stets beschränkt.

2.3 Lineare Abbildungen / Operatoren in Banachräumen

Vergleiche Abschnitt 1.3 - Abbildungen zwischen metrischen / topologischen Räumen.

Definition:
X_1, X_2 lineare Räume über einem Körper $\mathbb{K}$.
$T\colon X_1 \to X_2$ heißt **linearer Operator** $:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X_1$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ gilt:

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2).$$

Statt $T(x)$ schreibt man bei linearen Operatoren auch Tx.

Bemerkung:
Dies stellt eine einschneidende Bedingung dar, da zum Beispiel von den $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ Funktionen nur noch Geraden durch den Ursprung übrig bleiben.

Beispiel:
Triviale Beispiele sind der Nulloperator $\mathcal{O}(x) = 0_{X_2} \quad \forall x \in X_1$ zwischen beliebigen linearen Räumen sowie die Identität auf einem Vektorraum $id\colon X \to X, \quad x \mapsto x$.

Lemma:
(i) $T(0_{X_1}) = 0_{X_2}$
(ii) Seien $T, S\colon X_1 \to X_2$ lineare Operatoren und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann sind

$$(T+S)(x) := Tx + Sx \qquad \forall x \in X_1$$
$$(\lambda T)(x) := \lambda Tx \qquad \forall x \in X_1$$

wieder lineare Operatoren von X_1 nach X_2.

Beweis::
klar. ■

Bemerkung:
Damit ist die Menge aller linearen Operatoren von X_1 nach X_2 wieder ein linearer Raum (Vektorraum).

Beispiel (für lineare Operatoren):
(i) Aus der linearen Algebra sind lineare Abbildungen $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in Form von Matrizen $\mathcal{A}$ bekannt. Sind $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, sowie $y = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ und $\mathcal{A} := (\alpha_{j,k})_{\substack{j=1,\ldots,m\\k=1,\ldots,n}}$, so gilt
$y = Ax \;\Leftrightarrow\; n_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{j,k}\xi_k \quad \forall j = 1, \ldots, m \;\Leftrightarrow\; (\eta_1, \ldots, \eta_m)^T = \mathcal{A} \cdot (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T.$

(ii) Will man das Konzept aus (i) auf unendliche Räume verallgemeinern zu $A\colon s \to s$, definiert durch

$$\mathcal{A} := (\alpha_{j,k})_{j,k=1}^{\infty} \text{ mit } \eta_j = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{j,k}\xi_k \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

so ist dies in der Regel nur sinnvoll, wenn man weitere Forderungen stellt.
Gilt $\sum_{j,k=1}^{\infty} |\alpha_{j,k}| < \infty$ so folgt $A\colon l_\infty \to l_1$, denn es gilt

$$\begin{aligned}\|Ax|l_1\| &= \sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{j,k}\xi_k\Big| \le \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{j,k}| \cdot |\xi_k| \\ &\le \sup_k |\xi_k| \sum_{j,k=1}^{\infty} |\alpha_{j,k}| = \|x|l_\infty\| \cdot \sum_{j,k=1}^{\infty} |\alpha_{j,k}| < \infty \text{ nach Vorraussetzung.}\end{aligned}$$

Ist $\sum_{j,k=1}^{\infty} |\alpha_{j,k}|^2 < \infty$, so hat man $A\colon l_2 \to l_2$.

Oder gilt $\sup_j \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{j,k}|\right) < \infty$, so folgt $A\colon l_\infty \to l_\infty$.

Desweiteren kann man als Spezialfall Diagonaloperatoren an Stelle unendlicher Matrizen betrachten. Dann bildet der Operator D, charakterisiert durch $d = (\delta_k)_{k=1}^{\infty}$ immernoch Folgen auf Folgen ab. Und zwar setzt man

$$D\colon s \to s \text{ mit } y = Dx = (\delta_1\xi_1, \delta_2\xi_2, \ldots) \text{ für } x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$$

Das heißt man hat in obiger Summe immer nur einen Summanden: $\forall j \in \mathbb{N} : \eta_j = \delta_j\xi_j$. Offensichtlich ist D ein linearer Operator. Wählt man d nun geschickt, so ergeben sich gewisse Eigenschaften.
Für $d \in l_\infty$ gilt $D\colon l_p \to l_p$, für $1 \le p \le \infty$ und wegen $l_p \subset l_q \;\Leftrightarrow\; p \le q$ (vergleiche dazu Übungsserie 5) gilt sogar $D\colon l_p \to l_q$, mit $1 \le p \le q$.

Ist $d \in l_1$, so gilt $D\colon l_\infty \to l_1$. Dies soll hier einmal exemplarisch bewiesen werden: $\|Dx|l_1\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\delta_k\xi_k| \le \sup_k |\xi_k| \sum_{k=1}^{\infty} |\delta_k| = \|x|l_\infty\| \cdot \|d|l_1\|$.

Für $d \in l_r$ mit $0 < \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} < 1$ hat man $D\colon l_p \to l_q$ für $1 < p < q < \infty$.

(iii) Folgende Operatoren arbeiten auf den stetigen Funktionen $C([a,b])$ und sind alle offensichtlich linear:
Der Integraloperator ordnet jeder stetigen Funktion eine Stammfunktion mit $(Tf)(a) = 0$

zu:

$$T\colon C([a,b]) \to C([a,b]) \text{ mit } (Tf)(t) := \int_a^t f(s)ds$$

Der Volterra'sche Integraloperator, mit einem Kern $k \in C([a,b] \times [a,b])$:

$$\mathbb{K}^v\colon C([a,b]) \to C([a,b]) \text{ mit } (\mathbb{K}^v f)(t) := \int_a^t k(t,s)f(s)ds$$

Der Fredholm'sche Integraloperator, mit einem Kern $k \in C([a,b] \times [c,d])$:

$$\mathbb{K}^F\colon C([c,d]) \to C([a,b]) \text{ mit } (\mathbb{K}^F f)(t) := \int_c^d k(t,s)f(s)ds$$

Der Multiplikationsoperator, mit einem fixierten $a \in C([a,b])$:

$$M_a\colon C([a,b]) \to C([a,b]) \text{ mit } (M_a f)(t) := a(t)f(t)$$

Lemma:
Sei $T\colon X_1 \to X_2$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:
(i) T ist gleichmäßig stetig auf X_1
(ii) T ist stetig auf X_1
(iii) T ist stetig in irgendeinem Punkt $x_0 \in X_1$
(iv) T ist stetig in $0 \in X_1$

Beweis::
Trivial ist (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv). Der Schluss (iv) ⇒ (i) gestaltet sich wie folgt: Wegen der Stetigkeit in 0 gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ sodass gilt

$$\|Tx \,|\, X_2\| = \|Tx - T0 \,|\, X_2\| < \varepsilon, \text{ für } x \in X_1 \text{ mit } \|x \,|\, X_1\| = \|x - 0 \,|\, X_1\| < \delta$$

Setze nun $x := y - z$ und nutze die Linearität von T. ∎

Definition 2.3.1:
Ein linearer Operator $T\colon X_1 \to X_2$ heißt **beschränkt** :⇔

$$\exists c > 0 : \quad \|Tx|X_2\| \leq c\|x|X_1\| \quad \forall x \in X_1$$

Ist T beschränkt so heißt

$$\|\boldsymbol{T}\| := \sup_{\|x|X_1\|=1} \|Tx|X_2\|$$

Norm von $\boldsymbol{T}$.
$\boldsymbol{\mathcal{L}(X_1, X_2)}$ bezeichnet die **Menge aller linearen und beschränkten Operatoren** von X_1 nach X_2. Ist $X := X_1 = X_2$ so schreibt man $\boldsymbol{\mathcal{L}(X)} := \mathcal{L}(X, X)$.

Bemerkung:
T linear + beschränkt $\Rightarrow \exists \sup_{\|x \,|\, X_1\|=1} \|Tx \,|\, X_2\|$ denn wegen T beschränkt existiert ein $c > 0$ mit $\|Tx\| \leq c\|x\|$. Mit $\|x\| = 1$ folgt $\|Tx\| \leq c$ und für eine beschränkte Menge reeller Zahlen existiert stets das Supremum.

Lemma:
Ist T ein linearer und beschränkter Operator so gilt:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|\widetilde{x}\|\leq 1} \|T\widetilde{x}\| = \sup_{\widehat{x}\neq 0} \frac{\|T\widehat{x}\|}{\|\widehat{x}\|}$$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Lemma 2.3.1:
Ist T ein linearer und beschränkter Operator so gilt:

$$\|T\| = \inf\{c \,|\, c \text{ mit } \|Tx\| \leq c\|x\|\}$$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
$\|T\|$ ist also die kleinst mögliche Konstante in der Ungleichung $\|Tx\| \leq c\|x\|$.

Beispiel:
Alle bisherigen Beispiele sind nicht nur linear sondern auch beschränkt.
Insbesondere gilt für den Diagonaloperator $D\colon l_\infty \to l_1$ mit $Dx = (d_1\xi_1, d_2\xi_2, \ldots)$ das Folgende: $\|Dx \,|\, l_1\| \leq \ldots \leq \|x \,|\, l_\infty\| \cdot \|d \,|\, l_1\|$. Damit ist stets $\|D \,|\, \mathcal{L}(l_\infty, l_1)\| \leq \|d \,|\, l_1\|$. Wählt man im Speziellen $x^* = (1, 1, \ldots)$. Dann ist $\|x^* \,|\, l_\infty\| = \sup_k |\xi_k^*| = 1$. Also folgt $\|Dx^* \,|\, l_1\| = \|(d_1, d_2, \ldots) \,|\, l_1\| = \|d \,|\, l_1\|$. Daher gilt insbesondere für die Norm des Operators $\|D\| = \|D \,|\, \mathcal{L}(l_\infty)\| = \sup_{\|x \,|\, l_\infty\|=1} \|Dx \,|\, l_\infty\| \geq \|d \,|\, l_1\|$. Aus den beiden Ungleichungen ergibt sich also zusammenfassend $\|D\| = \|d \,|\, l_1\|$.

Beispiel (für unbeschränkte lineare Operatoren):
(i) Sei $M := \{f \,|\, f, f' \in C([a, b])\} \subset C([a, b])$ ein linearer Teilraum des Raumes der stetigen Funktionen (eigentlich ist $M = C^1([a, b])$).
Betrachte den Differentialoperator $\frac{d}{dt}\colon M \to C([a, b]), f \mapsto f'$ und wähle auf M die übliche Supremumsnorm der stetigen Funktionen $\|f|M\| := \|f|C([a, b])\| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

Dieser Operator ist offenbar linear.
Wähle nun die speziellen Funktionen $f_n(t) := \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^n$. Dann ist $\frac{d}{dt} f_n = n\frac{(t-a)^{n-1}}{(b-a)^n}$ und daher gilt $\|\frac{d}{dt} f_n | C([a,b])\| = \sup_{t\in[a,b]} |\frac{d}{dt} f_n(t)| = \frac{n}{b-a}$.
Weiter ist $\|f_n|M\| = \sup_{t\in[a,b]} |\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^n| = 1$. Es kann also keine Konstante c exisiteren, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|\frac{d}{dt} f_n | C([a,b])\| = \frac{n}{b-a} \leq c\|f_n|M\| = c$.
Damit ist der Differentialoperator auf $(M, \|\cdot\|_\infty)$ nicht beschränkt. Der Ausweg ist eine andere Norm auf M zu wählen: $\|f|M\| := \|f|C^1([a,b])\| = \|f|C([a,b])\| + \|f'|C([a,b])\|$. Dies ist die Standardnorm auf $C^1([a,b])$, welche auch die Bezeichnung impliziert.
Wie bereits im Beispiel 10 in Abschnitt 2.1 gezeigt, ist $\frac{d}{dt}\colon C^1([a,b]) \to C([a,b])$ ein beschränkter linearer Operator.

(ii) Man kann mithilfe der Hölder'schen Ungleichung zeigen, dass $T\colon l_2 \to \mathbb{R}$ mit $Tx := \sum_{k=1}^\infty \frac{\xi_k}{k} \in \mathbb{R}$, für $x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \subset l_2$ einen linearen und beschränkten Operator definiert. Betrachtet man l_2 als Teilmenge von l_∞, so wird es zum linearen Teilraum. Die Abbildung $T\colon (l_2, \|\cdot|l_\infty\|) \to \mathbb{R}$ ist zwar noch linear, aber nicht mehr beschränkt. Dazu wählt man die Folge, deren erste N Einträge 1 sind und die sonst nur 0en enthält: $x_N = (1, \ldots, 1, 0, \ldots) \in l_2$ (wegen $\|x_N|l_2\| = \sqrt{N}$). Es gilt offensichtlich $\|x_N|l_\infty\| = 1$. Weiter ist $Tx_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \to \infty$ $(N \to \infty)$ und es kann daher keine Konstante $c > 0$ geben, sodasss für alle N stets $\|Tx_N\| \leq c\|x_N|l_\infty\|$ gilt. T ist also unbeschränkt (l_2 liegt nicht dicht in l_∞).

<u>Satz</u> 2.3.1:
Ein linearer Operator $T\colon X_1 \to X_2$ ist beschränkt $\Leftrightarrow$ T ist stetig.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

<u>Lemma</u>:
In endlich dimensionalen Räumen sind alle linearen Abbildungen beschränkt und damit stetig.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

<u>Lemma</u> 2.3.2:
Seien $T, S \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$. Dann gilt auch $(T+S)$ und $(\lambda T) \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
Lineare und beschränkte Operatoren bilden also einen Unterraum der linearen Operatoren.

Lemma 2.3.3:
Ist $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ dann wird durch $\|T\| := \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$ eine Norm auf dem Vektorraum $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ definiert.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Bemerkung:
Eine Norm induziert einen Konvergenzbegriff:

$T_j \to T$ für $j \to \infty$ in $\mathcal{L}(X_1, X_2)$, d.h. $\|T_j - T\| \overset{\mathcal{L}(X_1,X_2)}{\longrightarrow} 0$ für $j \to \infty$. Dies wird als Normkonvergenz bzw. gleichmäßige Konvergenz bezeichnet.
Eine andere Variante ist die Punktweise / schwache Konvergenz:
$T_j x \to Tx$ für $j \to \infty$ für jedes $x \in X_1$ (Konvergenz in X_2), d.h. $\|T_j x - Tx|X_2\| \to 0$ $(j \to \infty)$.
Diese Variante ist schwächer (vergleiche dazu ÜS 7/1), denn sie folgt aus obiger Konvergenz: $\|T_j x - Tx\| = \|(T_j - T)x\| \leq \|T_j - T\| \cdot \|x\|$. Umgekehrt gilt das nicht.

Satz 2.3.2:
Ist X_1 ein normierter Raum und X_2 ein Banachraum, so ist $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ mit der Operatorennorm vollständig (also Banachraum).

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Satz 2.3.3 (Fortsetzungssatz):
Sei E ein linearer Teilraum vom X_1, der dort dicht liegt (d.h. $\overline{E} = X_1$) und X_2 ein Banachraum. Ein nur auf E definierter linearer und beschränkter Operator T_0 mit Werten in X_2 kann auf eindeutige Weise zu einem linearen und beschränkten Operator $T\colon X_1 \to X_2$, unter Erhalt der Norm, fortgesetzt werden (d.h. $Tx = T_0 x \quad \forall x \in E$ und $\|T|\mathcal{L}(X_1, X_2)\| = \|T_0|\mathcal{L}(E, X_2)\|$).

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Satz 2.3.4 (Komposition von Operatoren):
Sei $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ und $S \in \mathcal{L}(X_2, X_3)$. Dann ist $ST := (S \circ T) \in \mathcal{L}(X_1, X_3)$ mit $\|(ST)|\mathcal{L}(X_1, X_3)\| \leq \|S|\mathcal{L}(X_2, X_3)\| \cdot \|T|\mathcal{L}(X_1, X_2)\|$ (kurz: $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$).

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Bemerkung:
Im Allgemeinen herrscht dort keine Gleichheit.

Beispiel:
Seien $T, S\colon l_2 \to l_2$ gegeben mit $Tx := (\xi_1, 0, \xi_3, 0, \xi_5, \ldots)$ und $Sx := (0, \xi_2, 0, \xi_4, \ldots)$ für $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$. Dann ist $\|T|\mathcal{L}(l_2)\| = \|S|\mathcal{L}(l_2)\| = 1$, aber $STx = TSx = 0$, damit ist $\|ST|\mathcal{L}(l_2)\| = \|TS|\mathcal{L}(l_2)\| = 0$. D.h. es handelt sich um eine echte Ungleichung $0 < 1 \cdot 1 = 1$.

Bemerkung:
Von Interesse sind Aussagen über Invertierbarkeit von linearen Operatoren.
Für $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $Tx = y$ stellen sich also folgende Fragen:
(i) $\exists x \in X$ mit $Tx = y$ für alle $y \in Y$? (Lösbarkeit)
(ii) Sind diese x jeweils eindeutig bestimmt?
(iii) Ist die jeweilige Lösung stetig abhängig von der rechten Seite? D.h. welche Auswirkung hat der Übergang von y zu $\widetilde{y} \in Y$ mit $\|y - \widetilde{y}\| < \delta$ auf die Lösung x?

Beispiel:
Sei p eine fixierte stetige Funktion und der Operator $P(D)\colon C^1([a,b]) \to C([a,b])$ definiert durch $(P(D)x)(t) := x'(t) + p(t)x(t)$, für $x \in C^1([a,b])$. Zu beachten ist dabei die Norm $\|f|C^1([a,b])\| := \|f|C([a,b])\| + \|f'|C([a,b])\|$.
Dann ist $P(D)x = y \;\Leftrightarrow\; x'(t) + p(t)x(t) = y(t)$ für $t \in [a,b]$ eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Aussagen über Lösbarkeit und Eindeutigkeit liefert der Satz von Piccard-Lindelöff. Könnte man den Operator invertieren, wäre die Lösung unmittelbar ablesbar.
Erweiterung auf partielle Differentialgleichungen:
$P(D) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ definiert einen allgemeinen Differentialoperator m-ter Ordnung.

Definition 2.3.2:
Für lineare Operatoren $T\colon X \to Y$ definiert man:
(i) $\mathbf{Ker}(\boldsymbol{T}) = N(T) := \{x \in X \,|\, Tx = 0\}$ heißt **Kern von $\boldsymbol{T}$**
(ii) $\mathbf{Im}(\boldsymbol{T}) = R(T) := \{y \in Y \,|\, \exists x \in X \text{ mit } y = Tx\}$ heißt **Bild von $\boldsymbol{T}$**

Lemma:
Sei $T\colon X \to Y$ ein linearer und beschränkter Operator. Dann gilt:
(i) $\mathrm{Ker}(T)$ ist ein linearer und abgeschlossener Teilraum von X
(ii) $\mathrm{Im}(T)$ ist ein linearer Teilraum von Y (i.A. nicht abgeschlossen).

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Definition:
Ist $\mathrm{Im}(T)$ endlich-dimensional, so heißt der lineare Operator T **endlich-dimensional** , **ausgeartet** oder auch **finit** .

Definition 2.3.3:
Ein linearer und beschränkter Operator $T\colon X \to Y$ heißt **invertierbar** $:\Leftrightarrow \exists S \in \mathcal{L}(Y, X)$ mit $ST = I_X\colon X \to X$ und $TS = I_Y\colon Y \to Y$, wobei I die Identität bezeichnet ($I_A x = x \quad \forall x \in A$). Ein solches S wird mit $\boldsymbol{T^{-1}}$ bezeichnet.

Bemerkung:
In dieser Definition wird neben der algebraischen Invertierbarkeit zusätzlich noch die Setigkeit des **inversen Operators** gefordert. Es gibt Beispiele, bei denen der Umkehroperator nicht zwingend stetig sein muss. Exemplarisch ist hier die identische Abbildung auf den stetigen Funktionen zu nennen, genauer: $id\colon (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_1)$, da der Zielraum nicht vollständig ist. Der Satz von Banach (siehe Höhere Analysis II) macht später genauere Aussagen über die Stetigkeit inverser Operatoren.

Lemma:
Falls T invertierbar ist, gilt $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ und $\mathrm{Im}(T) = Y$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Bemerkung:
Ist T^{-1} auch stetig, d.h. beschränkt, wenn $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ und $\mathrm{Im}(T) = Y$ gilt? Ja: Satz von Banach (vergleiche Höhere Analysis II).

Beispiel (Für Kern und Bild eines Operators):
Sei $1 < p < \infty$ und $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) \in l_p$.
(i) Die Abbildung $L\colon l_p \to l_p$ (z.B.: $l_2 \to l_2$) mit $Lx := (\xi_2, \xi_3, \xi_4, \ldots)$ heißt Linksshift.
Es gilt: $\mathrm{Ker}(L) = \{x \in l_p \,|\, x = (\xi_1, 0, \ldots)\}$ und $\mathrm{Im}(L) = l_p$

(ii) Analog zu (i) kann man den Rechtsshift $R\colon l_p \to l_p$ mit $Rx := (0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$ definieren.
Es gilt: $\mathrm{Ker}(R) = \{0\}$ und $\mathrm{Im}(R) = \{y \in l_p \,|\, \eta_1 = 0\} \subset l_p$, wobei $\overline{\mathrm{Im}(R)} \neq l_p$.

(iii) Der Diagonaloperator $D\colon l_p \to l_p$ mit $Dx := (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \ldots)$ liefert das Folgende:
$\mathrm{Ker}(D) = \{0\}$ und $\mathrm{Im}(D) \subsetneqq l_p$, aber das Bild liegt dicht in l_p, d.h. $\overline{\mathrm{Im}(D)} = l_p$. Dazu wähle $y = Dx = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots) \in l_p$, dann ist $x = (1, 1, \ldots) \notin l_p$. Es gibt also kein Urbild für y in l_p. Und es gilt: $l_p = \overline{F} \subset \overline{\mathrm{Im}(D)} \subset l_p$, wobei F die finiten Folgen bezeichnen.

Definition 2.3.4:
Ein linearer und beschränkter Operator $T\colon X \to Y$ zwischen zwei normierten Räumen heißt **Isomorphismus** $:\Leftrightarrow$ T ist bijektiv und T^{-1} ist stetig (also beschränkt).
Gilt darüber hinaus sogar $\|Tx\| = \|x\| \quad \forall x \in X$ so wird T als **Isometrie** bezeichnet.
Die entsprechenden Räume heißen zueinander **isomorph** $\boldsymbol{X \simeq Y}$ (bzw. sogar **isometrisch isomorph** $\boldsymbol{X \cong Y}$).

Beispiel:
$c \simeq c_0$ (konvergente Folgen sind isomorph zu Nullfolgen).

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
betrachte nun folgenden Spezialfall:
Für einen linearen und beschränkten Operator $T\colon X \to X$ über einem normierten Raum X definiert man die **Neumann'sche Reihe von $\boldsymbol{T}$** zu $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$. Dabei ist $T^n = T \circ T \circ \ldots \circ T$ und per Definition $T^0 = I_X$.

Satz 2.3.5 (Satz über die Neumann'sche Reihe):
Sei $T \in \mathcal{L}(X)$, X Banachraum und $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$. Dann ist $I_X - T$ invertierbar und die Neumann'sche Reihe konvergiert (in der Operatorennorm) mit $\sum_{n=0}^{\infty} T^n = (I_X - T)^{-1}$.
Ist ferner $\|T\| < 1$, so gilt außerdem $\|(I_X - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
Wegen dem Satz über die Komposition von Operatoren gilt für $T \in \mathcal{L}(X) : \|T^n\| \leq \|T\|^n$.

Bemerkung:
Es genügt zu fordern, dass $\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$, denn setzt man $a_n := \|T^n\| \geq 0$, so hat die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ die spezielle Eigenschaft $a_{n+m} \leq a_n \cdot a_m$. Für solche Folgen gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}}$ (Vergleiche dazu [Heuser]).

Bemerkung (Zusammenhang zum Banach'schen Fixpunktsatz):
Sei $T\colon X \to X$ linear mit $\|T\| \leq 1$ und $y_0 \in X$ beliebig. Dann ist $\mathbb{K}\colon X \to X$, definiert durch $\mathbb{K}x := y_0 + Tx$ eine kontrahierende Abbildung, denn für $x_1, x_2 \in X$ gilt
$\|\mathbb{K}x_1 - \mathbb{K}x_2\| = \|Tx_1 - Tx_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$ mit $L = \|T\| < 1$. Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz existiert also ein $x^* \in X$, für welches gilt

$\mathbb{K}x^* = x^* = y_0 + Tx^* \;\Leftrightarrow\; y_0 = x^* - Tx^* = (I_X - T)x^* \;\Leftrightarrow\; x^* = (I_X - T)^{-1}y_0$. Ist $x_0 \in X$ beliebig fixiert folgt daher durch Iteration

$$\begin{aligned} x_1 &= y_0 + Tx_0 \\ x_2 &= y_0 + T(y_0 + Tx_0) \\ &= y_0 + Ty_0 + T^2x_0 \\ x_3 &= y_0 + T(y_0 + Ty_0 + T^2x_0) \\ &= y_0 + Ty_0 + T^2y_0 + T^3x_0 \\ &\vdots \\ x_j &= y_0 + Ty_0 + \ldots + T^{j-1}y_0 + T^jx_0 \end{aligned}$$

Damit ist $x^* = \lim_{j\to\infty} x_j = \lim_{j\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{j-1} T^n y_0 + T^j x_0\right) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n y_0$ mit $\lim_{j\to\infty} T^j x_0 = 0$, da $\|T\| \leq 1$.

Definition 2.3.5 (Kompakter Operator):
Ein linearer $T\colon X \to Y$ zwischen normierten Räumen heißt **kompakter Operator** :⇔ T bildet alle beschränkten Mengen aus X in präkompakte Mengen in Y ab.

Bemerkung:
Dies ist eine schärfere Forderung als beschränkter Operator. Genauer gilt: T (linear) ist kompakt ⇒ T ist beschränkt, denn präkompakte Mengen sind beschränkt.
Es genügt zu fordern, dass die abgeschlossene Einheitskugel $K_1^X(0) = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ in X durch T in eine präkompakte Menge $T(K_1^X(0)) \subset Y$ überführt wird.

Lemma:
Der lineare Operator $T\colon X \to Y$ ist kompakt ⇔ $T(K_1^X(0)) \subset Y$ ist präkompakt.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Lemma:
Ist T ein linearer, beschränkter und ausgearteter Operator $(\dim(\mathrm{Im}(T)) < \infty)$ so folgt, dass T kompakt ist.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
Ein Banachraum X hat endliche Dimension ⇔ $\mathcal{L}(X)$ enthält nur kompakte Operatoren.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Satz 2.3.6:
Ist Y ein Banachraum so bildet die Menge aller (linearen) kompakten Operatoren $T\colon X \to Y$ einen abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{L}(X, Y)$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Folgerung:
Sei Y ein Banachraum und $(T_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ eine Folge ausgearteter Operatoren ($\Rightarrow T_n$ kompakt) mit $T_n \to T$ (in der Operatorennorm), so ist der Grenzoperator T kompakt.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
In Hilberträumen ist das sogar eine Charakterisierung kompakter Operatoren (eine genau-dann-wenn-Aussage).
In allgemeinen Banachräumen ist die Umkehrung allerdings nicht immer richtig (Gegenbeispiel 1973 von Enflo, siehe [Werner]).

Bemerkung:
Seien X, Y, Z Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Ist T oder S kompakt, so ist auch $ST \in \mathcal{L}(X, Z)$ kompakt.

Beweis::
Entfällt. ■

Definition:
In einem Banachraum X bezeichnet $\boldsymbol{\mathcal{K}(X)}$ die Menge aller **kompakten Operatoren** $T\colon X \to X$.

Bemerkung:
$\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{L}(X)$
$\mathcal{L}(X)$ ist eine Banachalgebra und $\mathcal{K}(X)$ eines ihrer Ideale (abgeschlossen bzgl. Addition und Komposition und für $S \in \mathcal{K}(X)$, $T \in \mathcal{L}(X)$ gilt stets $ST, TS \in \mathcal{K}(X)$).

Bemerkung:
Die Kompaktheit eines Operators kann durch die **Entropiezahlen** von $T(K_1^X(0))$ gemessen werden:

$$\begin{aligned} e_k(T) := \inf\{\varepsilon > 0 \,|\, T(\{x \in X \,|\, \|x\| \leq 1\}) \subset Y \text{ kann durch } 2^{k-1} \text{ Kugeln} \\ \text{mit Radius } \leq \varepsilon \text{ überdeckt werden}\} \end{aligned}$$

Es gilt für Operatoren S und T, wegen $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$:

$$\begin{aligned} e_1(T) &= \|T\| \\ e_{k+l-1}(ST) &\leq e_k(S) \cdot e_l(T) \\ e_{k+l-1}(S+T) &\leq e_k(S) + e_l(T) \end{aligned}$$

(das geht auch für lineare und beschränkte Operatoren)
Es gilt: T kompakt $\Leftrightarrow e_k(T) \to 0$, für $k \to \infty$.
Desweiteren kann man **Approximationszahlen** von Operatoren definieren:

$$\boldsymbol{a_k(T)} := \inf\{\|T - A\| \,|\, A \in \mathcal{L}(X,Y) \text{ ausgeartet mit } \dim(\mathrm{Im}(A)) \leq k\}$$

Gilt $a_k \to 0$, für $k \to \infty$ (d.h. $\exists (A_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ mit $A_k \to T$ in $\mathcal{L}(X,Y)$), so folgt, dass T kompakt ist.
Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch (nach obiger Bemerkung).

Beispiel (Ein auf ganz X definierter unbeschränkter Operator):
Sei $B = \{x_\alpha \,|\, \alpha \in I\}$ - wobei I potentiell überabzählbar sein darf - eine algebraische Basis des linearen Raumes X, d.h. jedes Element des Raumes ist durch eine endliche Linearkombination dieser Basiselemente darstellbar. Wähle nun eine abzählbare Teilmenge paarweise verschiedener Indizes $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \subset I$, dann definiert $T(\sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha x_\alpha) := \sum_{k=1}^{\infty} k\lambda_{\alpha_k} x_{\alpha_k}$ sinnvoll einen linearen Operator, da die Darstellung von $x, y \in X$ eindeutig bestimmt ist (denn B ist Basis) und sowohl links (die restlichen α_k sind 0), als auch rechts (fast alle λ_{α_k} sind 0) eine endliche Summe steht. Des Weiteren ist T unbeschränkt, denn es gilt $T(x_{\alpha_k}) = kx_{\alpha_k}$, bzw. $\|T(x_{\alpha_k})\| = k\|x_{\alpha_k}\|$.

Beispiel (Ein Operator bei dem $\mathrm{Ker}(T)$ nicht abgeschlossen ist):
Wähle für $1 \leq p < \infty$ den Raum $X = l_p$. Die algebraische Basis $B = \{x_\alpha \,|\, \alpha \in I\}$ von X möge die Einheitsvektoren bzw. -folgen $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ enthalten (und noch mehr!). Setze $x_{\alpha_k} := e_k$ und definiere dann den unbeschränkten Operator $T\colon l_p \to \mathbb{C}$ durch $T(\sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha x_\alpha) := \sum_{k=1}^{\infty} k\lambda_{\alpha_k}$.
Dann sind die Elemente $x_n = e_1 - \frac{1}{n}e_n = (1, 0, \ldots, 0, -\frac{1}{n}, 0, \ldots) \in \mathrm{Ker}(T)$. Die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset l_p$ strebt offensichtlich gegen $e_1 = (1, 0, \ldots)$, aber $e_1 \notin \mathrm{Ker}(T)$, da gilt $T(e_1) = 1$.

2.4 Lineare Funktionale

In diesem Abschnitt sei X ein normierter Raum und $Y = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$. Man betrachtet nun $\mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ bzw. $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ - d.h. lineare und beschränkte Operatoren $T\colon X \to \mathbb{C}$.
Da $\mathbb{C}$ Banachraum ist, folgt, dass auch $\mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ zum Banachraum wird.

Definition:
$\boldsymbol{X'} := \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ heißt Raum der linearen und stetigen (beschränkten) **Funktionale über $\boldsymbol{X}$** oder auch **Dualraum von $\boldsymbol{X}$** . **Elemente aus $\boldsymbol{X'}$** werden Funktionale genannt und mit $\boldsymbol{x'}$ bezeichnet.
Man schreibt auch $\|x'|X'\| = \sup_{\|x|X\|=1} |x'(x)| = \sup_{\|x|X\|=1} |< x', x >|$

Wie sieht X' in konkreten Fällen aus?

Beispiel:
$(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)' \cong (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$

Satz 2.4.1:
(i) Sei $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($\frac{1}{\infty} = 0$ im Fall $p = 1, q = \infty$). Dann ist die Abbildung $T\colon l_q \to (l_p)'$ mit $(Ty)(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k$, wobei $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p$ und $y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q$, ein isometrischer Isomorphismus.
(ii) Die selbe Abbildungsvorschrift vermittelt einen isometrischen Isomorphismus zwischen l_1 und $(c_0)'$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Satz 2.4.2:
Sei $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ferner sei (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum. Dann definiert $T\colon L_q(\Omega, \Sigma, \mu) \to (L_p(\Omega, \Sigma, \mu))'$ mit $(Tg)(f) := \int_\Omega (fg) d\mu$ einen isometrischen Isomorphismus.

Beweis::
Siehe [Werner, II 2.4]. ■

Beispiel:
Für $f \in L_p([a, b])$ mit Lebesgue-Maß und $0 < p < 1$ ist $\|f|L_p\| = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$.
L_p ist in diesem Fall ein Quasi-Banachraum, da es sich nur um eine Quasi-Norm handelt (Dreiecksungleichung mit einer Konstanten > 1).
Es gilt $(L_p([a, b]))' = \{0\}$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Bemerkung:
Wie „reichhaltig“ ist X' also? Kann man durch X' Elemente aus X „trennen“ - d.h. existiert für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ein $x' \in X'$ mit $x'(x) \neq x'(y)$ bzw. $x'(x-y) \neq 0$?
Das hängt mit der Fortsetzbarkeit von linearen Funktionalen zusammen:

Sei $E \subset X$ ein echter linearer Teilraum eines Vektorraums X, sowie $l\colon E \to \mathbb{C}$ ein lineares Funktional auf E. Kann dieses auf ganz X fortgesetzt werden?
$\exists y_1 \in X \setminus E$. Damit ist $E \cup \{y_1\}$ linear unabhängig, denn sonst wäre $y_1 \in E$.
$x \in \operatorname{Span}(E \cup \{y_1\})$ besitzt die eindeutige Darstellung $x = z + \alpha y_1$ mit $z \in E$ und $\alpha \in \mathbb{C}$.
Definiere $l_1(x) := l(y) + \alpha c_1$ mit $c_1 = const.$ beliebig fixiert.
Setzt man $E_1 := \operatorname{Span}(E \cup \{y_1\})$ so folgt $l_1\colon E_1 \to \mathbb{C}$ ist eine lineare Fortsetzung von l.
Führt man diesen Prozess itterativ weiter so erhält man $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Ist dies bereits der gesamte Raum X (was in der Regel nicht der Fall ist) so ist man fertig. Der Fortsetzungsprozess ist für Räume diesen „Typs“ also so möglich.

Definition 2.4.1:
Eine Abbildung $p\colon X \to \mathbb{R}$ heißt **sublinear** :⇔ für beliebige $x, y \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} p(x+y) &\leq p(x) + p(y) && \text{(subadditiv) und} \\ p(\alpha x) &= \alpha p(x) \quad \forall \alpha > 0 && \text{(positiv-homogen)} \end{aligned}$$

Beispiel:
(i) Normen und Halbnormen
(ii) Jede lineare Abbildung von X nach $\mathbb{R}$ auf reellem Vektorraum
(iii) $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l_\infty$ (reelle Folgen) und $p(x) := \limsup_k \xi_k$
(iv) $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l_\infty$ (komplexe Folgen) und $p(x) := \limsup_k \Re(\xi_k)$ (oder $\Im(\xi_k)$)

Satz 2.4.3 (Satz von Hahn-Banach, Variante: Lineare Algebra):
Sei X ein reeller Vektorraum und p eine sublineare Abbildung auf X. Ferner sei auf einem linearen Teilraum E von X ein lineares Funktional $l\colon E \to \mathbb{R}$ mit $l(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E$ gegeben. Dann existiert eine Fortsetzung L von l auf ganz X mit $L(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Bemerkung:
Eine solche Fortsetzung ist im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Satz (Satz von Hahn-Banach, Variante: Lineare Algebra, komplex):
Sei X ein reeller oder komplexer Vektorraum und p ein reellwertiges, subadditves und betragshomogenes Funktional auf X $(p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \alpha \in \mathbb{K})$. Außerdem sei auf einem linearen Unterraum $E \subset X$ ein lineares Funktional $l\colon E \to \mathbb{C}$ mit $|l(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in E$ gegeben. Dann hat l eine lineare Fortsetzung L auf ganz X mit $|L(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Satz 2.4.4 (Hahn-Banach-Theorem):
Sei l ein stetiges, lineares Funktional auf einem linearen Teilraum E eines normierten Raumes X. Dann existiert eine stetige lineare Fortsetzung $L\colon X \to \mathbb{C}$ von l auf X mit der gleichen Norm, d.h. $\|l|E'\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |l(x)| = \sup_{\|x\|} |L(x)| = \|L(x)|X'\|$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Folgerung 2.4.1:
Ist X ein normierter Raum und $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Dann existiert ein lineares und stetiges Funktional $L \in X'$ mit $\|L|X'\| = 1$ und $L(x_0) = \|x_0\|$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
Variante: $\|\widetilde{L}|X'\| = \frac{1}{\|x_0\|}$ und $\widetilde{L}(x_0) = 1$.

Bemerkung:
Damit kann man Elemente x und y trennen, denn es existiert ein Funktional L, welches auf $x_0 := y - x$ nicht Null ist. Da L linear ist folgt $L(x) \neq L(y)$.

Folgerung 2.4.2:
Ist X ein normierter Raum, so gilt für jedes $x \in X$ stets

$$\|x\| = \sup_{\|L|X'\| \leq 1} |L(x)| = \sup_{L \in X' \setminus \{\mathcal{O}\}} \frac{|L(x)|}{\|L|X'\|}$$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Folgerung 2.4.3:
Gilt für ein Element x eines normierten Raumes X stets $L(x) = 0$ für jedes Funktional $L \in X'$, so ist $x = 0$.

Beweis::
klar. ∎

Bemerkung:
Ist X ein normierter Raum, so ist $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ der Raum der linearen und stetigen Funktionale über X (Dualraum) - ein Banachraum, da $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ Banachräume sind. Man kann nun über X' abermals lineare, stetige Funktionale definieren.

Definition 2.4.2:
Für einen normierten Raum X wird $\boldsymbol{X''} := (X')' = \mathcal{L}(X', \mathbb{C})$ der **Bidualraum von $\boldsymbol{X}$** genannt.

Lemma:
Ist $x \in X$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so ist $i_x \colon X' \to \mathbb{K}$, definiert durch $i_x(x') := x'(x)$ für $x' \in X'$, ein lineares und stetiges Funktional über X', d.h. $i_x \in X''$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Bemerkung:
Es gilt wegen $\|x\| = \sup_{\|x'|X'\| \leq 1} |x'(x)|$ (vgl. Folgerung 2.4.2) sogar $\|i_x|X''\| = \|x\|$.

Folgerung:
$J \colon X \to X''$ mit $J(x) := i_x$ ist eine lineare, stetige und normerhaltende (nicht notwendig surjektive) Abbildung, die jedem x das lineare Funktional $i_x \colon X' \to \mathbb{K}$ zuordnet.

Beweis::
Linearität klar: $J(x+y)(x') = i_{x+y}(x') = x'(x+y) = x'(x) + x'(y) = i_x(x') + i_y(x') = J(x)(x') + J(y)(x') \quad \forall x' \in X'$, damit folgt $J(x+y) = J(x) + J(y)$.
Beschränktheit (Stetigkeit) und Normerhaltung folgen unmittelbar aus obiger Bemerkung: $\|J(x)|X''\| = \|i_x|X''\| = \|x\| \quad \forall x \in X$. ∎

Bemerkung:
Man nennt J die kanonische Einbettung von X in X''.
Insbesondere ist $\|J|\mathcal{L}(X, X'')\| = 1$.

Lemma:
Ist X ein normierter Raum so folgt:
(i) $X'' = \mathcal{L}(X', \mathbb{C})$ ist Banachraum.
(ii) $J(X)$ (das Bild von X unter der Abbildung J) ist ein linearer Teilraum von X''.
(iii) Ist X überdies vollständig (Banachraum) so ist $J(X)$ abgeschlossen (im topol. Sinne) und damit auch Banachraum.

Beweis::
(i) Wegen Satz 2.3.2, da $\mathbb{C}$ vollständig ist.
(ii) Siehe obige Folgerung und Lemma aus Abschnitt 2.3.
(iii) Wähle eine beliebige Cauchy-Folge $(x''_k)_{k=1}^{\infty}$ in $J(X) \subset X''$. Dann existiert wegen (i) ein Grenzelement $\widehat{x''} \in X''$. Die Linearität und Normerhaltung von J liefern ferner, dass auch die Urbild-Folge $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset X$ eine Cauchy-Folge ist:
$\|x_m - x_n|X\| = \|J(x_m - x_n)|X''\| = \|J(x_m) - J(x_n)|X''\| = \|x''_m - x''_n|X''\| < \varepsilon$.
Ist X Banachraum, so existiert auch dort ein Grenzelement $x \in X$, dessen Bild $J(x) = x''$ offensichtlich in $J(X)$ liegt.
Aus der Stetigkeit von J folgt, dass $x''_k = J(x_k)$ gegen $J(x) = x'' \in J(X)$ konvergiert. Da der Grenzwert eindeutig bestimmt ist folgt $\widehat{x''} = x'' \in X''$. Damit ist $J(X)$ abgeschlossen und daher als abgeschlossene Teilmenge eines Banachraums auch selbst Banachraum. ■

Bemerkung:
Damit kann man die Vervollständigungsproblematik in normierten Räumen behandeln:

Folgerung:
Jeder normierte Raum ist isometrisch isomorph zu einem dichten Unterraum eines Banachraumes.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Beispiel ($c''_0 \cong l_\infty$):
c_0 mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist ein Banachraum. Frühere Überlegungen zeigten, dass $(c_0)' \cong l_1$ und $(l_1)' \cong l_\infty$ gilt. Damit folgt unmittelbar $(c_0)'' \cong l_\infty$.
Die Abbildung $J_{c_0} : c_0 \to l_\infty$ sieht dann mit $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0$ und $y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty} \in l_1 \cong (c_0)'$ so aus: $J_{c_0}(x)(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k$. Damit ist c_0 in l_∞ eingebettet, wobei J_{c_0} nicht surjektiv ist.

Beispiel ($l''_p \cong l_p$):
Für $1 < p < \infty$ gilt $(l_p)' \cong l_q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (siehe oben). Dann ist offensichtlich $1 < q < \infty$ und damit nach gleichem Argument $(l'_p)' = (l_p)'' \cong (l_q)' \cong l_p$. Daher ist $l''_p \cong l_p$.
D.h. mit $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p$ und $y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q \cong (l_p)'$ ist $J_{l_p}(x)(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k$.

Definition:
Ist X Banachraum und die Abbildung J surjektiv so heißt X **reflexiv** oder selbstbezüglich, d.h. es gilt $X'' \cong X$.

Bemerkung:
Mit Hilfe des Dualraums X' eines normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$ kann man eine neue, schache Konvergenz definieren: Eine Folge konvergiert genau dann schwach in X, wenn alle linearen, stetigen Funktionale angewendet auf die Folge gegen das entsprechende Funktional angewendet auf den schwachen Grenzwert konvergieren.

Definition:
Ist $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ eine Folge in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ und $x \in X$, so definiert man:
$\boldsymbol{x_j \xrightarrow{\sigma} x}$ (oder $\sigma - \lim_{j\to\infty} x_j = x$ oder **weak-** $\mathbf{lim}_{j\to\infty} \boldsymbol{x_j} = x$) $:\Leftrightarrow \forall x' \in X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ gilt $x'(x_j) \to x'(x)$ für $j \to \infty$.
In diesem Falle nennt man die Folge $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ **schwach konvergent** in X.

Lemma:
Aus der Konvergenz einer Folge folgt stets auch die schwache Konvergenz.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

Beispiel (Schwach-konvergente Folge, die nicht konvergiert):
Sei $1 < p < \infty$. Man betrachte die Folge der Einheitsvektoren $(e_j)_{j=1}^{\infty} \subset l_p$ mit $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) = (\xi_k^{(j)})_{k=1}^{\infty}$ und wähle ferner ein $x' = (\eta_k)_{k=1}^{\infty} \in (l_p)' \cong l_q$. Dann gilt (siehe früher): $x'(e_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k^{(j)} = \eta_j$. Damit ist $\lim_{j\to\infty} x'(e_j) = \lim_{j\to\infty} \eta_j = 0$, wegen $(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q)^{\frac{1}{q}} < \infty$. Also gilt weak-$\lim_{j\to\infty} e_j = 0$, aber $\|e_j\| = 1$, d.h. es existiert kein $\lim_{j\to\infty} e_j$.

Bemerkung:
Der schwache Grenzwert ist stets eindeutig bestimmt.

Lemma:
$(f_j)_{j=1}^{\infty} \subset C([0,1])$ konvergiert schwach gegen $0 \in C([0,1]) \Leftrightarrow (f_j)_{j=1}^{\infty}$ konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion: $\lim_{j\to\infty} f_j(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1]$

Beweis::
Entfällt. ■

3 Hilberträume

3.1 Grundbegriffe

Bemerkung:
In diesem Kapitel wollen wir den Begriff des Banachraums weiter spezifizieren. Es ergibt sich folgende Rangordnung (vom Allgemeinen zum Speziellen):

Topologischer Raum
Metrischer Raum
Normierter Raum
Banachraum
Hilbertraum

Bemerkung (unübliche Definition):
Ein Hilbertraum ist ein Banachraum in dem für beliebige Elemente x, y stets die **Parallelogrammgleichung** $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ gilt.

Definition 3.1.1:
Sei H ein linearer Raum über $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$). Eine Abbildung $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{C}$ heißt **Skalarprodukt** $:\Leftrightarrow \forall x, y, x_1, x_2 \in H$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$) gilt:

(i) $(x, x) > 0$ für $x \neq 0$ (insbesondere reell)

(ii) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ ($\bar{\cdot}$ konjugiert komplex)

(iii) $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 (x_1, y) + \lambda_2 (x_2, y)$

Bemerkung:
Ein Skalarprodukt ist also eine positiv definite, hermitische Sesquilinearform. Im Falle eines Vektorraums über $\mathbb{R}$ ist das Skalarprodukt eine positiv definite, symmetrische Bilinearform (Abb. $H \times H \to \mathbb{R}$).

Lemma:
Es gilt für alle $x, y_1, y_2 \in H$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$):

(i) $(0, x) = (0x, x) = 0(x, x) = 0$

(ii) $(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \overline{(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, x)} = \overline{\lambda_1 (y_1, x) + \lambda_2 (y_2, x)} = \overline{\lambda_1}(x, y_1) + \overline{\lambda_2}(x, y_2)$

(iii) $(x, x) = \overline{(x, x)} \in \mathbb{R}$

Beweis::
Trivial. ∎

Satz 3.1.1:
Im Vektorraum H wird mittels der Abbildung $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$ eine Norm definiert.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Bemerkung:
Durch die vom Skalarprodukt **induzierte Norm** ist $(H, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

Lemma 3.1.1 (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung):
Sei H ein normierter Raum, $x, y \in H$ und $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$. Dann gilt stets

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Gleichheit gilt nur für ($x = 0$ oder $y = 0$ oder) $x = \lambda y$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Folgerung:
Das Skalarprodunkt ist stetig, d.h. für $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, sowie $x, y \in H$ mit $x_n \to x$ und $y_n \to y$ gilt $(x_n, y_n) \to (x, y)$ (in $\mathbb{C}$).

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Satz 3.1.2:
Sei X ein normierter Raum. Dann gilt:
Es existiert auf X ein Skalarprodunkt mit $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$ $\Leftrightarrow$ für alle $x, y \in X$ gilt die **Parallelogramm-Gleichung** : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Definition 3.1.2:
(i) Ein linearer Raum X mit Skalarprodukt heißt **Prähilbertraum** .
(ii) Ist der durch $\|\cdot\| := \sqrt{(\cdot,\cdot)}$ bestimmte normierte Raum $(X, \|\cdot\|)$ vollständig (d.h. Banachraum), so heißt $H := X$ **Hilbertraum** (mit diesem Skalarprodukt).

Beispiel:
(i) $H := \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ mit l_2^n-Norm ist ein Hilbertraum mit $\boldsymbol{(x,y)} := \sum_{k=1}^n \xi_k \overline{\eta_k}$, für $x := (\xi_k)_{k=1}^n, y := (\eta_k)_{k=1}^n \in H$

(ii) $H := \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ mit l_p^n-Norm ($p \neq 2$): kein Skalarprodukt möglich. Sei dazu beispielsweise $p = 1$, $x = (1, 0, \ldots)$ und $y = (0, 1, 0, \ldots)$. Dann ist $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$, sowie $\|x+y\|_1 = \|x-y\|_1 = 2$. Damit ist die Parallelogrammgleichung verletzt: $2^2+2^2 \neq 2(1+1)$.

(iii) $H := l_2$ ist Hilbertraum mit $\boldsymbol{(x,y)} := \sum_{k=1}^\infty \xi_k \overline{\eta_k}$, für $x := (\xi_k)_{k=1}^\infty, y := (\eta_k)_{k=1}^\infty \in H$, das ist sinnvoll, da nach der Hölder'schen Ungleichung gilt:

$$|\sum_{k=1}^\infty \xi_k \overline{\eta_k}| \leq \left(\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^\infty |\overline{\eta_k}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Die Norm sieht dann so aus: $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^\infty \xi_k \overline{\xi_k}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ und l_2 ist damit vollständig.

(iv) Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist $L_2(\Omega)$ (Äquivalenzklassen quadratisch integrierbarer Funktionen von Ω nach $\mathbb{R}$, die sich nur auf Nullmengen unterscheiden) ein Hilbertraum mit der Norm

$$\|f \mid L_2(\Omega)\| = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

und folgendem Skalarprodukt:

$$\boldsymbol{(f,g)} := \int_\Omega f(x)g(x) \, d\mu(x)$$

Denn $(L_2(\Omega), \|\cdot\|)$ ist nach Lemma 2.1.3 ein Banachraum und $(\cdot,\cdot) \colon L_2 \times L_2 \to \mathbb{R}$ ist eine symmetrische, offensichtlich linkslineare Abbildung (da das Integral linear ist) für die gilt $(f, f) > 0$ für $f \in L_2 \setminus \{0\}$, denn wegen $f \neq 0 \Rightarrow \exists M \subset \Omega$ mit $\mu(M) \neq 0$, sodass gilt $\forall x \in M : f(x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \int_M f(x)^2 d\mu(x) \leq \int_\Omega f(x)^2 d\mu(x) = (f, f)$.

Definition 3.1.3:
Sei H ein (Prä-) Hilbertraum.
(i) $x, y \in H$ heißen **orthogonal** (schreibe $\boldsymbol{x \perp y}$) $:\Leftrightarrow (x, y) = 0$.
(ii) $M_1, M_2 \subset H$ heißen **orthogonal** (schreibe $\boldsymbol{M_1 \perp M_2}$) $:\Leftrightarrow \forall x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$ gilt $x_1 \perp x_2$.
(iii) $\boldsymbol{M^\perp} := \{x \in H \,|\, \forall y \in M : (x, y) = 0\}$ heißt das **orthogonale Komplement** von $M \subset H$.

Folgerung:
Sei H ein (Prä-) Hilbertraum.
(i) $x, y \in H, x \perp y \Rightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$ (Pythagoras).
(ii) $M^\perp$ ist ein abgeschlossener linearer Teilraum von H.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Folgerung:
Sei H ein (Prä-) Hilbertraum. Dann gilt stets:
(i) $M \subset (M^\perp)^\perp$
(ii) $M^\perp = \overline{\mathrm{Span}(M)}^\perp$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Definition:
Eine Teilmenge M eines (reellen) linearen Raumes heißt **konvex** $:\Leftrightarrow$ für alle $x, y \in M$ und $t \in [0, 1]$ ist $tx + (1 - t)y \in M$ (alle Elemente der Verbindungsgerade zwischen x und y aus M gehören ebenfalls zur Menge).

Lemma 3.1.2:
Jede abgeschlossene und konvexe Teilmenge M eines Hilbertraumes H besitzt genau ein Element minimaler Norm, d.h. $\exists! x^* \in M$ mit $\|x^*\| = \min_{x \in M} \|x\|$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Folgerung (Bestapproximation):
Ist H ein (Prä-) Hilbertraum und $M \subset H$ eine konvexe, abgeschlossene (und vollständige) Teilmenge. Dann existiert zu jedem $x_0 \in H$ genau ein $y \in M$ mit

$$\|y - x_0\| = \min_{z \in M} \|z - x_0\|.$$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Definition:
Man nennt $\boldsymbol{\alpha(x_0, M)} := \min_{z \in M} \|z - x_0\|$ den **Abstand** des Punktes x_0 von der Menge M.

Bemerkung:
Die Folgerung gilt auch in vielen Banachräumen, aber nicht in allen.

Beispiel:
Gültig für l_p mit $1 < p < \infty$.
Ungültig für l_1, l_∞. Beispielsweise besitzt die abgeschlossene Kugel $K_1((0,2))$ des l^2_∞ unendlich viele Punkte mit minimalem Abstand zum Ursprung.

Satz 3.1.3:
Sei H ein (Prä-) Hilbertraum und H_1 ein abgeschlossener (und vollständiger) linearer Teilraum von H. Dann kann jedes $x \in H$ eindeutig in der Form $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in H_1$ und $x_2 \in H_1^\perp$ dargestellt werden.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Definition:
x_1 aus Satz 3.1.3 heißt **orthogonale Projektion** von x auf H_1.

Folgerung:
Ist H_1 ein abgeschlossener, linearer Teilraum eines Hilbertraumes H, so gilt $(H_1^\perp)^\perp = H_1$.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Bemerkung:
Die Vollständigkeit (welche für einen Prähilbertraum separat für den Unterraum gefordert werden muss) ist wichtig für die Existenz der orthogonalen Projektion, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel:
Die Menge $\widetilde{H} := \{f \in C([0,1]) \,|\, f(1) = 0\}$ mit dem Skalarprodukt aus $C([0,1])$, also $(f,g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ ist ein Hilbertraum, welcher nicht vollständig ist.
$T := \{f \in \widetilde{H} \,|\, \int_0^1 f(t)dt = 0\}$ ist ein in $\widetilde{H}$ abgeschlossener, linearer Teilraum (ohne Beweis). Es gilt $T^\perp = \{0\}$, aber $T \subsetneqq \widetilde{H}$.

Definition 3.1.4:
Sei H ein Hilbertraum, dann definiert man:
(i) die **orthogonale Summe** zweier zueinander orthogonaler linearer Teilräume $H_1 \perp H_2$ von H durch:

$$\boldsymbol{H_1 \oplus H_2} := \{x \in H \,|\, x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in H_1, x_2 \in H_2\}$$

(ii) die **orthogonale Summe** endlich vieler paarweise orthogonaler linearer Teilräume $H_1, \ldots, H_J$ von H $(H_i \perp H_j, \quad i \neq j)$ durch:

$$\bigoplus_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{J}} \boldsymbol{H_j} := \{x \in H \,|\, x = \sum_{j=1}^{J} x_j, \quad x_j \in H_j\}$$

(iii) die **orthogonale Summe** abzählbar unendlich vieler paarweise orthogonaler linearer Teilräume $(H_j)_{j=1}^{\infty}$ von H $(H_i \perp H_j, \quad i \neq j)$ durch:

$$\bigoplus_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{\infty}} \boldsymbol{H_j} := \bigcap \widetilde{H}$$

wobei die $\widetilde{H}$ lineare Teilräume von H sind, welche alle $\bigoplus_{j=1}^{J} H_j$ für $J \in \mathbb{N}$ enthalten.

Lemma:
Sind H_1 und H_2 lineare Teilräume eines Hilbertrames H mit $H_1 \perp H_2$, so ist $H_1 \cap H_2 = \{0\}$.

Beweis::
Klar. ■

Bemerkung:
In Banachräumen gilt:
$H_1 \cap H_2 = \{0\} \Rightarrow H_1 \dot{+} H_2 = \{x \in H \,|\, x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in H_1, x_2 \in H_2\}$ (direkte Summe).

Lemma:
Die Darstellung von $x \in H_1 \oplus H_2$ ist eindeutig bestimmt.

BEWEIS::
Angenommen man hätte zwei Darstellungen
$x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ mit $x_1, x_1' \in H_1$ und $x_2, x_2' \in H_2$. Dann ist $x_1 - x_1' = x_2' - x_2$, wobei $x_1 - x_1' \in H_1$ und $x_2 - x_2' \in H_2$ ist (da H_1 und H_2 lineare Teilräume sind). Wegen dem vorrigen Lemma ist $x_1 - x_1' = x_2 - x_2' = 0$, also $x_1 = x_1'$ und $x_2 = x_2'$. ■

Lemma 3.1.3:
Sei H ein Hilbertraum, dann gilt:
(i) Sind $H_1 \perp H_2$ lineare Teilräume von H, so ist $H_1 \oplus H_2$ abgeschlossen $\Leftrightarrow$ H_1 und H_2 sind abgeschlossen.
(ii) Sind $H_1, \widetilde{H}$ abgeschlossene, lineare Teilräume von H, so existiert genau ein abgeschlossener Teilraum H_2 von H mit $\widetilde{H} = H_1 \oplus H_2$. (man schreibt auch $H_2 = \widetilde{H} \ominus H_1$)

BEWEIS::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
Lemma 3.1.3 gilt nicht, falls H nur ein Prähilbertraum ist. Ein Gegenbeispiel für diesen Fall ist in Übungsserie 10 zu finden.

3.2 Orthogonale Basen

Bemerkung:
Im Folgenden werden nur noch separable Hilberträume H betrachtet, d.h. solche für die eine abzählbare, dichte Teilmenge existiert (Vergleiche dazu Definition 2.1.5). Der Vorteil dieser Einschränkung ist die Möglichkeit Reihen einfacher zu formulieren.

Beispiel:
Die Räume $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$, l_2 und $L_2(\Omega)$ (für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ separabel) sind alle separabel.

Bemerkung:
$(x_i)_{i\in I} \subset H$ für I überabzählbar heißt summierbar $:\Leftrightarrow \exists x \in H$ und für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Indexmenge $J(\varepsilon) \subset I$, sodass für alle endlichen Indexmengen J mit $J(\varepsilon) \subset J \subset I$ stets $\|x - \sum_{i\in J} x_i\| < \varepsilon$ gilt.
Solche Folgen / Reihen muss man betrachen, wenn man auch nicht separable Hilberträume H betrachten will.

Definition 3.2.1:
Die Folge $(e_j)_{j=1}^{\infty} \subset H$ (oder eventuell auch nur endlich viele) heißt **Orthonormalsystem** (kurz **ONS**) $:\Leftrightarrow$ Für alle $j, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

Bemerkung:
Das verschwinden des Skalarprodukts für verschiedene Elemente rechtfertigt die Bezeichnung „ortho“ und die Normierung $\|e_j\|^2 = (e_j, e_j) = 1$ ($\Rightarrow \|e_j\| = 1$) rechtfertigt die Bezeichnung „normal“.
Das Ziel ist es, ein ONS zu finden, welches gleichzeitig Basis des Hilbertraumes ist.

Satz 3.2.1:
Sei H ein (Prä-) Hilbertraum und $x \in H$. Dann gilt:
(i) Ist $E := \{e_1, \ldots, e_J\} \subset H$ ein endliches ONS, so

$$\exists! y \in \operatorname{Span}(E) \text{ mit } \|x - y\| = \inf_{z \in \operatorname{Span}(E)} \|x - z\|$$

(ii) Ist $(e_j)_{j=1}^{\infty} \subset H$ ein ONS, so gilt die **Bessel’sche Ungleichung** :

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2 \leq \|x\|^2$$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Bemerkung:
Mithilfe des Pythagoras ist leicht zu sehen, dass für $e_k \perp e_j$, für $j \neq k$ und $\lambda_k, \lambda_j \in \mathbb{C}$ gilt $\|\sum_{j=1}^{J} \lambda_j e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{J} \|\lambda_j e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{J} |\lambda_j|^2$.

Lemma:
Ist $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ein ONS eines (Prä-) Hilbertraumes H und $x \in H$. Dann gilt:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) e_j \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2 = \|x\|^2 \quad (\textbf{Parseval'sche Gleichung})$$

Beweis::
Folgt aus der Herleitung im Beweis des Satzes 3.2.1 (ii). ∎

Definition:
Ist $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ein ONS eines (Prä-) Hilbertraumes H und $x \in H$, dann heißt
(i) $\boldsymbol{(x, e_j)} \in \mathbb{C}$ **Fourierkoeffizient** von x bezüglich e_j,
(ii) $\boldsymbol{\sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) e_j}$ **Fourierreihe** von x.

Satz 3.2.2:
Ist $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ein ONS eines separablen, unendlich-dimensionalen Hilbertraumes ($\{e_1, \ldots, e_J\}$ im endlich-dimensionalen Hilbertraum) H, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $x = \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) e_j, \quad \forall x \in H$

(ii) $\sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2 = \|x\|^2, \quad \forall x \in H$

(iii) $(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) \overline{(y, e_j)}, \quad \forall x, y \in H$

(iv) $\mathrm{Span}(\{e_j \,|\, j \in \mathbb{N}\})$ ist dicht in H

(v) $\{e_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \{0\}$

(vi) Die Abbildung $H \to l_2$ mit $x \mapsto ((x, e_j))_{j=1}^{\infty}$ ist bijektiv und normerhaltend (Isometrie)

(vii) $(x, e_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$.

BEWEIS::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
Hat man also ein ONS, für welches eine der Aussagen in Satz 3.2.2 gilt, so ist dieser unendlich-dimensionale separable Hilbertraum isometrisch isomorph zum Raum l_2.

Definition 3.2.2:
Ein ONS $(e_j)_{j=1}^{\infty} \subset H$ heißt **Orthonormalbasis** (kurz **ONB**) eines separablen Hilbertraumes H (oder auch **vollständiges ONS** , kurz **VONS**) :⇔ Für alle $x \in H$ gilt die Parseval'sche Gleichung (bzw. eine der äquivalenten Aussagen aus Satz 3.2.2).

Satz 3.2.3:
In jedem Hilbertraum existiert eine Orthonormalbasis.

BEWEIS::
Im Allgemeinen Fall nutzt man für den Existenzbeweis das Zorn'sche Lemma.
Hier, für den Spezialfall separabler Hilberträume, wird ein konstruktiver Beweis mit Hilfe des **Orthogonalisierungsverfahrens** von **Gram-Schmidt** geführt:
Siehe Vorlesung. ■

Beispiel:
In $L_2([-1,1])$ liegen die stetigen Funktionen $C([-1,1])$ dicht. In diesen liegen wiederum die Polynome $\mathrm{Span}(\{1, t, t^2, t^3, \ldots\})$ dicht. Die Menge $F := \{1, t, t^2, t^3, \ldots\}$ entspricht also der, aus dem zweiten Beweisschritt in Satz 3.2.3. Die Elemente sind noch nicht orthogonal zueinander, denn es ist beispielsweise

$$(1, t^2) = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Hier muss also noch das Gram-Schmidt-Verfahren angewendet werden (siehe dazu Übungsserie 10).

Beispiel (für Orthonormalbasen):
(i) In $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ ist $(e_j)_{j=1}^{n}$ mit $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ eine ONB. Analog dazu bildet $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ eine Orthonormalbasis des l_2.

(ii) Im Raum $L_2(-\pi, \pi)$ bilden die Basisfunktionen der klassischen Fourierreihe
$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ bzw. $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \ldots\}$ eine ONB. Sie sind Lösungen der Differentialgleichung $u'' - \lambda u = 0$ mit $u(\pi) = u(-\pi)$.

(iii) Beispiel (ii) lässt sich auf $L_2(0,a)$ verallgemeinern. Hier ist $\{\frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{2\pi i \frac{k}{a} t} \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis.

(iv) Auf $L_2(-1,1)$ lässt sich aber neben der klassischen Fourierbasis auch eine Orthonormalbasis aus Polynomen angeben: $\{\eta_n(t) := \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(t) \,|\, n \in \mathbb{N}_0\}$, wobei die Funktionen P_n **Legendre'sche Polynome** heißen und wie folgt definiert sind:
$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} \left[(t^2-1)^n\right]$. Es handelt sich hierbei um Polynome vom Grad n mit Vorfaktor 1.
Die ONB erhält man einerseits mittels eines Potenzreihenansatzes als Lösung der Differentialgleichung $(1-t)^2 u'' - 2tu' + \lambda u = 0$ mit $|u(1)|, |u(-1)| < \infty$ oder durch das Gram-Schmidt-Verfahren, angewendet auf die Menge der Polynome $\{1, t, t^2, \ldots\}$, denn es gilt $\overline{\mathrm{Span}(\{1, t, t^2, \ldots\})} = L_2(-1,1)$.
Die Legendre-Polynome sind Lösungen der **Legendre'schen Differentialgleichung** $(1-t^2)P_n'' - 2tP_n' + n(n+1)P_n = 0$ mit $|P_n(1)|, |P_n(-1)| < \infty$.

(v) In $L_2(\mathbb{R})$ ist $\{\Psi_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, H_n(t) \,|\, n \in \mathbb{N}_0\}$ mit den **Hermite'schen Polynomen** (vom Grad n, mit Vorfaktor 1) $H_n(t) := (-1)^n\, e^{t^2}\, \frac{d^n}{dt^n} \left[e^{-t^2}\right]$ eine ONB. Wegen dem L_2-Skalarprodukt $(f,g) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt$ ist $\Psi_n \in L_2(\mathbb{R})$.
Wählt man den Raum $L_{2,w}(\mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt $(f,g)_{L_{2,w}} := \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}w(t)dt$ und $w(t) := e^{-t^2}$, so sind auch die Hermite'schen Polynome Elemente von $L_{2,w}(\mathbb{R})$. Sie sind Lösungen der **Hermite'schen Differentialgleichung** $H_n'' - 2tH_n' + 2nH_n = 0$.

(vi) Auf $L_2((0,\infty))$ ist $\{\varphi_n(t) := \frac{1}{n!}\, e^{-\frac{t}{2}}\, L_n(t) \,|\, n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Orthonormalbasis. Die Funktionen $L_n(t) := e^t \frac{d^n}{dt^n}\left[t^n e^{-t}\right]$ heißen **Laguerr'sche Polynome** (vom Grad n). Man erhält sie durch eine Potenzreihenansatz aus der **Laguerr'schen Differentialgleichung** $tL_n''(t) + (1-t)L_n'(t) + nL_n(t) = 0$ für $0 < t < \infty$.

(vii) Im Raum $L_2(\times_{j=1}^n(-\pi,\pi))$, wobei $\times_{j=1}^n(-\pi,\pi)$ als n-dimensionaler Würfel mit der Seitenlänge 2π angesehen werden kann, bildet $\{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\, e^{ikx} \,|\, k \in \mathbb{Z}^n\}$ eine ONB, wenn man $kx := k_1x_1 + \ldots + k_nx_n$ vereinbart.

(viii) Die Menge $w_3 = S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, r = |x| = 1\}$ bezeichne die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ mit Kugelkoordinaten. Der Raum $L_2(w_3)$ mit dem Skalarprodukt $(f,g)_{L_2(w_3)} := \int_{w_3} f(\varphi,\vartheta)\overline{g(\varphi,\vartheta)}\, dS_{w_3} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi,\vartheta)\overline{g(\varphi,\vartheta)} \sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi$ ist ein Hilbertraum. Man definiert die zugeordneten Legendre'schen Polynome für $m = 0, \ldots, l$ durch $P_m^l(t) := (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dt^{l+m}} \left[(1-t^2)^l\right]$ (die gewöhnlichen Legendre Polynome erhält man mit $m = 0$).
Dann bilden die Kugelflächenfunktionen $\{Y_{l,m} \,|\, l \in \mathbb{N}_0, m = 0, \ldots, l\}$, sowie $\{\widetilde{Y}_{l,m} \,|\, l \in \mathbb{N}_0, m = 1, \ldots, l\}$ eine Orthonormalbasis des $L_2(w_3)$ mit $(\cdot,\cdot)_{L_2(w_3)}$. Dabei ist $Y_{l,m}(\varphi,\vartheta) := \frac{1}{2^l l!}\sqrt{\frac{2(l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\vartheta)\cos(m\varphi)$ und

$\widetilde{Y}_{l,m}(\varphi,\vartheta) := \frac{1}{2^l l!}\sqrt{\frac{2(l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!}}P_l^m(\sin\vartheta)\sin(m\varphi)$.

(ix) Im $L_2((0,1))$ sind die **Haar'schen Funktionen** $\{h_n^{(k)}(t)\,|\,n \in N_0, k = 1,\dots,2^n\}$ eine Orthonormalbasis (vgl. auch **Wavelets**). Dabei ist

$$\begin{aligned} h_0^{(0)}(t) &:= 1, \\ h_n^{(k)}(t) &:= \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & \frac{k-1}{2^n} \le t < \frac{k-\frac{1}{2}}{2^n} \\ -2^{\frac{n}{2}}, & \frac{k-\frac{1}{2}}{2^n} \le t < \frac{k}{2^n} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

(x) Die **Rademacher'schen Funktionen** $\{r_n(t)\,|\,n \in \mathbb{N}_0\}$ mit

$$\begin{aligned} r_0(t) &:= h_0^{(0)}(t) \\ r_1(t) &:= h_1^{(0)}(t) \\ r_n(t) &:= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=1}^{2^n} h_n^{(k)}(t), \quad n \ge 2 \end{aligned}$$

bilden nur ein Orthonormalsystem des $L_2((0,1))$, sind aber nicht vollständig (also keine ONB).

(xi) Die **Walsch'schen Funktionen** $\{w_n(t)\,|\,n \in \mathbb{N}_0\}$ hingegen sind eine Orthonormalbasis des $L_2((0,1))$ mit $w_0(t) := 1$ und $w_n(t) := r_{\vartheta_1+1}(t) \cdot \ldots \cdot r_{\vartheta_p+1}(t)$ für $n \ge 1$. Dabei ist $n = 2^{\vartheta_1} + \ldots + 2^{\vartheta_p}$ die Binärdarstellung von n, mit $\vartheta_1 < \vartheta_2 < \ldots < \vartheta_p$.

3.3 Lineare Operatoren im Hilbertraum

Bemerkung:
Lineare und beschränkte (stetige) Operatoren in Banachräumen wurden bereits in Abschnitt 2.3 betrachtet.
Abschnitt 2.4 beschäftigte sich mit linearen Funktionalen $x' \in X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$. Insbesondere waren Aussagen der Form $(l_p)' \cong l_{p'}$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ für $1 \leq p < \infty$ von Interesse.
Die folgenden Betrachtungen gelten wieder auch für nicht separable Hilberträume.

Satz 3.3.1 (Darstellungssatz von Frechét-Riesz):
Sei l ein lineares und stetiges Funktional über einem Hilbertraum H. Dann gilt:
(i) $\exists! y \in H$ mit $l(x) = (x, y)$, für alle $x \in H$ und $\|l \,|\, \mathcal{L}(H, \mathbb{C})\| = \|y \,|\, H\|$.
(ii) Die Abbildung $T\colon H \to H' = \mathcal{L}(H, \mathbb{C})$ mit $y \mapsto (\cdot, y)$ ist bijektiv, isometrisch und konjugiert linear (d.h. $T(\lambda y) = \overline{\lambda} T(y)$).

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Bemerkung:
Damit gilt stets $H \cong H'$. Insbesondere sind daher alle Hilberträume reflexiv.

Definition 3.3.1:
Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$.
(i) Eine Abbildung $L\colon H \times H \to \mathbb{C}$ heißt beschränkte / stetige **Sesquilinearform** :⇔
Für alle $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in H$ und $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 L(x_1, y) + \lambda_2 L(x_2, y)$ (Linearität im 1. Argument)
(b) $L(x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \overline{\mu_1} L(x, y_1) + \overline{\mu_2} L(x, y_2)$ (konj. Linearität im 2. Argument)
(c) $\exists c \geq 0$ mit $|L(x, y)| \leq c\|x\|\|y\|$ (Beschränktheit)

(ii) Die **Norm einer Sesquilinearform** L ist definiert durch

$$\|\boldsymbol{L}\| := \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |L(x, y)|.$$

Bemerkung:
Eine mögliche Verallgemeinerung wäre eine Abbildung $L\colon H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$, für Hilberträume H_1, H_2.
„Sesqui“ steht für $1\frac{1}{2}$ - zwischen Linearform (lineare Funktionale) und Bilinearform.

Beispiel:
Jedes Skalarprodukt ist eine Sesquilinearform.

Lemma 3.3.1:
Sei L eine stetige Sesquilinearform auf einem Hilbertraum H. Dann gibt es zwei eindeutig bestimmte Operatoren $T, S \in \mathcal{L}(H)$ mit:

$$L(x,y) = (Tx, y) = (x, Sy), \quad \forall x, y \in H$$
$$\|L\| = \|T \,|\, \mathcal{L}(H)\| = \|S \,|\, \mathcal{L}(H)\|.$$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Definition 3.3.2:
Ist H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$. Dann heißt $\boldsymbol{T^*} \in \mathcal{L}(H)$ der zu T **adjungierte Operator** :⇔ Es gilt $(Tx, y) = (x, T^*y)$ für alle $x, y \in H$.

Lemma:
Ist H ein Hilbertraum, so existiert zu jedem $T \in \mathcal{L}(H)$ stets der adjungierte Operator $T^* \in \mathcal{L}(H)$ und ist eindeutig bestimmt.

Beweis::
Ist der Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ vorgegeben, so definiere die stetige Sesquilinearform L durch $L(x,y) := (Tx, y)$, für $x, y \in H$ (stetig, da T und $(\cdot,\cdot)$ stetig). Nach Lemma 3.3.1 existiert dann ein eindeutiges $S \in \mathcal{L}(H)$, mit $L(x,y) = (Tx,y) = (x, Sy)$ für alle $x, y \in H$. Setze $T^* := S$. ■

Bemerkung:
Die Definition setzt vorraus, dass T auf ganz H definiert und dort beschränkt ist.

Definition:
Ein Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ über einem Hilbertraum H heißt **selbstadjungiert** :⇔ $T = T^*$

Bemerkung:
Unbeschränkte Operatoren sind nur sinnvoll auf Teilmengen eines Hilbertraumes. Beispielsweise $\frac{d^2}{dt^2}\colon f \mapsto f''$ mit $D(\frac{d^2}{dt^2}) = \{f \in L_2(\mathbb{R}) \,|\, f'' \in L_2(\mathbb{R})\} \subset L_2(\mathbb{R})$. Für $(\frac{d^2}{dt^2} f, g) = (f, \frac{d^2}{dt^2} g)$ muss $f \in D(\frac{d^2}{dt^2})$ und $g \in D(\frac{d^2}{dt^2})$ mit Randbedingungen gelten. Dies ist dann nur „Symmetrie“, die Selbstadjungiertheit verlangt noch gleiche Definitionsgebiete.

Bemerkung:
Ist $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ für Hilberträume H_1, H_2, so ist die Definition eines adjungierten Operators $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ mit $(Tx, y)_{H_2} = (x, T^*y)_{H_1}$ für $x \in H_1, y \in H_2$ möglich.

Satz 3.3.2 (Eigenschaften des adjungierten Operators):
Sind T, T_1, T_2 lineare, beschränkte Operatoren über einem Hilbertraum H und T^*, T_1^*, T_2^* die zugehörigen adjungierten Operatoren. Dann gilt für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$:

(i) $\|T\| = \|T^*\|$

(ii) $(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)^* = \overline{\lambda_1} T_1^* + \overline{\lambda_2} T_2^*$

(iii) $(T_1 \circ T_2)^* = T_2^* \circ T_1^*$

(iv) $\exists T^{-1} \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow \exists (T^*)^{-1} = (T^{-1})^* \in \mathcal{L}(H)$

(v) $(T^*)^* = T$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Satz 3.3.3:
Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$. Dann gilt:

$$H = \overline{\operatorname{Im}(T)} \oplus \operatorname{Ker}(T^*) = \overline{\operatorname{Im}(T^*)} \oplus \operatorname{Ker}(T).$$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
Für selbstadjungierte Operatoren gilt nach Satz 3.3.3 $H = \overline{\operatorname{Im}(T)} \oplus \operatorname{Ker}(T)$.

Definition 3.3.3 (Projektions-Operatoren / Orthogonale Projektion):
Sei H_1 ein abgeschlossener, linearer Teilraum eines Hilbertraumes H mit $\{0\} \subsetneqq H_1 \subsetneqq H$. Dann existieren eindeutig bestimmte $x_1 \in H_1, x_2 \in H_1^\perp$ mit $x = x_1 + x_2, \quad \forall x \in H$. Definiere die (**orthogonale**) **Projektion** Px von x auf H_1 durch $Px := x_1, \quad \forall x \in H$.

Bemerkung:
In den Sonderfällen $H_1 = \{0\}$ oder $H_1 = H$ folgt unmittelbar $P = \mathcal{O}$ (**Nulloperator**) bzw. $P = I_H$ (Identität). Damit ist die orthogonale Projektion für alle abgeschlossenen Unterräume H_1 eines Hilbertraumes H definiert.

Lemma:
Sei H_1 ein abgeschlossener, linearer Teilraum eines Hilbertraumes H. Die orthogonale Projektion P auf H_1 ist eindeutig bestimmt und es gilt:

(i) P ist linear
(ii) P ist beschränkt mit $\|P \,|\, \mathcal{L}(H)\| = 1$
(iii) $\mathrm{Im}(P) = H_1$ und $\mathrm{Ker}(P) = H_1^\perp$

Beweis::
Die Fälle der obigen Bemerkung sind trivial, daher sei o.B.d.A. $\{0\} \subsetneq H_1 \subsetneq H$.
(i) Seien $x = x_1 + x_2$ und $y = y_1 + y_2$ mit $x_1, y_1 \in H_1$, $x_2, y_2 \in H_1^\perp$ (eindeutig) und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Dann ist $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) \in H_1 \oplus H_1^\perp$. Offensichtlich gilt damit $P(\lambda x + \mu y) = \lambda x_1 + \mu y_1 = \lambda P(x) + \mu P(y)$.
(ii) Mit dem Satz des Pythagoras folgt
$\|x\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|Px\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|Px\|^2$. Daher ist $\|P\| \leq 1$. Also ist P beschränkt.
Andererseits ist für $x_1 \in H_1 \setminus \{0\}$ die Darstellung $x_1 = x_1 + 0$ eindeutig. Daher folgt $\|Px_1\| = \|x_1\|$, also $\|P\| \geq 1$. Zusammengefasst gilt daher $\|P \,|\, \mathcal{L}(H)\| = 1$.
(iii) gilt offensichtlich. ∎

Satz 3.3.4:
Ist H ein Hilbertraum und $P \in \mathcal{L}(H)$, so gilt:

$$P \text{ ist Orthogonalprojektion} \;\Leftrightarrow\; P^2 = P \text{ und } P = P^*.$$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Lemma:
Ist H ein Hilbertraum und $P \in \mathcal{L}(H)$, so gilt:

$$P \text{ ist Orthogonalprojektion} \;\Leftrightarrow\; (I - P) \text{ ist Orthogonalprojektion.}$$

Beweis::
Ist P eine Projektion bezüglich $\widetilde{H}$, so ist $(I - P)$ eine Projektion auf $\widetilde{H}^\perp$ (siehe Beweis Satz 3.3.4). Für die Rückrichtung setze $\widehat{P} := I - P$ und wende bereits Bewiesenes an. Damit folgt $I - \widehat{P} = I - (I - P) = I - I + P = P$ ist Projektion. ∎

Bemerkung:
Weitere Eigenschaften von orthogonalen Projektionsoperatoren finden sich in Übungsserie 11 / Aufgabe 1.
Betrachte im Folgenden finite (ausgeartete) Operatoren K auf Hilberträumen H, d.h. $K \in \mathcal{L}(H)$ mit $\dim(\mathrm{Im}(K)) < \infty$.

Lemma 3.3.2:
Sei K ein finiter Operator über einem Hilbertraum H. Dann ist K^* ebenfalls finit und es gilt $\dim(\mathrm{Im}(K)) = \dim(\mathrm{Im}(K^*)) := L$. Weiter existiert eine ONB $\{e_1, \dots e_L\}$ von $\mathrm{Im}(K)$, sowie linear unabhängige Elemente $\{e_1^*, \dots, e_L^*\}$ mit $\mathrm{Span}(\{e_1^*, \dots, e_L^*\}) = \mathrm{Im}(K^*)$ (Basis). Es gilt ferner

$$Kx = \sum_{l=1}^{L} (x, e_l^*) e_l \quad \text{und} \quad K^* y = \sum_{l=1}^{L} (y, e_l) e_l^*, \quad \text{für } x, y \in H$$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Bemerkung:
Die Elemente $\{e_1^*, \dots, e_L^*\}$ in Lemma 3.3.2 müssen nicht mehr orthogonal sein, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel:
Gegeben sei der Operator $K\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Es ist $Kx = (2\xi_1 + 2\xi_3, \xi_1, 0)^T$, also gilt $\dim K = 2$ und $\mathrm{Ker}(K) = \mathrm{Span}(\{(0,1,0)^T\})$. Die Vektoren $e_1 = (1,0,0)^T, e_2 = (0,1,0)^T$ bilden eine ONB in $\mathrm{Im}(K)$.
Der zu K adjungierte Operator $K^*\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist definiert durch die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (transponierte Matrix). Es ist $K^* y = (2\eta_1 + \eta_2, 0, 2\eta_1)^T$, also gilt $\dim K^* = 2$ und $\mathrm{Ker}(K^*) = \mathrm{Span}(\{(0,0,1)^T\})$. Die Vektoren $e_1^* = K^* e_1 = (2,0,2)^T$ und $e_2^* = K^* e_2 = (1,0,0)^T$ sind dann zwar linear unabhängig und bilden eine Basis in $\mathrm{Im}(K^*)$, aber sie sind nicht orthogonal zueinander.

Satz 3.3.5:
Sei H ein Hilbertraum, dann ist
(i) $K \in \mathcal{L}(H)$ kompakt $\Leftrightarrow \exists (K_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(H)$ finit mit $\|K - K_j \mid \mathcal{L}(H)\| \to 0$
(ii) $K \in \mathcal{L}(H)$ kompakt $\Leftrightarrow K^*$ kompakt.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Bemerkung:
In allgemeinen Banachräumen gilt in Aussage (i) des Satzes 3.3.5 nur „$\Leftarrow$“.

Definition 3.3.4:
Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$.
(i) T heißt **unitär** :$\Leftrightarrow$ T ist invertierbar und es gilt $T^{-1} = T^*$
(ii) T heißt **selbstadjungiert** :$\Leftrightarrow$ Es gilt $T = T^*$
(iii) T heißt **normal** :$\Leftrightarrow$ Es gilt $T \circ T^* = T^* \circ T$

Bemerkung:
Auch andere Definitionen sind für diese Begriffe möglich. Sie sollen hier als Folgerung notiert werden.

Folgerung:
Sei H Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} T \text{ unitär } &\Leftrightarrow (Tx, Ty) = (x, y) \quad \forall x, y \in H \\ T \text{ selbstadjungiert } &\Leftrightarrow (Tx, y) = (x, Ty) \quad \forall x, y \in H \\ T \text{ normal } &\Leftrightarrow (Tx, Ty) = (T^*x, T^*y) \quad \forall x, y \in H \end{aligned}$$

Beweis::
Seien x, y beliebig in H. Wegen den Eigenschaften des adjungierten Operators gilt:
(i) $(Tx, Ty) = (x, T^*Ty) = (x, y)$, wegen $T^* = T^{-1}$.
(ii) $(Tx, y) = (x, T^*y) = (x, Ty)$, wegen $T^* = T$.
(iii) $(Tx, Ty) = (x, T^*Ty) = (x, TT^*y) = (T^*x, T^*y)$, wegen $TT^* = T^*T$. ∎

Bemerkung:
Offensichtlich sind sowohl unitäre, als auch selbstadjungierte Operatoren normal. Die Normalität eines Operators ist also die schwächste dieser drei Eigenschaften. Überdies sind unitäre Operatoren isometrisch (norm- und winkelerhaltend).

Satz 3.3.6:
Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{L}(H)$. Dann gilt:

$$T \text{ selbstadjungiert } \Leftrightarrow (Tx, x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Definition:
Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert.
T heißt **positiv** (schreibe $\boldsymbol{T \geq 0}$) :$\Leftrightarrow$ $(Tx, x) \geq 0 \quad \forall x \in H$

Lemma:
Jede orthogonale Projektion P über einem Hilbertraum H ist positiv.

Beweis::
Sei $x \in H$ beliebig. Dann ist $(Px, x) = (P^2x, x) = (Px, P^*x) = (Px, Px) \geq 0$, wegen $P = P^2$ und $P = P^*$. ∎

Bemerkung:
Auf der Menge M der selbstadjungierten Operatoren und Projektionen über einem Hilbertraum H kann man nun eine Halbordnung definieren:

$$T \leq S \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in H \text{ gilt: } (Tx, x) \leq (Sx, x)$$

Äquivalent dazu ist $S - T \geq 0$.

Satz 3.3.7:
Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert (allgemeiner: normal). Dann gilt:

$$\|T \,|\, \mathcal{L}(H)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Tx, x)| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Folgerung:
Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert. Gilt für alle $x \in H$ stets $(Tx, x) = 0$, so ist $T = \mathcal{O}$ (Nulloperator).

Beweis::
Entweder mithilfe von Satz 3.3.7, oder mit dem Argument $(Tx, x) = 0 \quad \forall x \in H$
$\Rightarrow \quad Tx \in H^\perp = \{0\} \quad \Rightarrow \quad T = \mathcal{O}$. ∎

Definition:
Ist $T \in \mathcal{L}(H)$ ein selbstadjungierter Operator über einem Hilbertraum H, so heißt

$$\boldsymbol{m_T} := \inf_{\|x\|=1} (Tx, x) \text{ **untere Grenze** des Operators } T \text{ und}$$

$$\boldsymbol{M_T} := \sup_{\|x\|=1} (Tx, x) \text{ **obere Grenze** des Operators } T.$$

Bemerkung:
Diese Definition ist sinnvoll, da (Tx, x) nach Satz 3.3.6 stets reell ist. Es gilt (wegen Vorzeichen): $\|T \,|\, \mathcal{L}(H)\| = \max(|m_T|, |M_T|)$.
Warum m_T und M_T obere bzw. untere Grenze genannt wird, begründet die nächste Folgerung:

Folgerung:
Für selbstadjungierte Operatoren $T \in \mathcal{L}(H)$ über einem Hilbertraum H gilt stets

$$m_T I_H \leq T \leq M_T I_H$$

Beweis::
Sei $x \in H$.
1. Fall $x = 0$: Offensichtlich gilt: $0 = (m_T I_H x, x) \leq (Tx, x) \leq (M_T I_H x, x) = 0$.
2. Fall $x \neq 0$: setze $y := \frac{x}{\|x\|}$. Damit ist $x = \|x\| y$ und $\|y\| = 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned}(m_T I_H x, x) &= (m_T I_H(\|x\|y), \|x\|y) = \|x\|^2 (m_T I_H y, y) = \|x\|^2 m_T \|y\|^2 = \|x^2\| m_T \\ &\leq \|x\|^2 (Ty, y) = (T(\|x\|y), \|x\|y) = (Tx, x) \\ &\leq \|x\|^2 M_T = \|x\|^2 M_T \|y\|^2 = \|x\|^2 (M_T I_H y, y) = (M_T I_H(\|x\|y), \|x\|y) \\ &= (M_T I_H x, x)\end{aligned}$$

Zusammenfassend ist also $(m_T I_H x, x) \leq (Tx, x) \leq (M_T I_H x, x) \quad \forall x \in H$. ■

Lemma 3.3.3:
Ist H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$, so gilt:

$$T \text{ normal} \;\Leftrightarrow\; \|Tx\| = \|T^* x\| \quad \forall x \in H$$

Beweis::
Siehe Übungsserie 12. ■

Lemma:
Ist H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ normal, so ist für $\alpha \in \mathbb{C}$ auch $(T - \alpha I_H) \in \mathcal{L}(H)$ ein normaler Operator.

Beweis::
Es gilt wegen $I_H = I_H^*$ und $TT^* = T^*T$ die folgende Umrechnung:

$$\begin{aligned}(T - \alpha I_H)(T - \alpha I_H)^* &= (T - \alpha I_H)(T^* - \overline{\alpha} I_H^*) \\ &= (T - \alpha I_H)(T^* - \overline{\alpha} I_H) \\ &= TT^* - \alpha I_H T^* - T\overline{\alpha} I_H + \alpha I_H \overline{\alpha} I_H \\ &= TT^* - \alpha T^* - \overline{\alpha} T + \alpha\overline{\alpha} I_H \\ &= T^*T - T^* \alpha I_H - \overline{\alpha} I_H T + \overline{\alpha} I_H \alpha I_H \\ &= (T^* - \overline{\alpha} I_H)(T - \alpha I_H) \\ &= (T - \alpha I_H)^*(T - \alpha I_H)\end{aligned}$$

Daher ist auch der Operator $T - \alpha I_H$ normal. ■

3.4 Das Spektrum selbstadjungierter und kompakter Operatoren

Bemerkung:
Ziel ist es einen zur Hauptachsentransformation von Matrizen (lineare Algebra) analogen Sachverhalt für Operatoren zu erörtern. Die Selbstadjungiertheit ist dabei das Gegenstück zur Symmetrie (der Matrix) und die Kompaktheit das Analogon zur endlichen Dimension (des Raumes).

Definition 3.4.1:
Sei H ein Hilbertraum (oder auch nur Banachraum) und $T \in \mathcal{L}(H)$. Man definiert:

(i) $\boldsymbol{\rho(T)} := \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \exists (T - \lambda I_H)^{-1} \in \mathcal{L}(H)\}$ heißt **Resolventenmenge** des Operators T

(ii) $\boldsymbol{R_\lambda} := (T - \lambda I_H)^{-1}$ heißt **Resolvente**

(iii) $\boldsymbol{\sigma(T)} := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ heißt **Spektrum des Operators** T

Bemerkung:
$\rho(T)$ ist dabei die „harmlose“ und $\sigma(T)$ die „kritische / intressante Menge“.
Aus den Aussagen der Übungsserie 11 / Aufgabe 4 über die Neumann'sche Reihe (im Falle eines Banachraumes) lässt sich Folgendes schließen:

Lemma:
Sei H Banachraum und $T \in \mathcal{L}(H)$, dann gilt:

$$\text{(i) } \rho(T) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda| > \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}\}$$
$$\text{(ii) } \sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda| \leq \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}\}$$
$$\text{(iii) } \rho(T) \text{ ist offen und } \sigma(T) \text{ ist abgeschlossen in } \mathbb{C}$$

Beweis::
(i) Der Satz über die Neumann'sche Reihe (Satz 2.3.5) besagt, dass für $T \in \mathcal{L}(H)$ mit $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$ die Abbildung $(T - I_H)^{-1}$ existiert. Für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $T - \lambda I_H = \lambda(\frac{T}{\lambda} - I_H)$. Damit existiert $(T - \lambda I_H)^{-1} \Leftrightarrow (\frac{T}{\lambda} - I_H)^{-1}$ existiert, also falls $\lim_{n\to\infty} \|\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$, bzw. $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} < |\lambda|$ gilt. Dann ist $\lambda \in \rho(T)$.
(ii) Folgt unmittelbar aus (i) und der Definition des Spektrums.
(iii) In Übungsserie 11 / Aufgabe 4b wurde gezeigt, dass für $S, S_1 \in \mathcal{L}(H)$ mit S_1 invertierbar und $\|S - S_1\| < \|S_1^{-1}\|^{-1}$ folgt, dass auch S invertierbar ist.
Für $S_1 := T - \lambda I_H$ invertierbar, d.h. $\lambda \in \rho(T)$ und $S := T - \widetilde{\lambda} I_H$ mit $\widetilde{\lambda}$ nahe bei λ gilt $\|S_1 - S\| = \|(T - \lambda I_H) - (T - \widetilde{\lambda} I_H)\| = \|(\widetilde{\lambda} - \lambda) I_H\| = |\widetilde{\lambda} - \lambda| \leq \|S_1^{-1}\|^{-1}$. Dann ist auch $S = T - \widetilde{\lambda} I_H$ invertierbar, d.h. $\widetilde{\lambda} \in \rho(T)$. Zu jedem $\lambda \in \rho(T)$ gehört also auch eine Kugel $K_\varepsilon(\lambda)$ zu $\rho(T)$. Damit ist $\rho(T)$ offen und dementsprechend $\sigma(T)$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$. ■

Bemerkung:
Wann kann λ zum Spektrum $\sigma(T)$ gehören? Dazu betrachte $(T - \lambda I_H)\colon H \to H$.

Annahme: $(T - \lambda I_H)$ ist nicht injektiv, d.h. $\{0\} \subsetneqq \operatorname{Ker}(T - \lambda I_H)$. Dann kann $(T - \lambda I_H)$ nicht invertierbar sein.

Annahme: $(T - \lambda I_H)$ ist injektiv, aber nicht surjektiv, d.h. $\operatorname{Im}(T - \lambda I_H) \subsetneqq H$. Dann kann $(T - \lambda I_H)$ auch nicht invertierbar sein.

In beiden Fällen ist dann $\lambda \in \sigma(T)$. Dies sind die einzigen beiden Fälle (der Beweis gelingt erst mit dem Satz von Banach - siehe dazu Höhere Analysis 2).

Definition:
Ist H ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(H)$. Dann definiert man:

(i) $\boldsymbol{\sigma_p(T)} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Ker}(T - \lambda I_H) \supsetneqq \{0\}\}$ heißt **Punktspektrum** ,
$\boldsymbol{\lambda} \in \sigma_p(T)$ heißt **Eigenwert** und
$x \in \operatorname{Ker}(T - \lambda I_H) \setminus \{0\}$ heißt **Eigenelement** , **-vektor** oder **-funktion** $(Tx = \lambda x)$

(ii) $\boldsymbol{\sigma_r(T)} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I_H)} \subsetneqq H$ und $(T - \lambda I_H)$ ist injektiv$\}$ heißt **residuales** oder **Restspektrum** und
$H \ominus \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I_H)} \supsetneqq \{0\}$ heißt **Cokern**

(iii) $\boldsymbol{\sigma_c(T)} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(T - \lambda I_H) \subsetneqq \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I_H)} = H$ und $(T - \lambda I_H)$ ist injektiv$\}$ heißt **kontinuierliches (stetiges) Spektrum**

Bemerkung:
Diese drei Mengen sind disjunkt und bilden zusammen das Spektrum, das heißt es gilt $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T)$.
$\overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I_H)} = H$ meint, dass Bild von $T - \lambda I_H$ liegt dicht in H. Damit decken die λ aus σ_r und σ_c den Fall ab, dass $T - \lambda I_H$ nicht surjektiv ist, wobei für die $\lambda \in \sigma_c$, das schon fast erreicht ist.

Satz 3.4.1:
Sei H Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert. Dann gilt:

$$\lambda \in \rho(T) \quad \Leftrightarrow \quad \exists c > 0 \text{ mit } \|(T - \lambda I_H)x\| \geq c\|x\| \quad \forall x \in H$$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Folgerung:
Sei H Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert (allgemeiner: normal). Dann gilt:

$$\lambda \in \sigma(T) \;\Leftrightarrow\; \exists (x_j)_{j=1}^{\infty} \subset H \text{ mit } \|x_j\| = 1 \text{ und } \lim_{j\to\infty} \|(T - \lambda I_H)x_j\| = 0$$

Beweis::
Durch Verneinung von Satz 3.4.1. ∎

Bemerkung:
Es können in der Folgerung die folgenden Fälle auftreten:
(a) $\lambda \in \sigma_p(T)$, d.h. λ ist Eigenwert: $\exists \widehat{x} \neq 0$ mit $T\widehat{x} = \lambda\widehat{x}$. Setze dann die Folge stationär, durch $x_j := \frac{\widehat{x}}{\|\widehat{x}\|}$.
(b) $\lambda \in \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$: λ ist kein Eigenwert.

Satz 3.4.2:
Sei H Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert (allgemeiner: normal). Dann gilt:

(i) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ (Das Spektrum ist reell)
(ii) $\sigma(T) \subset [m_T, M_T]$
(iii) $m_T \in \sigma(T)$ und $M_T \in \sigma(T)$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Bemerkung:
Mit (iii) folgt insbesondere, dass die Norm des Operators stets ein Element des Spektrums ist, d.h. $\|T \,|\, \mathcal{L}(H)\| \in \sigma(T)$.

Beispiel:
(i) Sei H ein beliebiger Hilbertraum.
Setze $T := I_H$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig. Offensichtlich ist T selbstadjungiert, denn es gilt $(I_H x, y) = (x, y) = (x, I_H y)$ für alle $x, y \in H$.
Wann ist $T - \lambda I_H = I_H - \lambda I_H = (1-\lambda)I_H$ invertierbar? Es gilt $m_T = \inf_{\|x\|=1}(I_H x, x) = 1$ und analog $M_T = \sup_{\|x\|=1}(I_H x, x) = 1$. Nach Satz 3.4.2(ii) ist also $\sigma(I_H) = \{1\}$.
Klar ist $(I_H - \lambda I_H)^{-1} = (1-\lambda)^{-1} I_H^{-1} = \frac{1}{1-\lambda} I_H = R_\lambda \in \mathcal{L}(H)$ für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ und jedes $x \in H \setminus \{0\}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$, denn es gilt $I_H x = 1 \cdot x$.

(ii) Sei $H = l_2 = l_2(\mathbb{R})$. Es gilt $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k$ für $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ bzw. $y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$.
Betrachte Diagonaloperatoren (vergleiche Übungsserie 6) $D\colon l_2 \to l_2$, definiert über eine

Folge $(\delta_k)_{k=1}^{\infty} \in l_\infty$. Dann ist $Dx = (\delta_1\xi_1, \delta_2\xi_2, \ldots)$. D ist selbstadjungiert, denn es gilt $(Dx, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \xi_k \eta_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \delta_k \eta_k = (x, Dy)$ für $x, y \in l_2$.
Wann gilt $(D - \lambda I_H)x = ((\delta_1 - \lambda)\xi_1, (\delta_2 - \lambda)\xi_2, \ldots) = (0, 0, \ldots)$? Falls $\delta_k = \lambda$ und $x = e_k$! Damit sind alle δ_k Eigenwerte, d.h. $\sigma_p(D) = \{\delta_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ mit den Eigenvektoren e_k.
Ein extremes Beispiel ist die Wahl des Diagonaloperators D_e definiert durch $(\delta_k)_{k=1}^{\infty}$, wobei $[0,1] \cap \mathbb{Q} = \{\delta_1, \delta_2, \ldots\}$ (da $\mathbb{Q}$ abzählbar). Dann ist $(\delta_k)_{k=1}^{\infty} \in l_\infty$, denn es gilt $0 \leq \delta_k \leq 1$ für $k \in \mathbb{N}$. Es folgt $\sigma_p(D_e) = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Man weiß, dass $\sigma_p(D_e) \subset \sigma(D_e)$ ist und $\sigma(D_e)$ muss abgeschlossen sein. Daher ist auch $\overline{\sigma_p(D_e)} = [0,1] \subset \sigma(D_e)$. Es gilt sogar $\sigma(D_e) = [0,1]$, denn es ist $m_{D_e} = \inf_{\|x\|=1} (D_e x, x) = \inf_{\|x\|=1} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \xi_k \xi_k \geq \inf_{\|x\|=1} \inf_{k \in \mathbb{N}} \delta_k \|x\| = 0$ und analog $M_{D_e} \leq 1$ und mit Satz 3.4.2 folgt damit $\sigma(D_e) \subset [0,1]$.

(iii) Betrachte den Multiplikationsoperator $T\colon L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ definiert durch $(Tf)(t) := t \cdot f(t)$. Offensichtlich ist T selbstadjungiert, denn für $f, g \in L_2([0,1])$ gilt $(Tf, g) = \int_0^1 (Tf)(t)\overline{g(t)}dt = \int_0^1 t \cdot f(t)\overline{g(t)}dt = \int_0^1 f(t)\overline{t \cdot g(t)}dt = (f, Tg)$.
Es gilt $m_T = \inf_{\|f\|=1} (Tf, f) = \inf_{\|f\|=1} \int_0^1 t|f(t)|^2 dt \geq 0$ und analog auch $M_T \leq 1$.
Es folgt $\sigma(T) \subset [0,1]$. Ist $\lambda \in [0,1)$, so existiert $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $\lambda + 2^{-j} \leq 1$ $(j \geq j_0)$. Setze

$$f_j(t) := \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}}, & \lambda \leq t \leq \lambda + 2^{-j} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist $\|f_j \,|\, L_2\|^2 = \int_\lambda^{\lambda+2^{-j}} (2^{\frac{j}{2}})^2 dt = 2^j 2^{-j} = 1$ und es gilt ferner $\|(T - \lambda I_{L_2})f_j\| = \int_\lambda^{\lambda+2^{-j}} |(t-\lambda)2^{\frac{j}{2}}|^2 dt \to 0$. Damit gilt mit der Folgerung nach Satz 3.4.1 $\lambda \in \sigma(T) \quad \forall \lambda \in [0,1]$. Sind diese λ Eigenwerte? Dafür müsste gelten $(T - \lambda I_{L_2})f(t) = (t - \lambda)f(t) = 0$ fast überall, d.h. $f(t) = 0$ fast überall. Es kann also keine Eigenwerte geben.

Lemma 3.4.1:
Sei H Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ normal. Dann gilt:

(i) λ Eigenwert von $T \Rightarrow \overline{\lambda}$ Eigenwert von T^* mit $\mathrm{Ker}(T - \lambda I_H) = \mathrm{Ker}(T^* - \overline{\lambda} I_H)$

(ii) $\lambda \neq \mu$ Eigenwerte von T $\Rightarrow \mathrm{Ker}(T - \lambda I_H) \perp \mathrm{Ker}(T - \mu I_H)$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Bemerkung:
Insbesondere sind selbstadjungierte Operatoren normal.
Hat man verschiedene Eigenwerte λ und μ von T so sind die zugehörigen Eigenräume $\mathrm{Ker}(T - \lambda I_H)$ bzw. $\mathrm{Ker}(T - \mu I_H)$ also disjunkt und die Eigenelemente zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.

Satz 3.4.3 (Spektralsatz):
Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert (allgemeiner: normal) und kompakt.
Dann besitzt T höchstens abzählbar unendlich viele von Null verschiedene (selbstadjungiert: reelle) Eigenwerte endlicher Vielfachheit. Diese bilden ihrer betragsmäßigen Größe und Vielfachheit nach geordnet $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ eine eventuell abbrechende Nullfolge.
Die zugehörigen Eigenelemente e_j ($Te_j = \lambda_j e_j$) bilden bei entsprechender Auswahl ein Orthonormalsystem (ONS) $\{e_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}$, bzw. eine Orthonormalbasis (ONB) in $\overline{\mathrm{Im}(T)}$, und es gilt

$$H = \mathrm{Ker}(T) \oplus \overline{\mathrm{Span}(e_j \,|\, j \in \mathbb{N})}$$

Schließlich gilt für jedes $x \in H$

$$Tx = \sum_j \lambda_j (x, e_j) e_j$$

wobei über die von Null verschiedenen Eigenwerte summiert wird.

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Satz (Projektionsversion des Spektralsatzes):
Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert (allgemeiner: normal) und kompakt.
Sei $\lambda_k^* = \lambda_{j(k)} = \dots = \lambda_{j(k+1)-1}$ der k-te (verschiedene) Eigenwert von T (dabei ist $j(k+1) - j(k) = \dim(\mathrm{Ker}(T - \lambda_k^* I_H)))$.
Dann existiert zu jedem k eine orthogonale Projektionen $P_k \colon H \to \mathrm{Ker}(T - \lambda_k^* I_H)$ mit

$$P_k x = \sum_{j=j(k)}^{j(k+1)-1} (x, e_j) e_j$$

Es gilt für alle $x \in H$ die Darstellung

$$Tx = \sum_k \lambda_k^* P_k x$$

und wegen Lemma 3.4.1 gilt

$$P_k \circ P_l = \mathcal{O} \quad \text{für } k \neq l$$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
Im vorrigen Satz wurde eine Darstellung von T in Form einer punktweise (in H) konvergenten Reihe gezeigt. Konvergiert die Folge der Operatoren (der Partialsummen) auch in der Operatornorm (in $\mathcal{L}(H)$) gegen T, d.h. handelt es sich um eine Art der gleichmäßigen Konvergenz? Darüber gibt das nächste Lemma Aufschluss.

Lemma:
Ist H ein Hilbertraum, sowie $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert (allgemeiner: normal) und kompakt. Weiter bezeichnen λ_k^* und P_k die paarweise verschiedenen Eigenwerte von T, bzw. die zugehörigen orthogonalen Projektionen aus dem vorrigen Satz. Dann gilt:

$$T = \sum_k \lambda_k^* P_k \quad \text{(Konvergenz in } \mathcal{L}(H))$$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ∎

Bemerkung (Anwendung):
Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert (oder auch nur normal) und kompakt. Für gegebenes $y \in H$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ sei die Lösung $x \in H$ der Gleichung $(T - \lambda I_H)x = y$ gesucht. Diese lässt sich mithilfe der Methode der **Fredholm'schen Alternative** explizit angeben (sofern sie existiert). Dazu wird die Aussage des Spektralsatzes genutzt, dass das Spektrum des Operators folgende Gestalt haben muss:

$$\sigma(T) \subset \{0, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots\}$$

1. Fall: $\lambda \neq 0$ ist kein Eigenwert von T, d.h. $\lambda \in \rho(T) \Rightarrow \exists (T - \lambda I_H)^{-1}$
Es soll $Tx - \lambda x = y$ gelten, d.h. $x = \frac{1}{\lambda} Tx - \frac{1}{\lambda} y$. Mit der Darstellung $Tx = \sum_j \lambda_j (x, e_j) e_j$ des Spektralsatzes (Satz 3.4.3) gilt

$$x = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_j \lambda_j (x, e_j) e_j - y \right) \tag{I}$$

und damit, wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts, für alle $m \in \mathbb{N}$ auch

$$\begin{aligned} (x, e_m) &= \frac{1}{\lambda} \left(\sum_j \lambda_j (x, e_j)(e_j, e_m) - (y, e_m) \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} (\lambda_m (x, e_m) - (y, e_m)) \end{aligned} \tag{II}$$

Es folgt $\lambda (x, e_m) - \lambda_m (x, e_m) = -(y, e_m)$ und damit $(x, e_m) = \frac{1}{\lambda_m - \lambda} (y, e_m) \quad \forall m \in \mathbb{N}$ (definiert, denn λ ist kein Eigenwert!).
Wegen (I) lässt sich die Lösung also eindeutig darstellen durch

$$x = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_j \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda} (y, e_j) e_j - y \right)$$

2. Fall: $\lambda \neq 0$ ist Eigenwert von T, das heißt $\exists k \in \mathbb{N}$, sodass $\lambda = \lambda_k^* = \lambda_j$ für alle $j = j(k), \ldots, j(k+1)-1$.
Bis zu (II) kann man auch hier eine analoge Rechnung, wie im 1. Fall durchführen. Es folgt $(x, e_m) = \frac{1}{\lambda_m - \lambda}(y, e_m)$ für alle $m \in \mathbb{N} \setminus \{j(k), \ldots, j(k+1)-1\}$. Im Falle $m \in \{j(k), \ldots, j(k+1)-1\}$ erhält man $(x, e_m) = (x, e_m) - \frac{1}{\lambda}(y, e_m)$.
Gilt für alle $m \in \{j(k), \ldots, j(k+1)-1\}$ stets $(y, e_m) = 0$, so erhält man eine wahre Aussage und darf die (x, e_m) frei wählen. Dann existiert für $\alpha_j \in \mathbb{C}$

$$x = \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{\substack{j \\ j \neq j(k),\ldots,j(k+1)-1}} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda}(y, e_j)e_j + \sum_{j=j(k)}^{j(k+1)-1} \alpha_j e_j - y\right) \in H$$

und ist Lösung der Gleichung (nicht eindeutig bestimmt!).
Gilt hingegen $(y, e_m) \neq 0$ lediglich für ein $m \in \{j(k), \ldots, j(k+1)-1\}$, so führt dies auf einen Widespruch, welcher sich nur lösen lässt, wenn man die Annahme der Existenz einer Lösung der Gleichung fallen lässt.

Beispiel (Fredholm'sche Alternative für Integralgleichungen):
Das in der Bemerkung aufgezeigt Verfahren wurde erstmals von Fredholm auf Integralgleichungen mit spezieller Struktur angewendet.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt (d.h. $\exists L_2(\Omega)$) und $k \in L_2(\Omega \times \Omega)$. Dann beschreibt

$$(\mathbb{K}f)(t) := \int_\Omega k(t,s)f(s)ds, \quad t \in \Omega$$

einen linearen, beschränkten und kompakten Operator $\mathbb{K}\colon L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ (vergleiche dazu auch Übungsserie 12 / Aufgabe 7, für $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}^1$). Das bleibt auch richtig, wenn $k(t,s)$ schwach singulär ist, d.h. es gilt $k(t,s) = \frac{A(t,s)}{|t-s|^\alpha}$ mit $0 \leq \alpha < n$ und $A(t,s)$ messbar und beschränkt (Polstelle auf der Diagonalen im Definitionsbereich). Ist k symmetrisch ($k(t,s) = k(s,t)$, für $s, t \in \Omega$), so ist $\mathbb{K}$ ein normaler Operator. Gilt zusätzlich noch, dass k reellwertig ist, so ist $\mathbb{K}$ sogar selbstadjungiert.
Sei unter diesen Vorraussetzungen $\lambda \neq 0$ kein Eigenwert von $\mathbb{K}$, so besitzen die Fredholm'schen Integralgleichungen zweiter Art

$$(\mathbb{K} - \lambda I_{L_2(\Omega)})f(t) = \int_\Omega k(t,s)f(s)ds - \lambda f(t) = h(t), \quad t \in \Omega$$

und

$$(\mathbb{K}^* - \overline{\lambda} I_{L_2(\Omega)})g(t) = \int_\Omega \overline{k(t,s)}g(s)ds - \overline{\lambda} f(t) = h(t), \quad t \in \Omega$$

für jedes $h \in L_2(\Omega)$ eine eindeutig bestimmte Lösung (erste Art wäre $\mathbb{K}f = h$).
Ist $\lambda \neq 0$, so besitzen die homogenen Integralgleichungen

$$(\mathbb{K} - \lambda I_{L_2(\Omega)})f(t) = \int_\Omega k(t,s)f(s)ds - \lambda f(t) = 0, \quad t \in \Omega$$

und

$$(\mathbb{K}^* - \overline{\lambda} I_{L_2(\Omega)})g(t) = \int_\Omega \overline{k(t,s)}g(s)ds - \overline{\lambda}f(t) = 0, \quad t \in \Omega$$

die gleiche Anzahl linear unabhängiger Lösungen bezeichnet mit $\{g_1, \ldots, g_L\}$, das heißt es gilt $L = \dim(\mathrm{Ker}(\mathbb{K} - \lambda I_{L_2(\Omega)})) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathbb{K}^* - \overline{\lambda} I_{L_2(\Omega)}))$. Dann ist die Ausgangsgleichung für ein $h \in L_2(\Omega)$ lösbar, genau dann wenn

$$(h, g_l) = \int_\Omega h(t)\overline{g_l(t)}dt = 0 \quad \forall l = 1, \ldots, L$$

gilt. Die Lösung ist dann nicht eindeutig bestimmt.

Beispiel:
Betrachtet man bestimmte Randwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung (Sturm-Liouville), so führen sie auf ein Eigenwertproblem eines Integraloperators mit der Green'schen Funktion als Kern.

Bemerkung:
Satz 3.4.3 bleibt richtig, wenn man auf die Bedingungen der Selbstadjungiertheit (bzw. Normalität) verzichtet und nur kompakte Operatoren auf Banachräumen betrachtet (Beweis: Höhere Analysis II).
Man kann auch auf die Kompaktheit verzichten und nur selbstadjungierte Operatoren (sowohl beschränkt, als auch unbeschränkt) im Hilbertraum betrachten, denn über selbstadjungierte Operatoren ist schon viel bekannt, z.B. $\sigma(T) \subset [m_T, M_T]$. Diese Überlegungen werden eventuell in einer Vorlesung „Höhere Analysis III“ angestellt.

Bemerkung:
Betrachtet man nun einen selbstadjungierten, kompakten Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ über einem Hilbertraum H, welcher darüber hinaus o.B.d.A. als positiv angenommen wird (d.h. $\forall x \in H$ gilt $(Tx, x) \geq 0$), so ist $m_T \geq 0$ (nach Definition). Mit Satz 3.4.3 gilt $0 \leq \ldots < \lambda_k^* < \lambda_{k-1}^* < \ldots < \lambda_1^* = M_T$ und es exisiteren Orthogonalprojektionen P_k auf $\mathrm{Ker}(T - \lambda_k^* I_H)$. Man setzt

$$H^\lambda := \bigoplus_{\lambda_k^* \leq \lambda} \mathrm{Ker}(T - \lambda_k^* I_H)$$

und bezeichnet die zugehörigen Orthohonalprojektionen auf H^λ mit E_λ.
Offensichtlich gilt dann $H^\lambda = \{0\}$ und $E_\lambda = \mathcal{O}$ für $\lambda < 0$, sowie $E_\lambda = \sum_{\lambda_k^* \leq \lambda} P_k$, für $\lambda \geq 0$. Es folgt $E_{\lambda_k^*} - E_{\lambda_{k-1}^*} = P_k$ und wegen Satz 3.4.3

$$T = \sum_k \lambda_k^* P_k = \sum_k \lambda_k^* (E_{\lambda_k^*} - E_{\lambda_{k-1}^*}).$$

Die Operatorenfamilie $(E_\lambda)_\lambda$ bildet dann eine Spektralschar, welche man auch wie folgt allgemeiner einführen kann.

Definition:
Ist H ein Hilbertraum und $(E_\lambda)_{\lambda\in I}$, mit $I \subseteq \mathbb{R}$, eine Familie linearer stetiger Operatoren über H. Dann heißt $\boldsymbol{(E_\lambda)_\lambda}$ **Spektralschar** $:\Leftrightarrow$ Es gelten die folgenden Bedingungen

(i) E_λ ist Orthogonalprojektion, für alle $\lambda \in I$

(ii) $E_\lambda \leq E_\mu$, für $\lambda < \mu$ (bzw. $0 \leq E_\mu - E_\lambda \;\Leftrightarrow\; (E_\lambda x, x) \leq (E_\mu x, x) \quad \forall x \in H$
$\Leftrightarrow\; E_\lambda E_\mu = E_\lambda \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Im}(E)_\lambda \subset \operatorname{Im}(E)_\mu \;\Leftrightarrow\; H^\lambda \subset H^\mu$)

(iii) Die Abbildung $I \to \mathcal{L}(H)$ mit $\lambda \mapsto E_\lambda$ ist stetig von rechts, d.h. $\lim\limits_{\lambda \downarrow \lambda_0} E_\lambda = E_{\lambda_0}$

(iv) $E_\lambda = \mathcal{O}$ für $\lambda \leq 0$ (i.A. für $\lambda < m_T$)

(v) $E_\lambda = I_H$ für $\lambda \geq M_T = \lambda_1^*$

(vi) $A \in \mathcal{L}(H)$ und $TA = AT \Rightarrow E_\lambda A = AE_\lambda$

Bemerkung (Fortsetzung):
Es gilt $\operatorname{Im}(E_{\lambda_k^*} - E_{\lambda_k^*-0}) = \operatorname{Ker}(T - \lambda_k^* I_H) = \operatorname{Im}(P_k)$ und die Eigenwerte λ_k^* entsprechen Sprungstellen der stückweise konstanten Funktion $\lambda \mapsto E_\lambda$ (vergleiche dazu auch die in der Vorlesung angefertigte Zeichnung).
Formal lässt sich T als Riemann-Stieltjes-Integral in der Form

$$T = \int_{[m_T, M_T]} \lambda \, dE_\lambda$$

darstellen, oder aus Sicht der Maßtheorie. Denn für fixierte $x, y \in H$ ist $g(\lambda) := (E_\lambda x, y)$ ein Maß und T lässt sich dadurch charakterisieren, dass für alle $x, y \in H$ gilt

$$(Tx, y) = \int_{[m_T, M_T]} \lambda \, d(E_\lambda x, y)$$

Beispiel:
Der oben dargestellte Zusammenhang lässt sich anhand des bereits betrachteten Multiplikationsoperators $T\colon L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ mit $(Tf)(t) = t \cdot f(t)$ anschaulich erahnen. Offensichtlich ist T selbstadjungiert, beschränkt, aber nicht kompakt und $\sigma(T) = [0,1]$ (vergleiche früher). Man definiert

$$\begin{aligned}(E_\lambda f)(t) : &= \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq \lambda \\ 0, & \lambda < t \leq 1 \end{cases} \\ &= \chi_{[0,\lambda]}(t) f(t)\end{aligned}$$

sowie $E_\lambda = \mathcal{O}$, für $\lambda < 0$ und $E_\lambda = I_H$, für $\lambda \geq 1$.
Man rechnet leicht nach, dass es sich bei $(E_\lambda)_\lambda$ um eine Spektralschar handelt, welche sogar stetig ist. Der Operator T lässt sich also darstellen in der Form

$$T = \int_{[0-\varepsilon,1]} \lambda \, dE_\lambda \quad \text{bzw.} \quad Tf = \int_{[0-\varepsilon,1]} \lambda \, dE_\lambda f$$

Betrachtet man nun eine Zerlegung $\{\mu_0, \ldots, \mu_L\}$ des Intervalls $[0 - \varepsilon, 1]$, das heißt $-\varepsilon = \mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_L = 1$ und Werte $\mu_l^* \in (\mu_{l-1}, \mu_l]$, für $l = 1, \ldots, L$, so lässt sich für große L folgende Approximation über eine Art Zwischensumme formulieren:

$$
\begin{aligned}
Tf(t) &\approx \sum_{l=1}^{L} \mu_l^* (E_{\mu_l} f(t) - E_{\mu_{l-1}} f(t)) \\
&= \sum_{l=1}^{L} \mu_l^* \chi_{(\mu_{l-1}, \mu_l]}(t) f(t) \\
&\approx t \cdot f(t)
\end{aligned}
$$

4 Lokalkonvexe Räume

4.1 Lokalkonvexe Topologien

Bemerkung:
Im Abschnitt 1.2 über Topologische Räume wurden für beliebige Mengen X folgende Begriffe eingeführt:

Def.1: Topologie $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ ($\emptyset, X \in \tau$ und $O_1 \cap O_2 \in \tau$, sowie $\bigcup_{i\in I} O_i \in \tau$, für $O_i \in \tau$)
Def.4: Umgebung $U(x) \subset X$ ($\exists O \in \tau$, sodass $x \in O \subset U(x)$) und Umgebungssystem $U_\tau(x)$ (Menge aller Umgebungen $U(x)$ von x bezüglich τ)
Def.5: Konvergenz von $(x_j)_{j=1}^\infty$ ($\exists x \in X$ und $\forall U \in U_\tau(x)$ ex. $j_0(U)$: $x_j \in U$, $j \geq j_0(U)$)
Def.8: Umgebungsbasis $U_{\tau,B}(x) \subset U_\tau(x)$ ($\forall V \in U_\tau(x)$ existiert $U \in U_{\tau,B}(x)$ mit $U \subset V$)

Im Folgenden sei nun X ausgestattet mit einer linearen Struktur (X Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$).

Definition 4.1.1:
Eine Topologie τ auf einem Vektorraum X über $\mathbb{K}$ heißt **Vektorraumtopologie** $:\Leftrightarrow$ Die Abbildungen

$$\begin{aligned} X \times X \to X, \quad (x,y) \mapsto x+y \quad &\text{(Vektoraddition)} \\ \mathbb{K} \times X \to X, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad &\text{(skalare Multiplikation)} \end{aligned}$$

sind bezüglich τ stetig

Bemerkung:
Es existieren Topologien, die keine Vektorraumtopologien sind, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel:
Sei X ausgestattet mit der diskreten Topologie $\tau = \mathcal{P}(X)$ und $x \in X \setminus \{0\}$. Dann konvergiert die Folge $(\frac{1}{j}x)_{j=1}^\infty$ nicht in diesem topologischen Raum, denn sie ist nicht ab einer bestimmten Stelle konstant (siehe früher). Andererseits ist aber $\frac{1}{j} \to 0$ und $0 \cdot x = 0$. Wäre nun die skalare Multiplikation stetig bezüglich τ, so müsste $\lim_{j\to\infty} \frac{1}{j}x = 0$ gelten.

Bemerkung:
Für die nächste Definition benötigt man ein Mengensystem, welches im Folgenden konstruiert werden soll.
Dazu sei X ein Vektorraum und $P = \{p_i \,|\, i \in I\}$ eine Menge von Halbnormen auf X, wobei I eine beliebige Indexmenge ist. Weiter bezeichne F eine endliche Teilmenge von P und es sei $\varepsilon > 0$ fixiert. Man definiert

$$U_{F,\varepsilon} := \{x \in X \,|\, p_i(x) \leq \varepsilon \quad \forall p_i \in F\}$$

Im Falle $|P| = 1$, d.h. $P = \{p\}$ ist $U_{F,\varepsilon} = K_\varepsilon(0)$. Als Ersatz für die Menge aller Kugeln um den Nullpunkt mit Radius $\leq \varepsilon$ setzt man schließlich

$$\mathfrak{U} := \{U_{F,\varepsilon} \,|\, F \subset P \text{ endlich}, \, \varepsilon > 0\}$$

Definition:
Das so konstruierte Mengensystem $\mathfrak{U}$ heißt **Nullumgebungsbasis $\mathfrak{U}$**

Bemerkung:
Die Bezeichnung ist gerechtfertigt, denn mithilfe von $\mathfrak{U}$ lässt sich auf X stets eine Topologie τ konstruieren:

$$O \in \tau \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in O \text{ existiert } U \in \mathfrak{U} \text{ mit } x + U = \{z \in X \,|\, z = x + y, y \in U\} \subset O$$

Offensichtlich ist
1.) $\emptyset, X \in \tau$
2.) $O_1 \cap O_2 \in \tau$, für $O_1, O_2 \in \tau$, denn
ist $x \in O_1 \cap O_2$, so ist $x \in O_1$ und $x \in O_1$. Dann existieren U_1 und $U_2 \in \mathfrak{U}$ mit $x + U_1 \subset O_1$, sowie $x + U_2 \subset O_2$. Nach Definition von $\mathfrak{U}$ ist $U_1 = U_{F_1,\varepsilon_1}$ und $U_2 = U_{F_2,\varepsilon_2}$. Setzt man nun $U := U_{F_1 \cup F_2, \min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \subset U_1 \cap U_2$, so folgt $x + U \subset (x + U_1) \cap (x + U_2) \subset O_1 \cap O_2$.
3.) $\bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha \in \tau$, für $O_\alpha \in \tau$ $(\alpha \in I)$, denn
ist $x \in \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$, so existiert ein $\alpha_0 \in I$ mit $x \in O_{\alpha_0}$. Daher exisitert $U \in \mathfrak{U}$ mit $x + U \subset O_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$.

Damit ist τ tatsächlich eine Topologie und der Begriff Nullumgebungsbasis lässt sich interpretieren, als (gewöhnliche) Umgebungsbasis um den Nullpunkt herum. Durch Verschiebung um einen fixierten Vektor lässt sich daraus eine Umgebungsbasis für jeden Punkt $x_0 \in X$ definieren.

Lemma 4.1.1:
In der so konstruierten Topologie sind die Addition und die skalare Multiplikation stetig, d.h. es handelt sich stets um eine Vektorraumtopologie

Beweis::
Einfaches Anwenden der Definitionen, siehe [Werner]. ■

Definition 4.1.2:
Ein so konstruierter topologischer Raum heißt **lokalkonvexer topologischer Vektorraum** oder auch nur **lokalkonvexer Raum** .

Bemerkung:
Jede Menge $U \in \mathfrak{U}$ ist **absolut konvex** , d.h. mit $x, y \in U$ und $|\lambda| + |\mu| = 1$ ist auch $\lambda x + \mu y \in U$. Absolut konvexe Mengen M sind konvex im üblichen Sinne, d.h. mit $x, y \in M$ und $t \in [0,1]$ ist auch $tx + (1-t)y \in M$. Es gehört also stets sowohl die Verbindungsstrecke zwischen x und y zu $\mathfrak{U}$ (das wäre die gewöhnliche Konvexität), als auch diese am Ursprung gespiegelt. Absolut konvexe Mengen sind also das Analogon einer Kugel um den Nullpunkt in einem Untervektorraum von X.

Beispiel (lokalkonvexe Räume):
(i) Ist T eine Menge und X ein Vektorraum aller Funktionen über T (zum Beispiel $T = [a,b], X = C([a,b])$ oder $T = \mathbb{R}^n, X = C^b(\mathbb{R}^n)$ stetig und beschränkt). Ist $t \in T$ fixiert, so definiert

$$p_t(x) := |x(t)|, \quad x \in X$$

eine Halbnorm. Die Menge $P := \{p_t \,|\, t \in T\}$ erzeugt die lokalkonvexe Topologie der punktweisen Konvergenz. Per Definition konvergiert eine Folge $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ in (X, τ) $:\Leftrightarrow$ $\exists x \in X$ und $\forall U(x) \in \tau$ existiert $j_0(U(x))$ mit $x_j \in U(x)$, für alle $j \geq j_0(U(x))$. Ist F eine endliche Teilmenge von P und $U_{F,\varepsilon} := \{x \in X \,|\, p_i(x) \leq \varepsilon, p_i \in F\}$, sowie $\mathfrak{U} := \bigcup_{F,\varepsilon} U_{F,\varepsilon}$, so gilt

$$x_j \to x \text{ (in } \tau) \;\Leftrightarrow\; p_i(x_j - x) \to 0, \quad \forall p_i \in P$$

Beweis::
„$\Rightarrow$“: Für $p_i \in P$ wähle $F = \{p_i\}$. Nach Vorraussetzung gilt dann $p_i(x_j - x) < \varepsilon$.
„$\Leftarrow$“: F endlich, d.h. $F = \{p_1, \ldots, p_L\}$. Damit ist $p_i(x_j - x) \to 0$, für $i = 1, \ldots, L$. Das heißt es gilt $p_i(x_j - x) \leq \varepsilon$, für $j \geq j_0(\varepsilon, i)$. ∎

(ii) Sei T ein topologischer Raum und X der Vektorraum aller stetigen Funktionen über T (z.B. $T = (a,b)$ und $X = C^b((a,b))$). Für alle kompakten Teilmengen $K \subset T$ definiert

$$p_K(x) := \sup_{t \in K} |x(t)|, \quad x \in X$$

jeweils eine Halbnorm. Die Menge $P := \{p_K \,|\, K \subset T, \text{ kompakt}\}$ erzeugt die lokalkonvexe Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta.

(iii) Wählt man $T = \mathbb{R}$ und $X = C^{\infty}(\mathbb{R})$, so ist die Definition

$$p_{K,m}(x) := \sup_{t \in K} |x^{(m)}(t)|, \quad x \in X$$

für $m \in \mathbb{N}_0$ und $K \subset \mathbb{R}$ kompakt stets sinnvoll (da $x^{(m)}$ als stetige Funktion auf einer kompakten Menge insbesondere beschränkt ist, existiert dieses Supremum immer) und $P := \{p_{K,m} \,|\, K \subset \mathbb{R} \text{ kompakt}, \; m \in \mathbb{N}_0\}$ ist eine Menge von Halbnormen, welche wie oben beschrieben eine lokalkonvexe Topologie τ induziert. Der Raum $(C^\infty(\mathbb{R}), \tau)$ wird im Allgemeinen mit $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbb{R})$ bezeichnet.
Analog definiert man $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ oder $\boldsymbol{\mathcal{E}(\Omega)}$, mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen über die Halbnormen

$$p_{K,\alpha}(x) := \sup_{t \in K} |D^\alpha x(t)|, \quad x \in X$$

für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, sowie $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dabei bezeichnet D^α die partielle Ableitung zum Multiindex α.

(iv) Die Menge $\boldsymbol{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$ heißt **Schwartz-Raum der schnell fallenden Funktionen** und ist definiert durch

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,|\, \lim_{|x| \to \infty} x^\beta |D^\alpha \varphi(x)| = 0, \text{ mit } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}$$

wobei x^β zu interpretieren ist als $x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_n}$. Es handelt sich dabei um unendlich oft differenzierbare Funktionen, die schneller fallen als jedes Polynom. Der Schwartz-Raum ist nicht trivial, da zum Beispiel $e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ oder $e^{-|x|}$ Elemente dieses Raumes sind. Die Halbnormen zur Erzeugung der lokalkonvexen Topologie könnten beispielsweise folgende Gestalt haben

$$p_{\alpha,m}(\varphi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^m) |D^\alpha \varphi(x)|, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

für $\alpha \in N_0^n$ und $m \in \mathbb{N}$.

(v) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt. Dann definiert man die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen über Ω mit kompakten Träger durch

$$\mathcal{D}_K(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \,|\, \operatorname{supp}(\varphi) \subset K\}$$

wobei $\operatorname{supp}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega \,|\, \varphi(x) \neq 0\}}$ als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selbst kompakt ist und als Support oder auch Träger der Funktion φ bezeichnet wird. Auch diese Menge ist nicht trivial, da beispielsweise

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

eine Funktion mit diesen Eigenschaften ist. Definiert man für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ Halbnormen der Form

$$p_\alpha(\varphi) := \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|, \quad \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$$

und fasst diese in der Menge $P := \{p_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$ zusammen so führt dies auf die lokalkonvexe Topologie τ auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

(vi) Betrachtet man nun für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen die Menge

$$C_0^\infty(\Omega) := \bigcup_{K \subset \Omega} \mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \,|\, \mathrm{supp}(\varphi) \subset \Omega \text{ kompakt}\}$$

so handelt es sich dabei um die unendlich oft differenzierbaren Funktionen über Ω mit kompakten Träger und Null auf der Rand des Trägers (da Ω offen ist hat der Rand des Trägers stets einen echten Abstand zum Rand von Ω). Als Halbnormen wählt man nicht etwa die Halbnormen aus Beispiel (v) mit variablem K, sondern die Menge

$$P := \{p \,|\, p \text{ Halbnorm auf } C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } p\big|_{\mathcal{D}_K(\Omega)} \text{ stetig bezüglich } \tau_k\}$$

wobei τ_k die lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$ aus Beispiel (v) bezeichnet.
Die durch P erzeugte Topologie τ wird als induktive Limes Topologie bezeichnet und man schreibt für $(C_0^\infty(\Omega), \tau)$ auch $\boldsymbol{\mathcal{D}(\Omega)}$. Sie ist die stärkste lokalkonvexe Vektorraumtopologie auf $C_0^\infty(\Omega)$, sodass die Einbettung $\mathcal{D}_K(\Omega) \to C_0^\infty(\Omega)$ stetig ist.
Es ergibt sich für die Konvergenz in $\mathcal{D}(\Omega)$:

$(\varphi_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\Omega)$ konvergent gegen φ, falls

1.) $\exists K \subset \Omega$ kompakt, mit $\mathrm{supp}(\varphi_j), \mathrm{supp}(\varphi) \subset K,$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und

2.) Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt $p_{\alpha,K}(\varphi_j - \varphi) \to 0,$ d.h. genau dann wenn $\sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi_j(x) - D^\alpha \varphi(x)| = \|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi \,|\, C(K)\| \to 0$

(vii) Ist X ein normierter Raum und $P = \{p\} = \{\|\cdot\|\}$, so ist die davon erzeugte lokalkonvexe Topologie genau die **Normtopologie** .

(viii) Ist X ein normierter Raum, so existiert der Dualraum $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ (vergleiche Abschnitt 2.4). Dann bilden für fixierte $x' \in X'$ die Funktionen

$$p_{x'}(x) := |x'(x)|, \quad x \in X$$

Halbnormen auf X und die Menge $P := \{p_{x'} \,|\, x' \in X'\}$ erzeugt die sogenannte **schwache Topologie** τ, bezeichnet mit $\boldsymbol{\sigma(X, X')}$ auf X.

(ix) Wählt man für einen normierten Raum X die Funktionen andererseits für fixierte $x \in X$ durch

$$p_x(x') := |x'(x)|, \quad x' \in X'$$

so sind dies Halbnormen auf X' und die Menge $P := \{p_x \,|\, x \in X\}$ erzeugt die **schwach* Topologie** $\boldsymbol{\sigma(X', X)}$ auf X'.

(x) Sind X, Y normierte Räume, so kann man den Raum der stetigen linearen Operatoren $\mathcal{L}(X,Y)$ betrachten. Die Halbnormen

$$p_x(T) := \|Tx \,|\, Y\|, \quad T \in \mathcal{L}(X,Y)$$

für ein fixiertes Element $x \in X$ bzw. die Menge $P := \{p_x \,|\, x \in X\}$ erzeugt die **starke Operatorentopologie** .
Die Funktionen

$$p_{x,y'}(T) := |y'(Tx)|, \quad T \in \mathcal{L}(X,Y)$$

für fixierte $x \in X$ und $y' \in Y'$ sind ebenfalls Halbnormen auf $\mathcal{L}(X,Y)$ und die Menge $P := \{p_{x,y'} \,|\, x \in X, y' \in Y'\}$ erzeugt die **schwache Operatorentopologie** .

Bemerkung:
Für normierte Räume X hat man also die Möglichkeit drei verschiedene lokalkonvexe Topologien auf X' einzuführen:
1.) X' mit der Normtopologie $\|x' \,|\, \mathcal{L}(X,\mathbb{C})\|$,
2.) die schwach* Topologie $\sigma(X', X)$ auf X' oder
3.) die schwache Topologie $\sigma(X', X'')$ auf X'.
Es gibt Fälle, in denen diese drei tatsächlich paarweise verschieden sind.

Lemma 4.1.2:
Die Halbnormenfamilie P erzeuge auf dem Vektorraum X die lokalkonvexe Topologie τ. Dann sind äquivalent:

(i) (X,τ) ist Hausdorffraum (d.h. Punkte sind durch offene Mengen trennbar)
(ii) $\forall x \in X \setminus \{0\}$ existiert $p \in P$ mit $p(x) \neq 0$
(iii) $\exists \mathfrak{U}$ Nullumgebungsbasis mit $\bigcap\limits_{U \in \mathfrak{U}} U = \{0\}$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

Bemerkung:
Ist jeder topologische Vektorraum lokalkonvexer Raum? Nein! Ein Kriterium wird in folgendem Satz geliefert.

Satz 4.1.1:
Sei (X,τ) ein topologischer Vektorraum. Dann ist X lokalkonvex $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Nullumgebungsbasis aus absolut konvexen und absorbierenden Mengen in X.

Beweis::
Siehe [Werner, VIII Satz 1.5]. ■

Definition:
Sei A eine Teilmenge eines Vektorraums X und die Abbildung $p_A\colon X \to [0,\infty]$ definiert durch $x \mapsto \inf\{\lambda > 0 \,|\, \frac{x}{\lambda} \in A\}$. Dann heißt A **absorbierend** $:\Leftrightarrow p_A(x) < \infty \quad \forall x \in X$.

Beispiel:
Eine Kreisscheibe in beliebiger Lage um den Ursprung im $\mathbb{R}^3$ ist absolut konvex aber nicht absorbierend, wohin gegen die Einheitskugel beide Kriterien erfüllt.

4.2 Lineare stetige Funktionale

<u>Lemma</u> 4.2.1:
Die Halbnormenfamilie P erzeuge die lokalkonvexe Topologie τ auf einem Vektorraum X. Dann gilt:

(i) Für die Halbnorm $q\colon X \to [0, \infty)$ mit $q \notin P$ sind äquivalent:
  1.) q ist stetig
  2.) q ist stetig in 0
  3.) $\{x \in X \mid q(x) \leq 1\}$ ist Nullumgebung

(ii) Alle $p \in P$ sind stetig

(iii) Eine Halbnorm q ist stetig $\Leftrightarrow$ $\exists M \geq 0$ und $\exists F \subset P$ endlich mit $q(x) \leq M \cdot \max\limits_{p \in F} p(x) \quad \forall x \in X$

Beweis::
Siehe Vorlesung. ■

<u>Satz</u> 4.2.1:
Seien (X, τ_P) und (Y, τ_Q) zwei lokalkonvexe Räume, erzeugt durch die Halbnormenfamilien P und Q, sowie $T\colon X \to Y$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:

(i) T ist stetig

(ii) T ist stetig in 0

(iii) $\forall q \in Q$ existiert eine endliche Teilmenge $F \subset P$ und ein $M \geq 0$ mit $q(Tx) \leq M \cdot \max\limits_{p \in F} p(x) \quad \forall x \in X$

Beweis::
Entfällt. ■

<u>Folgerung:</u>
Für einen lokalkonvexen Raum (X, τ_P) und $l\colon (X, \tau_P) \to \mathbb{C}$ gilt:

$$l \text{ linear und stetig} \;\Leftrightarrow\; \exists F \subset P \text{ und } M \geq 0 \text{ mit } |l(x)| \leq M \cdot \max_{p \in F} p(x) \quad \forall x \in X$$

Beweis::
Klar nach Satz 4.2.1. $(Y, \tau_Q) = \mathbb{C}$ mit $Q = \{|\cdot|\}$. ■

Bemerkung:
Im Abschnitt 1.2 bzw. 1.3 wurden Topologien verglichen. Es wurden topologische Räume (X, τ_1) und (X, τ_2) betrachtet und es wurde definiert:
τ_2 feiner als τ_1 $:\Leftrightarrow$ $\tau_1 \subset \tau_2$. Äquivalent dazu war, dass die identische Abbildung $id\colon (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ stetig ist.
Weiter ist bekannt, dass für jede Topologie gilt $\{\emptyset, X\} = \tau_{in} \subset \tau \subset \tau_{dis} = \mathcal{P}(X)$.
Ist eine Topologie τ_2 feiner als τ_1, so hat τ_2

mehr offene Mengen

mehr abgeschlossene Mengen

weniger kompakte Mengen

mehr stetige Funktionale, d.h. Abbildungen $X \to \mathbb{K}$ (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

weniger konvergente Folgen

Beispiel (Feinheit lokalkonvexer Topologien):
(i) Betrachte $X = C^b(\mathbb{R}^n)$ (stetige und beschränkte Funktionen) mit der Topologie der punktweisen Konvergenz τ und der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta σ (vergleiche dazu Beispiel (i) und (ii) in 4.1).
Dann ist σ feiner als τ, denn $id\colon (X, \sigma) \to (X, \tau)$ ist stetig. Nach Satz 4.2.1 (iv) ist $q(Tx) \leq M \cdot \max_{p \in F} p(x)$, denn $p_t(x) \leq 1 \cdot p_{\{t\}}(x)$.

(ii) Ist X ein normierter Raum, so ist die Normtopologie stets feiner als die schwache Topologie $\sigma(X, X')$.

Definition 4.2.1:
Die Menge der linearen stetigen Funktionale auf einem lokalkonvexen Raum (X, τ) heißt **Dualraum von $\boldsymbol{X}$** und wird mit X' oder auch $\boldsymbol{(X_\tau)'}$ bezeichnet.

Bemerkung:
Der Dualraum X' sei ausgestattet mit der schwach* Topologie $\sigma(X', X)$, d.h. die durch die Halbnormen

$$p_x(x') := |x'(x)|, \quad \forall x' \in X'$$

für $x \in X$ erzeugte lokalkonvexe Topologie (vergleiche dazu Beispiel (ix) in 4.1). Das entspricht der punktweisen Konvergenz im Dualraum, d.h.

$$(x'_j)_{j=1}^{\infty} \subset X' \text{ konvergiert gegen } x' \in X' \;\Leftrightarrow\; x'_j(x) \to x'(x), \quad \forall x' \in X'$$

Satz 4.2.2 (Fortsetzungssatz von Hahn-Banach):
Sei X ein lokalkonvexer Raum, $U \subset X$ ein linearer Teilraum, sowie l ein lineares und stetiges Funktional über U (d.h. $l \in U'$). Dann existiert eine Fortsetzung L von l mit $L \in X'$.

Beweis::
Siehe Vorlesung (verwende die Folgerung nach Satz 4.2.1 und den Satz von Hahn-Banach aus 2.4). ∎

Bemerkung:
Analog zur Folgerung 1 bzw. der danach folgenden Bemerkung in Abschnitt 2.4 lässt sich aus dem Satz von Hahn-Banach die Trennungseigenschaft des Dualraumes ableiten:

Satz 4.2.3 (Trennungssatz):
Sei X ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Dann trennt X' die Punkte von X, d.h. für $x \neq y$ existiert $x' \in X'$ mit $x'(x) \neq x'(y)$.

Beweis::
Entfällt. ∎

4.3 Distributionen (verallgemeinerte Funktionen)

Bemerkung:
Die Distributionentheorie wurde um 1950 von L. Schwartz eingeführt. Vorläufer waren zum Beispiel schwache Ableitungen oder auch Arbeiten von Sobolev.
Im Mittelpunkt der Betrachtungen stehen die lokalkonvexen Räume $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$ und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen oder auch $\Omega = \mathbb{R}^n$ (vergleiche deren Definitionen im Beispiel (iii), (iv) und (vi) in Abschnitt 4.1).

Definition:
Die Elemente der Funktionenräume $\boldsymbol{\mathcal{D}(\Omega)}$, $\boldsymbol{\mathcal{E}(\Omega)}$, oder $\boldsymbol{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$ - mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen - werden **Testfunktionen** genannt und für gewöhnlich mit $\boldsymbol{\varphi}$ bezeichnet.

Bemerkung:
Die Topologien der Räume $\mathcal{E}(\Omega)$ und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ haben eine „einfache Struktur“, denn es existiert jeweils eine abzählbare, totale Halbnormenfamilie, welche die jeweilige lokalkonvexe Topologie erzeugt. In $\mathcal{D}(\Omega)$ gibt es keine solche. Was das genau bedeutet soll in folgender Definition geklärt werden:

Definition:
Eine Halbnormenfamilie $P = \{p_i \,|\, i \in I\}$ über X heißt **total** :⇔ Es gilt für $x \in X$

$$p_i(x) = 0 \quad \forall i \in I \;\;\Leftrightarrow\;\; x = 0$$

Beispiel (abzählbare, totale Halbnormenfamilien):
(i) Sei $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset \Omega$ eine aufsteigende Folge kompakter Mengen, für die gilt $\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \Omega$. Dann wird die lokalkonvexe Topologie in $\mathcal{E}(\Omega)$ durch die Halbnormenfamilie $P = \{p_m \,|\, m \in \mathbb{N}_0\}$ mit

$$p_m(\varphi) := \sup_{x\in K_m} \left(\sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha \varphi(x)| \right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$$

erzeugt.

(ii) Im Schwatz-Raum der schnell fallenden Funktionen $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wären zum Beispiel

$$p_{k,m}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left((1+|x|^m) \sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha \varphi(x)| \right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

für $k, m \in \mathbb{N}_0$ Halbnormen einer solchen Familie.

Bemerkung:
Die Räume $\mathcal{E}(\Omega)$ und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sind überdies sogar durch

$$d(\varphi, \psi) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{p_m(\varphi - \psi)}{1 + p_m(\varphi - \psi)}$$

metrisierbar. Dass eine solche Konstruktion tatsächlich eine Metrik ist wurde in Kapitel 1 bereits gezeigt.
Die Metrik d erzeugt nun gemäß Abschnitt 1.2 eine Topologie auf diesen Funktionenräumen welche mit τ_d bezeichnet wird. Wie in allen lokalkonvexen Räumen, welche durch eine abzählbare, totale Halbnormenfamilie erzeugt werden, stimmt τ_d aber mit der lokalkonvexen Topologie überein.
Da man jetzt $\mathcal{E}(\Omega)$ und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ also als metrische Räume auffassen kann, stellt sich die Frage nach Vollständigkeit bezüglich dieser Metriken.

Definition:
Lokalkonvexe Räume, welche durch eine abzählbare, totale Halbnormenfamilie erzeugt werden können und die bezüglich der daraus konstruierten Metrik einen vollständigen metrischen Raum bilden, werden **Frechéträume** genannt.

Beispiel (Frechéträume):
Die Funktionenräume $\mathcal{E}(\Omega)$ und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sind Frechéträume.

Bemerkung:
Die Konvergenz in $\mathcal{D}(\Omega)$ gestaltet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega) \text{ mit } \varphi_j \to 0 \ \ :\Leftrightarrow \quad & \\ & 1.)\ \exists K \subset \Omega \text{ kompakt, mit } \operatorname{supp}(\varphi_j) \subset K, \text{ für alle } j \in \mathbb{N} \text{ und} \\ & 2.)\ \text{Für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ gilt } \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi_j(x)| \to 0\end{aligned}$$

Von besonderem Interesse sind die linearen und stetigen Funktionale über den obigen Funktionenräumen. Sie stehen in engem Zusammenhang mit dem Begriff der Distribution.

Definition:
Die Dualräume der lokalkonvexen Räume $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{D}(\Omega)$ und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, d.h. die Menge der linearen und stetigen Funktionale über ihnen, werden jeweils mit der schwach* Topologie ausgerüstet und mit $\mathcal{E}'(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$ und $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Man hat also punktweise Konvergenz. Die Elemente dieser Dualräume werden **Distributionen** oder **verallgemeinerte Funktionen** genannt (schreibe $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

Lemma:
Sei $X \in \{\mathcal{E}(\Omega), \mathcal{D}(\Omega), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\}$ und $T \colon X \to \mathbb{C}$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) T stetig

(ii) $\varphi_j \to \varphi$ in $X \Rightarrow T(\varphi_j) \to T(\varphi)$ in $\mathbb{C}$

(iii) $\exists M \geq 0$ und $p_1, \dots, p_n \in P$ mit $|T(\varphi)| \leq M \cdot \max\limits_{i=1,\dots,n} p_i(\varphi), \quad \forall \varphi \in X$

Beweis::
Siehe Folgerung in 4.2. ■

Definition:
Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, so bezeichnet $\boldsymbol{L_1^{loc}(\Omega)}$ diejenigen Funktionen $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$), für die mit jeder beliebigen kompakten Teilmenge $A \subset \Omega$ gilt $\chi_A f \in L_1(\Omega)$. f heißt in diesem Falle **lokal integrierbar** .

Beispiel:
Die konstante Funktion $f(x) \equiv 1$ ist zwar lokal integrierbar ($f \in L_1^{loc}(\Omega)$), ist aber offensichtlich kein Element von $L_1(\Omega)$.

Bemerkung:
Insbesondere ist jede stetige Funktion lokal integrierbar und, falls Ω selbst kompakt ist gilt $L_1^{loc}(\Omega) = L_1(\Omega)$.

Beispiel (lineare stetige Funktionale / Distributionen):
(i) Sei $0 \in \Omega$. Dann ist die Abbildung

$$\delta \colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C} \text{ mit } \delta(\varphi) = \varphi(0)$$

offensichtlich linear. Weiter ist δ auch stetig, denn $|\delta(\varphi)| \leq 1 \cdot \sup_{x \in K} |\varphi(x)|$ mit $0 \in K \subset \Omega$ kompakt, z.B. $K = \{0\}$. Das lineare stetige Funktional $\boldsymbol{\delta}$ wird als **Deltadistribution** bezeichnet. Für $0 \neq x_0 \in \Omega$ definiert man allgemeiner auch $\delta_{x_0} = \varphi(x_0)$, für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Man schreibt auch $\delta(\varphi) = \langle \delta, \varphi \rangle$.

(ii) Für $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ definiert

$$T_f(\varphi) = \langle T_f, \varphi \rangle := \int_\Omega f(x) \varphi(x)\, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ebenfalls ein lineares stetiges Funktional auf $\mathcal{D}(\Omega)$. Zunächst beachte man, dass $\operatorname{supp}(\varphi)$ kompakt ist, sodass das Integral nur über einer komapkten Menge gebildet wird. Weiter ist jede Testfunktion stetig und damit dort auch beschränkt. Da f schließlich lokal

integrierbar ist existiert das Integral also und die Definition ist sinnvoll.
Aus der Linearität des Integrals folgt die Linearität des Funktionals und die Stetigkeit von T_f sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi\rangle| &= |\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx| \\ &\leq \int_K |f(x)|\,dx \cdot \sup_{x\in K}|\varphi(x)| \\ &\leq M \cdot \sup_{x\in K}|\varphi(x)|, \qquad \text{für } \operatorname{supp}(\varphi) \subset K \end{aligned}$$

Dabei verwendet man, dass für $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{K\subset\Omega} \mathcal{D}_K(\Omega)$ (K kompakt) gilt, dass T_f genau dann stetig auf $\mathcal{D}(\Omega)$ ist, wenn T_f stetig auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ist.
$\boldsymbol{T_f}$ bezeichnet man dann als die von f erzeugte **reguläre Distribution** .

Bemerkung:
Betrachtet man Äquivalenzklassen (wie bei L_p), so ist die Abbildung $L_1^{loc}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $f \mapsto T_f$ wie in Beispiel (ii) injektiv (siehe folgendes Lemma). Das heißt man kann lokal integrierbare Funktionen auch als spezielle Funktionale auffassen. Es gibt allerdings Elemente in $\mathcal{D}'(\Omega)$, wie zum Beispiel die Deltadistribution, welche nicht mit Funktionen aus $L_1^{loc}(\Omega)$ identifiziert werden können. Man erhält also nur eine Isomorphie zwischen $L_1^{loc}(\Omega)$ und einem Teilraum von $\mathcal{D}'(\Omega)$, da eine komplette Beschreibung von $\mathcal{D}'(\Omega)$ nicht möglich ist.

Lemma 4.3.1:
Ist $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ und gilt $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, so ist $f(x) = 0$ fast überall auf Ω.

Beweis::
Entfällt. ∎

Definition 4.3.1:
Die Elemente aus $\mathcal{D}'(\Omega)$, welche sich durch $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ erzeugen lassen, heißen **reguläre Distributionen** .

Bemerkung:
In der Physik wird die Deltadistribution des öfteren als Funktion der Form

$$\delta\colon \mathbb{R} \to [0,\infty] \text{ mit } \delta(x) := \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \qquad \text{und } \int_\mathbb{R} \delta(x)\,dx = 1$$

eingeführt. Eine solche Funktion existiert aber natürlich nicht, da das Integral über eine Menge vom Maße Null (hier der einzelne Punkt $\{0\}$) stets 0 ist. Akzeptiert man diese Definition jedoch, würde $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\,dx = \varphi(0)$ für eine beliebige Funktion φ über $\mathbb{R}$ folgen, was im Grunde der Definition der Deltadistribution entspricht. Es existieren allerdings Funktionen $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}} \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, deren Distributionen $\int \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx$ für $\varepsilon \to 0$ gegen die Deltadistribution streben.

Beispiel (Fortsetzung: Distributionen):
(iii) Sei μ ein reguläres Borelmaß über $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. D.h. es ist (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, wobei Σ die σ-Algebra der Borelmengen über Ω bezeichnet und μ ein Maß ist, sodass $\mu(K) < \infty$ für alle $K \subset \Omega$ kompakt und $\mu(A) = \sup\{\mu(C) \mid C \subset A \text{ kompakt}\} = \inf\{\mu(O) \mid A \subset O \text{ offen}\}$ gilt. Dann ist

$$T_\mu(\varphi) := \int_\Omega \varphi\, d\mu$$

ein lineares stetiges Funktional (eine Distribution) aus $\mathcal{D}'(\Omega)$. Die Zuordnung ist wieder injektiv.

(iv) Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist auch die Abbildung

$$T\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, \text{ mit } \varphi \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(k)$$

ein lineares stetiges Funktional ($T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$). Da $\operatorname{supp}(\varphi)$ kompakt ist, ist diese Summe stets endlich.

(v) Betrachtet man den $\mathbb{R}^1$, so ist die Funktion $\frac{1}{x}$ nicht lokal integrierbar, d.h. $\frac{1}{\cdot} \notin L_1^{loc}(\mathbb{R})$. Man geht daher über zum Cauchy'schen Hauptwert (principal value, p.v.), wobei man sich bei der Integration gleichmäßig von beiden Seiten der Polstelle annähert. Dann definiert

$$\langle p.v.\frac{1}{x}, \varphi\rangle := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

eine Distribution.

Bemerkung:
In Analogie zur Isomorphie von $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ zu einem Teilraum von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, kann man eine Isomorphie von $L_1^{comp}(\mathbb{R}^n)$ zu $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ finden. Dabei bezeichnet $\boldsymbol{L_1^{comp}(\mathbb{R}^n)}$ die Menge der L_1 Funktionen über $\mathbb{R}^n$ mit **kompaktem Träger** . Wie hängen also die Funktionenräume bzw. deren Dualräume zusammen? Bezeichnet $A \hookrightarrow B$ die stetige Einbettung von A in B ($\subset$ und stetig), so gilt :

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega) \quad \text{und} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \hookleftarrow \mathcal{E}'(\Omega)$$

sowie

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \hookleftarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookleftarrow \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$$

Dies ist insbesondere damit zu begründen, dass durch eine feinere Topologie mehr stetige lineare Funktionale entstehen.

Bemerkung:
Bisher wurden nur Funktionen aus L_1^{loc} mit Distributionen identifiziert, aber wie rechnet man nun mit Distributionen? Da es sich um lineare stetige Funktionale handelt, hat man wieder eine lineare Struktur, sodass gilt

$$\langle \lambda T + \mu S, \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle + \mu \langle S, \varphi \rangle$$

für Distributionen T, S, komplexe Zahlen λ und μ und beliebige Testfunktionen φ. Weiterhin wurden die Dualräume mit der schwach* Topologie ausgerüstet.

Definition 4.3.2 (Differentiation von Distributionen):
Bezeichnet $D^\alpha(\cdot) := (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}(\cdot)$ einen Differentialoperator, welcher die partiellen Ableitungen gemäß des Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ bildet, so führt man die **Ableitung einer Distribution** T wie folgt ein:

$$\boldsymbol{(D^\alpha T)(\varphi)} \; = \langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Bemerkung:
Die Differentiation einer Distribution wird also über die Anwendung der Distribution auf die Ableitung der Testfunktion definiert. Zunächst sei bemerkt, dass die Testfunktionen als unendlich oft stetig differenzierbar angesetzt waren. Weiter fällt auf, dass diese Bildung gerechtfertigt erscheint, da sie eine natürliche Fortsetzung des Differentialoperators darstellt. Sei dazu Ψ eine differenzierbare Funktion, dann gilt für die damit assozierte Distribution $\langle \Psi, \cdot \rangle$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned}
\langle (-i) \frac{\partial}{\partial x_j} \Psi, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (-i) \frac{\partial}{\partial x_j} \Psi(x) \varphi(x) \, dx && \text{(Definition)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} (-i) \frac{\partial}{\partial x_j} \Psi(x) \varphi(x) \, dx_j \right) (dx \setminus dx_j) && \text{(Fubini)} \\
&= (-i) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\Big[\Psi(x) \varphi(x) \Big]_{x_j = -\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \Psi(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x) \, dx_j \right) (dx \setminus dx_j) && \text{(part. Int.)} \\
&= - \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x) \cdot (-i) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x) \, dx && \text{(Fubini)} \\
&= - \langle \Psi, (-i) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi \rangle && \text{(Definition)}
\end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass $\operatorname{supp}(\varphi)$ kompakt ist und daher $\lim_{|x_j| \to \infty} \varphi(x) = 0$ gilt. Und $(dx \setminus dx_j)$ meint $dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_{j-1} \cdot dx_{j+1} \cdot \ldots \cdot dx_n$.
Warum statt dem üblichen Differentialoperator der Vorfaktor $(-i)$ gewählt wurde, wird später klar.

Definition 4.3.3 (Multiplikation von Distributionen mit C^∞-Funktionen):
Für Distributionen $T \in X'$, wobei $X = \mathcal{D}(\Omega)$ oder $\mathcal{E}(\Omega)$ (oder mit Zusatzvorraussetzungen auch $\mathcal{S}(\mathbb{R})$) und Funktionen $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ erklärt man die **Multiplikation**

$$\langle a \cdot T, \varphi \rangle := \langle T, a \cdot \varphi \rangle, \quad \varphi \in X$$

Bemerkung:
Analog zum Differentialoperator ist diese Definition wieder eine Verallgemeinerung der üblichen Multiplikation von Funktionen. Im Allgemeinen kann man jedoch nicht zwei beliebige Distributionen miteinander multiplizieren, so existiert zum Beispiel das Quadrat der Deltadistribution nicht.

Bemerkung (Stetigkeit):
Die vorgestellten Operationen auf Distributionen sind stetige Abbildungen (bezüglich der schwach* Topologie) von $\mathcal{D}'$ nach D', d.h.

$$T_n \to T \text{ schwach*} \;\Leftrightarrow\; \langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \text{ in } \mathbb{C} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Mit der Stetigkeit von D^α gilt also

$$\begin{aligned} D^\alpha T_n \to D^\alpha T \text{ schwach*} \;&\Leftrightarrow\; \langle D^\alpha T_n, \varphi \rangle \to \langle D^\alpha T, \varphi \rangle \text{ in } \mathbb{C} && \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ &\Leftrightarrow\; (-1)^{|\alpha|} \langle T_n, D^\alpha \varphi \rangle \to (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \text{ in } \mathbb{C} && \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ &\Leftrightarrow\; \langle T_n, D^\alpha \varphi \rangle \to \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \text{ in } \mathbb{C} && \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \end{aligned}$$

Abschließend sollen ein paar „klassische Beispiele“ der Anwendung von Distributionen aufgezeigt werden:

Beispiel:
(i) Für die Betragsfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ gilt offensichtlich $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ (aber $f \notin L_1^{comp}(\mathbb{R})$). Sie ist in $x = 0$ nicht differenzierbar. Betrachtet man die assoziierte Distribution T_f, so lässt sich diese im Distributionensinne ableiten und man erhält, das von der Anschauung erwartete Ergebnis:

$$\begin{aligned} \langle \frac{d}{dx} T_f, \varphi \rangle &= -\langle T_f, \frac{d}{dx} \varphi \rangle \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \frac{d}{dx} \varphi(x)\, dx \\ &= -\int_0^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} \varphi(x)\, dx + \int_{-\infty}^{0} x \cdot \frac{d}{dx} \varphi(x)\, dx \\ &= -\left(\Big[x \cdot \varphi(x) \Big]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 1 \cdot \varphi(x)\, dx \right) + \left(\Big[x \cdot \varphi(x) \Big]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} 1 \cdot \varphi(x)\, dx \right) \\ &= \int_0^{\infty} 1 \cdot \varphi(x)\, dx + \int_{-\infty}^{0} (-1) \cdot \varphi(x)\, dx \\ &= \langle T_H, \varphi \rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet T_H die von der **Heaviside-Funktion** $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$H(x) := \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

erzeugte Distribution (man schreibt auch schlampig nur H anstatt T_H, da beide identifiziert werden). Offensichtlich ist die Ableitung jedoch nur bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmt, denn H ließe sich in endlich vielen Punkten abändern (z.B.: $H(0) = -1$) und alles würde trotzdem analog gelten. Es gilt weiter, dass auch H selbst nicht differenzierbar ist, aber die assoziierte Distribution:

$$\begin{aligned}
\langle \frac{d}{dx} T_H, \varphi \rangle &= -\langle T_H, \frac{d}{dx}\varphi \rangle \\
&= -\int_0^\infty 1 \cdot \frac{d}{dx}\varphi(x)\,dx - \int_{-\infty}^0 (-1) \cdot \frac{d}{dx}\varphi(x)\,dx \\
&= -\left(\Big[1 \cdot \varphi(x) \Big]_0^\infty - \int_0^\infty 0 \cdot \varphi(x)\,dx \right) - \left(\Big[(-1) \cdot \varphi(x) \Big]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 0 \cdot \varphi(x)\,dx \right) \\
&= \varphi(0) + \varphi(0) \\
&= 2 \cdot \langle \delta, \varphi \rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Die Ableitung (im Sinne der Distributionentheorie) der Heaviside-Funktion (und damit im Prinzip auch der **Signum-Funktion**) ist also die Deltadistribution.

(ii) Man betrachte den eindimensionalen **Wellenoperator** $\boldsymbol{(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2})(\cdot)}$, mit einem Parameter $a \neq 0$ und definiere die Funktion

$$E_1(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{2a}, & at - |x| > 0 \\ 0 & at - |x| \leq 0 \end{cases}$$

Dann ist $E_1 \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^2)$, aber nicht differenzierbar auf dem Rand des Kegels $|x| = at$. D.h. man kann den Wellenoperator nicht überall auf E_1 anwenden. Geht man jedoch zur erzeugten regulären Distribution über, so gilt:

$$\begin{aligned}
&\langle (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2})(E_1), \varphi \rangle \\
&\quad = \langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_1, \varphi \rangle - a^2 \langle \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_1, \varphi \rangle \\
&\quad = \langle E_1, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi \rangle - a^2 \langle E_1, \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi \rangle \\
&\quad = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^\infty \int_{\frac{|x|}{a}}^\infty 1 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x,t)\,dt\,dx - \frac{a}{2} \int_0^\infty \int_{-at}^{at} 1 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t)\,dx\,dt \\
&\quad = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^\infty \left(\Big[\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t) \Big]_{t=\frac{|x|}{a}}^\infty - \int_{\frac{|x|}{a}}^\infty 0 \cdot \frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t)\,dt \right) dx \\
&\qquad - \frac{a}{2} \int_0^\infty \left(\Big[\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,t) \Big]_{x=-at}^{at} - \int_{-at}^{at} 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,t)\,dx \right) dt
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}\varphi\left(x, \frac{|x|}{a}\right)\,dx - \frac{a}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi(at,t) - \frac{\partial}{\partial x}\varphi(-at,t)\right)dt$$

Mithilfe der Substitutionen $y := \frac{x}{a}$, für $x \in (0,\infty)$ bzw. $y := -\frac{x}{a}$, für $x \in (-\infty, 0)$ kann man die Gleichungskette wie folgt fortsetzen

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2a}\left(a\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(ay,y)\,dy - a\int_{+\infty}^{0}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(-ay,y)\,dy\right)\\ &\quad -\frac{a}{2}\left(\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(at,t)\,dt - \int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(-at,t)\,dt\right)\end{aligned}$$

Die Kettenregel angewendet auf die mittelbare Funktion φ liefert

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\varphi(au,u) &= \frac{\partial}{\partial x}\varphi(au,u)\cdot a + \frac{\partial}{\partial t}\varphi(au,u)\\ \frac{d}{du}\varphi(-au,u) &= \frac{\partial}{\partial x}\varphi(-au,u)\cdot(-a) + \frac{\partial}{\partial t}\varphi(-au,u)\end{aligned}$$

womit man jeweils die ersten Integrale der Klammern berechnen kann:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(au,u) - \frac{1}{2}a\frac{\partial}{\partial x}\varphi(au,u)\right)du &= -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{d}{du}\varphi(au,u)\,du\\ &= -\frac{1}{2}\Big[\varphi(au,u)\Big]_{u=0}^{\infty}\\ &= \frac{1}{2}\varphi(0,0)\end{aligned}$$

Völlig analog erhält man für die übrigen Terme noch einmal $\frac{1}{2}\varphi(0,0)$. Damit gilt also im Sinne der Distributionen

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(E_1) = \delta_{(t,x)=(0,0)}$$

Funktionen oder allgemeiner Distributionen, die unter Anwendung eines Differentialoperators die Deltadistribution ergeben werden als **Fundamentallösung** des Operators bezeichnet.

(iii) Analog zu Beispiel (ii) kann man für den **Laplace-Operator** $\boldsymbol{\Delta(\cdot)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}(\cdot)$ eine Fundamentallösung nachrechnen. Die Funktion

$$\widetilde{E}_n(x) := \begin{cases}\frac{1}{2\pi}\log|x|, & n=2\\ -\frac{1}{(n-2)|\omega_n|}|x|^{2-n}, & n\geq 3\end{cases}$$

wobei $|\omega_n|$ das Volumen der $(n-1)$-dimensionalen Einheitssphäre bezeichnet, ist differenzierbar in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und man weiß, dass $\Delta\widetilde{E}_n(x) = 0$ ist, für $x \neq 0$ (vergleiche dazu Analysis III). Mit Hilfe der assoziierten Distribution zeigt man $\Delta\widetilde{E}_n = \delta_{x=0}$.

Bemerkung (Faltung von Distributionen):
Die **Faltung** zweier Funktionen ist definiert durch

$$\boldsymbol{(f * g)(x)} := \int f(y) \cdot g(x-y)\, dy$$

Sie besitzt einige interessante Eigenschaften, wie zum Beispiel

$$\begin{aligned}
&f * g = g * f && \text{(Kommutativität)}\\
&f * g * h = (f * g) * h = f * (g * h) && \text{(Assoziativität)}\\
&f * (g + h) = (f * g) + (f * h) && \text{(Distributivität)}\\
&D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g = f * D^\alpha g && \text{(Ableitungsregel)}
\end{aligned}$$

Näheres dazu ist in den Aufzeichnungen zur letzten Übung zu finden.
Auch hier lässt sich eine natürliche Erweiterung auf Distributionen finden. Man definiert die Faltung einer Distribution T mit einer Funktion φ durch:

$$(T * \varphi)(x) := \langle T, \varphi(x - \cdot)\rangle \in \mathbb{C}$$

Für Distributionen $T, S \in \mathcal{D}'$ mit kompakten Träger kann man ebenfalls die Faltung (mit samt ihren Eigenschaften) definieren. Ein entscheidendes Resultat ist die Neutralität der Deltadistribution bezüglich der Faltung:

$$T * \delta = \delta * T = T$$

Beispiel (Anwendung der Faltung):
Betrachtet man die Aufgabe der Lösung der **Poisson-Gleichung** $\boldsymbol{\Delta u = f}$, so ist aus obigen Überlegungen bekannt, dass $\widetilde{E}_n$ eine Fundamentallösung der homogenen Variante (**Laplace-Gleichung**) ist. Es gilt also $\Delta \widetilde{E}_n = \delta$.
Setzt man nun (falls möglich) $u := \widetilde{E}_n * f$, so gilt

$$\Delta u = \Delta(\widetilde{E}_n * f) = \Delta \widetilde{E}_n * f = \delta * f = f$$

Damit löst das so genannte **Newton-Potential**

$$u(x) = \widetilde{E}_n * f = -\frac{1}{(n-2)|\omega_n|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy \qquad \text{mit } \operatorname{supp}(f) \text{ kompakt}$$

die Poisson-Gleichung $\Delta u = f$.

Literaturverzeichnis

[Werner] FUNKTIONALANALYSIS von Dirk Werner
(Springer Verlag Berlin, 6. Auflage, 2007)

[Heuser] LEHRBUCH DER ANALYSIS, TEIL 2 von Harro Heuser
(Teubner B.G. GmbH, 10. Auflage, 1998)

Index

V

W