Vorlesung Mathematik für Informatiker 3 Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. Dr. Linde

WS 2002/2003

Vorwort

Dieses Skript ist im Rahmen des Projekts „Vorlesungsskripte der Fakultät für Mathematik und Informatik“ entstanden und wird im Rahmen dieses Projekts weiter betreut. Das Skript ist nach bestem Wissen und Gewissen entstanden. Dennoch garantiert weder der auf der Titelseite genannte Dozent, noch die Mitglieder des Projekts für dessen Fehlerfreiheit. Für etwaige Fehler und dessen Folgen wird von keiner der genannten Personen eine Haftung übernommen. Es steht jeder Person frei, dieses Skript zu lesen, zu verändern oder auf anderen Medien verfügbar zu machen und es an andere zu verteilen, solange ein Verweis die Internetadresse des Projekts `http://uni-skripte.lug-jena.de/` *enthalten ist.*

Diese Ausgabe trägt die Versionsnummer 1700 und ist vom 21. Oktober 2008. Eine aktuellere Ausgabe könnte auf der oben genannten Internetseite verfügbar sein.

Jeder ist dazu aufgerufen, Verbesserungen, Erweiterungen und Fehlerkorrekturen für das Skript einzureichen bzw. zu melden oder selbst bzw. zu melden oder selbst einzupflegen – einfach eine E-Mail an die Mailingliste `<uni-skripte@lug-jena.de>` *senden. Weitere Informationen sind unter der oben genannten Internetadresse des Projekts verfügbar.*

Hiermit möchten wir allen Personen, die an diesem Skript mitgewirkt haben, vielmals danken:

- *Christian Raschka* `<chrisra@informatik.uni-jena.de>` *(2003)*
- *Matti Bickel* `<cat5@minet.uni-jena.de>` *(2005)*
- *Stefan Tilchner* `<muuhkuh87@web.de>` *(2008)*

Inhaltsverzeichnis

1 Das Modell der Wahrscheinlichkeitstheorie

1.1 Der Wahrscheinlichkeitsraum

WT = Mathematisches Modell zur Beschreibung von Versuchen mit zufälligem Ergebnis, von Zufallsexperimenten und von zufälligen Erscheinungen.

- kein philosophischer Ansatz
- Modell vs. Realität? (nie 100%)
- Versuch mit zufälligem Ergebnis $\widehat{=}$ bei identischer Versuchsanordnung sind verschiedene Ergebnisse möglich (nicht vorhersehbar)
- Zufallsexperiment $\widehat{=}$ gezieltes Experiment und Aussagen über den wahren Sachverhalt zu bekommen.
  Beobachtung = Stichprobe (Statistisches Experiment)
- zum Beipiel Meinungsforschung, Gütekontrolle o.ä.
- zufällige Erscheinung $\widehat{=}$ Dinge der realen Welt, die anscheinend völlig gesetzlos auftreten, zum Beispiel Anzahl Anrufe in einem Callcenter an einem Tag, Ausfallszeit eines Bauteils, Anzahl der Verkehrsunfällen in einer Stadt pro Tag, Brände usw.
- Zwei Typische Beispiele
  1. Würfeln:
     - Einmaliges Würfeln:
       Ergebnis, zufällige Zahl aus $\{1, \ldots, 6\}$
     - n-maliges Würfeln:
       Ergebnis, zufälliger Vektor, Länge n, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \quad \omega_j \in \{1, \ldots, 6\}$
  2. Lebensdauer eines Bauteils, Lebewesens
     Zum Zeitpunkt 0 nehmen wir Bauteil in Betrieb
     Zum zufälligen Zeitpunkt $t > 0$ Ausfall des Bauteils
     Zufall: $t > 0$; Beobachten zufällige reelle zahl $t \in [0, \infty)$.

Axiom 1.1
Vorgänge, bei denen zufällige Erscheinungen auftreten, werden durch einen Wahrscheinlick-eitsraum

$$\Bigg(\underbrace{\Omega}_{Grundraum},\ \underbrace{\mathcal{A}}_{Ereignis-\sigma-Algebra},\ \underbrace{\mathbb{P}}_{Wahrscheinlichkeitsmaß}\Bigg)$$

beschrieben.

1.1.1 Grundraum Ω

Der Raum der Elementarereignisse Ω enhält (mindestens) alle möglichen Versuchsausgänge. Aus mathematischen Gründen wählt man manchmal Ω größer.

Beispiel 1

1. *Einmaliges Würfeln:*
   $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ *möglich wäre* $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$ *oder* $\Omega = \mathbb{R}$,
   nicht möglich $\Omega = \{1, \dots, 5\}$
2. *n-maliges Würfeln:*
   $\Omega = \{1, \dots, 6\}^n = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_j \in \{1, \dots, 6\}\}$

Beispiel 2
Urne mit weißen und schwarzen Kugeln
Man ziehe zwei Kugeln
$\Omega = \{(s, s), (s, w), (w, s), (w, w)\}$
Interesse Anzahl weiße Kugeln: $\Omega = \{0, 1, 2\}$

Beispiel 3
Würfeln bis erste Sechs
Registriere die Anzahl der Würfeldauer
$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}_0$

Beispiel 4
Lebensdauer eines Bauteils
$\Omega = [0, \infty)$

Definition 1.2
Eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ *heißt Ereignis.*
$\omega \in \Omega$ *wurde beobachtet:*

- $\omega \in A$, *d.h. A ist eingetreten*
- $\omega \notin A$, *d.h. A ist nicht eingetreten*

Beispiel 5
Sei $\Omega = \{1, \dots, 6\} \quad A = \{2, 4, 6\}$
Würfel zeigt „Drei“ $\curvearrowright$ *A ist nicht eingetreten!*

Die einpunktigen Teilmengen von Ω heißen Elementarereignisse!
Sei $\Omega = \{1, \dots, 6\}$
Ereignisse: $\emptyset$, $\underbrace{\{1\}, \dots, \{6\},}_{Elementarereignisse}$ $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \Omega$

Beispiel 6
Lebensdauer eines Bauteils $\quad A = [0, \infty)$
A ist eingetreten $\Leftrightarrow$ *Bauteil arbeitet mindestens 100 Zeiteinheiten* $\Leftrightarrow$ *Zum Zeitpunkt 100 ist es noch nicht defekt! Ein Elementarereignis* $\{\omega_0\}$ *tritt ein* $\Leftrightarrow$ ω_0 *beobachtet wird.*

Eigenschaften

1. Ω tritt stets ein $\curvearrowright$ sicheres Ereignis
2. $\emptyset$ tritt niemals ein $\curvearrowright$ unmögliches Ereignis
3. $A, B \subseteq \Omega$; $A \cup B$ tritt ein $\Leftrightarrow$ A oder B tritt ein
4. $A \cap B$ tritt ein $\Leftrightarrow$ A und B treten ein
5. A^C (Komplement)$= \Omega \backslash A$ tritt ein $\Leftrightarrow$ A tritt nicht ein

Zusammenfassung:
Der Grundraum Ω besteht aus allen möglichen Versuchsausgängen. Die Teilmengen treten ein, gdw. ein Element der Teilmenge beobachtet wird.

1.1.2 Wahrscheinlichkeitsmaß und Ereignis-σ-Algebra

Der Zufall unterliegt gewissen Gesetzmäßigkeiten. Ereignisse treten nicht völlig willkürlich ein, sondern mit gewisser Wahrscheinlichkeit.
Ziel:
Jedem Ereignis $A \subseteq \Omega$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A)$ zuordnen.
$0 \geq \mathbb{P}(A) \geq 1$
$\mathbb{P}(A) = 0$, d.h. Wahrscheinlichkeit des Eintretens A ist Null.
$\mathbb{P}(A) = 1$, d.h. A tritt sicher ein

Beispiel 1
$\Omega = \{1, \dots, 6\}$, *Würfel sei fair*
$A = \{1\} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{1}{6} \quad A = \{2, 5\} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{2}{3} \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1$
Was bedeutet $\mathbb{P}(\{2, 5\}) = \frac{1}{3}$ *?*

Beispiel 2
Krankheit X: Überlebenschance ist $\frac{1}{2}$! Was bedeutet das?

$\mathbb{P}(A)\widehat{=}$ mathematische Abstraktion für den Grenzwert der relativen Häufigkeiten r_n
n-unabhängige Versuche:

$$r_n := \frac{\sharp \text{ Versuche, bei denen } A \text{ eingetreten ist}}{n}$$

$r_n \to \mathbb{P}(A)$
Bestimmung von $\mathbb{P}(A)$:

1. Theoretische Überlegung: (z.B. Symmetrie)
2. Statistische Untersuchung
3. Subjektive Annahme aufgrund von Erfahrungen

Ziel:
Abbildung $\mathbb{P} : \mathfrak{R}(\Omega) \to [0,1]$, die jedem Ereignis $A \subseteq \Omega$ die Wahrscheinlichkeit seines Eintretens zuordnet.
Welche Eigenschaft sollte $\mathbb{P}$ besitzen?

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. $A \cap B = \emptyset \to \mathbb{P}(A \cup B) \stackrel{!}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (endliche Additivität)
   $\Rightarrow A_1, \ldots, A_n : A_i \cap A_j = \emptyset; i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_J)$
   endliche Additivität reicht nicht aus.

Beispiel 3
Würfeln bis erste Sechs
$A_n :=$ {*Erste Sechs erscheint in* $(n+1)$*-ten Versuch*} $; n = 0, 1, \ldots$
Frage: Wahrscheinlichkeit von $B :=$ {*erste Sechs nach ungerader Wurfzahl*}

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_{2n}) \stackrel{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_{2n})$$

Definition 1.3
$\mathbb{P} : \mathfrak{R}(\Omega) \to [0,1]$ *heißt* σ*-additiv, wenn für* $A_1, A_2, \ldots$ *mit* $A_i \cap A_j \emptyset; i \neq j$*, stets*

$$\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{\mathbb{P}(A_j)}^{\infty}$$

folgt.

Problem: Ω „groß" z.B. $\Omega = \mathbb{R}$, dann existiert keine solche Abbildung Lösung: Teilsystem $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{R}(\Omega)$ und man definiert $\mathbb{P}(A)$ nunmehr nur für Mengen $A \in \mathcal{A}$, d.h. nicht alle Ereignisse besitzen eine Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens.
$\mathcal{A}$ sollte die „wichtigen" Teilmengen enthalten, z.B. alle Intervalle, Punkte usw.

Definition 1.4
$\mathcal{A}$ heißt σ-Algebra, wenn

1. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \curvearrowright A^C \in \mathcal{A}$
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \curvearrowright \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$

Eigenschaften:

1. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \quad \curvearrowright \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$
   Beweis: $A_1, A_2, \dots \quad \curvearrowright \quad A_1^C, A_2^C, \dots \in \mathcal{A} \quad \curvearrowright \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^C \in \mathcal{A} \quad \curvearrowright$ $(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^C)^C \in \mathcal{A} \quad \curvearrowright \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$; $\square$
2. $A, B \in \mathcal{A} \quad \curvearrowright \quad A \cup B \in \mathcal{A}$
   Beweis: $A_1 := A, A_2 := B, A_3 := \emptyset, A_4 := \emptyset, \dots \quad \curvearrowright \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$ $\curvearrowright \quad A_1 \cup A_2 = A \cup B$; $\square$

Definition 1.5 (Wahrscheinlichkeitsraum$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$)
Grundraum $\Omega \neq \emptyset$
$\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{R}(\Omega) - \sigma$-Algebra
$\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ mit $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\Omega) = 1$, und $\mathbb{P}$ ist σ-additiv!

Beispiel 4
Modell des Würfelns:

$$(\{1, \dots, 6\}, \mathfrak{R}, \mathbb{P})$$
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\sharp(A)}{6}$$

Versuch mir zufälligem Ausgang;
Aufgabe : Man finde das passende Modell!

1.2 Einfache Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

Satz 1.1

1. *Sind* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ *disjunkt, so folgt* $\mathbb{P}(\bigcup_j^n A_j) = \sum_j^n \mathbb{P}(A_j)$ <u>*endliche Additivität*</u>
2. $A \subseteq B \curvearrowright \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ <u>*Monotonie*</u>
3. $A \subseteq B \curvearrowright \mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
4. $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$
5. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \curvearrowright \mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^\infty A_j) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$ *(Stetigkeit von unten)*
6. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \curvearrowright \mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^\infty A_j) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$ *(Stetigkeit von oben)*

<u>*Beweis:*</u>

1. $B_1 := A_1; B_2 := A_2; \ldots; B_n := A_n; \qquad B_{n+1} := \emptyset; B_{n+2} : \emptyset; \ldots;$
   $B_i \cap B_j = \emptyset; i \neq j;$
   $\curvearrowright \underline{\sigma - Add.:}$

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j)}_{=} & = & \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_j)}_{=} \\ \mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) & = & \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j) + \underbrace{\mathbb{P}(\emptyset) + \ldots}_{=0} \end{array}$$

2. $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \backslash A) \geq \mathbb{P}(A)$
3. $B = \underbrace{A \cup (B \backslash A)}_{disjunkt} \curvearrowright^{(1)} \qquad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \backslash A)$
   siehe Abbildung 1.1
4. $\Omega = A \cup A^C \qquad \mathbb{P}(\Omega) = 1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^C)$

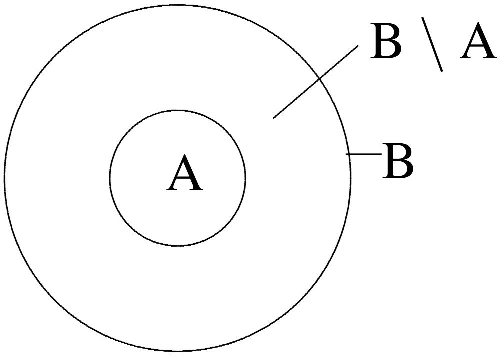


Abbildung 1.1: zu Satz 1.1 (3)

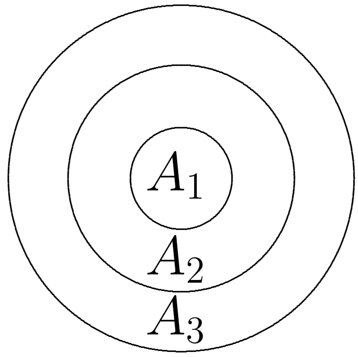


Abbildung 1.2: zu Satz 1.1 (5)

5. $A_0 := \emptyset; B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ *(Ringe), für* $n = 1, 2, \ldots$
   $\curvearrowright$ B_n *sind disjunkt &* $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n := A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$
   $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \setminus A_{n-1}) \curvearrowright^{(3)} \sum_{n=1}^{\infty} [\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})]$
   $$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} [\mathbb{P}(A_j) - \mathbb{P}(A_{j-1})] = \lim_{n\to\infty} \left[\mathbb{P}(A_n) - \underbrace{\mathbb{P}(A_0)}_{=}\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$
   siehe Abbildung 1.2

6. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \qquad A := \bigcap^{\infty} n = 1 A_n \curvearrowright A_1^C \subseteq A_2^C \subseteq \ldots$
   $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^C \overbrace{=}^{\text{de Morgan}} (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^C = A^C$
   $\curvearrowright^{(5)} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n^C)}_{=} = \mathbb{P}(A^C)$
   $1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1 - \mathbb{P}(A) \qquad \square$

1.3 Diskrete Wahrscheinlichkeitsmaße

Experiment: endlich viele der höchstens abzählbar unendlich vielen Werte können auftreten:
$\curvearrowright \Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ oder $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$

Beispiel 1
Würfel n-mal $\curvearrowright \Omega = \{1, \ldots, 6\}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \{1, \ldots, 6\}\}$

Beispiel 2
Würfel bis erste „Sechs“, Registriere Anzahl Würfe
$\curvearrowright \Omega = \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$
Man kann in beiden Fällen stets $\mathcal{A} = \mathfrak{R}(\Omega)$ *wählen!*

zu Beispiel 1:

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \qquad p_j = \mathbb{P}(\{\omega_j\}), \quad 1 \leq j \leq N.$$
$$p_j \geq 0; 1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{n} \omega_j) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_j\}) = \sum_{j=1}^{n} p_j$$
$$A \subseteq \Omega \qquad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{w_j \in A} \omega_j) = \sum_{\{j:\omega_j \in A\}} p_j$$

$\mathbb{P}$ ist Wahrscheinlickeitsmaß $\Rightarrow^{\text{eindeutig}}$ $(p_j)_{j=1}^N$ mit $p_j \geq 0; \sum_j^N p_j = 1$
Seien nunmehr $p_j \geq$ mit $\sum_j^N p_j = 1$ gegeben. Definieren nun:

Definition 1.6

$$\mathbb{P}: \quad \mathfrak{R}(\Omega) \to [0,1]$$

durch

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{w_j \in A} p_j \qquad \to \mathbb{P} \quad \textit{Wahrscheinlichkeitsmaß}$$

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ $\quad \{\mathbb{P} : \mathbb{P}$ Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\Omega\}$
$\Leftrightarrow$
$\left\{(p_j)_{j=1}^N : p_j \geq 0; \quad \sum_{j=1}^N p_j = 1\right\}$
„$\Rightarrow$“ $\quad p_j := \mathbb{P}(\{\omega_j\})$ $\qquad$ “$\Leftarrow$“ $\quad \mathbb{P}(A) := \sum_{\omega_j \in A} p_j$

Beispiel 3
$\Omega = \{1, \dots, 6\}$
Wahrscheinlichkeitsmaße auf Ω *entsprechen eineindeutig Zahlen* $p_1, \dots, p_6 \geq 0;$
$p_1 + \ldots + p_6 = 1$

Würfel(fair):	$p_1 = \ldots = p_6 = \frac{1}{6}$
Würfel(unfair):	$p_1 = p_2 = p_5 = 0; p_3 = p_4 = \frac{1}{4}; p_6 = \frac{1}{2}$
Frage:	$\mathbb{P}(\{1,2,3\}) = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}(\{4,6\}) = \frac{3}{4}$

zu Beispiel 2:
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ $\qquad p_j = \mathbb{P}(\{\omega_j\}), j = 1, 2, \dots$ $\qquad p_j \geq 0; \quad \sum_{j=1}^\infty p_j = 1$
$\mathbb{P} \Rightarrow (p_j)_{j=1}^\infty; p_j \geq 0; \sum_{j=1}^\infty p_j = 1$
Seien nun $(p_j)_{j=1}^\infty$ mit diesen Eigenschaften gegeben:

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega_j \in A} p_j$$

$\curvearrowright$ $\mathbb{P}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{R}(\Omega)$

Beispiel 4
$\Omega = \{1, 2, \dots\}$ $\quad p_j := \frac{1}{2^j}; \curvearrowright p_j \geq 0; \curvearrowright \sum_{j=1}^{\infty} p_j = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$
$\mathbb{P}(A) := \sum j \in A \frac{1}{2^j}$; *Erzeugendes Wahrscheinlichkeitsmaß*
$A = \{2, 4, 6, \dots\}$ $\quad \mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}$
$\mathbb{P}(\{2, 3, 4, \dots\}) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^j}$ $\quad$ *besser:* $1 - \mathbb{P}(\{1\}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Allgemeiner: Ω beliebig; $D \subseteq \Omega$ mit $D = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ oder $D = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, so daß $\mathbb{P}(D) = 1$. Dann heißt D diskret.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap D) = \sum_{\omega_j \in A} \mathbb{P}(\omega_j)$$

Beispiel 5
$\Omega = \mathbb{R}$ $\quad D = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\quad$ *Sei* $\mathbb{P}(D) = 1 \curvearrowright \mathbb{P}$*diskret.*

1.4 Wichtigste diskrete Wahrscheinlichkeitsmaße

a) Einpunktverteilung:

$$\Omega \text{ beliebig; } \omega_0 \in \Omega \text{ fest.} \quad \mathbb{P}(A) = \begin{cases} 1 : \omega_0 \in A \\ 0 : \omega_0 \notin A \end{cases}$$

$\curvearrowright \mathbb{P}$ ist Einpunktverteilung in ω_0 („Dirac"-Maß)
$D := \{\omega_0\} \curvearrowright \mathbb{P}(D) = 1$ diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß$\mathbb{P}(\{\omega_0\}) = 1$; das heißt mit Wahrscheinlichkeit von 1 tritt ω_0 ein: Deterministisches Experiment

b) Zweipunktverteilung:
$\Omega = \{0, 1\}$ $\quad \mathbb{P}(\{1\}) = p, \quad 0 \geq p \geq 1$ $\quad \mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p$

c) Klassische Verteilung bzw. Gleichverteilung

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$$

Alle Elemtarereignisse sind gleichwahrscheinlich. $\curvearrowright p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{N}$
$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_j \in A} p_j = \frac{1}{N} \sum_{\omega_j \in A} 1 = \frac{1}{N} card(A) = \frac{\sharp(A)}{N}$
$\mathbb{P}$ nennt man Gleichverteilung auf Ω
Merkregel:

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle für A}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}} = \frac{\sharp(A)}{\sharp(\Omega)}}$$

Beispiel 1
Werfe n-mal faire Münze (0,1) $\Omega = \{0,1\}^N$ *Alle Folgen von 0 und 1 sind gleichwahrscheinlich*
$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{2^N}$ $\quad A := \{$*1. Wurf 0*$\}$ $\quad\curvearrowright\quad \sharp(A) = 2^{N-1} \quad\curvearrowright\quad \mathbb{P}(A) = \frac{2^{N-}}{2^N} = \frac{1}{2}$
$B := \{$*Genau k-mal „Eins“*$\}$ $\quad \sharp(B) = \binom{n}{k} \quad\curvearrowright\quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2^N}\binom{n}{k}$

Beispiel 2
6 aus 49 $\curvearrowright \quad \Omega = \big\{\{x_1,\dots,x_n\}\,; x_j \in \{1,\dots,49\}\,; x_i \neq x_j; i \neq j\big\}$
$\sharp(\Omega) = 49 \cdot 48 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ $\qquad$ *Tippe 6 Zahlen* $t_1,\dots,t_6$
$A := \{$*6 Richtige*$\}$ $\qquad \sharp(A) = 6! \quad\curvearrowright\quad \mathbb{P}(A) = \frac{6!}{49\cdot\ldots\cdot 44} = \frac{1}{\binom{49}{6}} \approx 7,151 \cdot 10^{-8}$

Beispiele aus der Physik
N Kästen, n Teilchen, $n \leq N$
Verteile Teilchen auf die Kästen so, dass alle Verteilungen gleichwahrscheinlich sind.

Fall I: *(Boltzmann-Statistik)*
Teilchen tragen Namen (unterscheidbar)

Fall II: *(Bose-Einstein-Statistik)*
Teilchen sind anonym

Fall III: *(Fermi-Dirac-Statistik)*
Teilchen sind anonym und maximal 1 Teilchen pro Kasten

$A := \{$In n vorgegebenen Kästen $K_1,\dots,K_n$ befindet sich genau ein Teilchen$\}$
$B := \{$In keinem Kasten ist mehr als ein Teilchen$\}$

Zu Fall I: Boltzmann-Statistik (Teilchen tragen Namen)
$\Omega = \big\{(a_1,\dots,a_n); a_j \in \{1,\dots,N\}\big\}$
$(a_1,\dots,a_n)$ ist eingetreten $\Leftrightarrow$ Teilchen k im Kasten a_k(für $k = 1,\dots,N)$

$$\sharp(\Omega) = N^n$$

Günstig für A: Ist $(K_1,\dots,K_n)$ und alle Permutationen davon

$$\sharp(A) = n! \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{n!}{N^n}$$

Man kann $\binom{N}{m}$ Kästen $K_1, \dots, K_n$ vorher auswählen

$$\curvearrowright \quad \mathbb{P}(B) = \binom{N}{n}\mathbb{P}(A) = \binom{N}{n}\left(\frac{n!}{N^n}\right) = \frac{N!}{(N-n)!N^n}$$

Zu Fall II: <u>Bose-Einstein-Statistik</u> (Teilchen anonym)

N Kästen $\Leftrightarrow n-1$ Trennwände (2 äußere Trennwände fest)
Alle Anordnungen von $N-1$ Trennwände und n Teilchen

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_{N+n-1})\} \qquad n \text{ der } \omega_j \text{ sind Teilchen, N-1 Trennwände}$$

$\curvearrowright \sharp(\Omega) = (N+n-1)! \qquad \sharp(A) = n!(N-1)! \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{n!(N-1)!}{(N+n-1)!}$
$\curvearrowright \mathbb{P}(B) = \binom{N}{n}\mathbb{P}(A) = \frac{N!(N-1)!}{(N-m)!(N+n-1)!}$

Zu Fall III: <u>Fermi-Dirac-Statistik</u> (Teilchen anonym, max. ein Teil pro Kasten)

$$\Omega = \big\{(k_1, \dots, k_n) : 1 \leq k_j \leq N; \quad k_i \neq k_j; \quad i \neq j\big\}$$

$(k_1, \dots, k_j)$ tritt ein gdw. in den Kästen $k_1, \dots, k_j$ befindet sich genau ein Teilchen

$$\sharp(\Omega) = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot (N-n+1)$$

Günstig für A: $(k_1, \dots, k_n)$ und alle Permutationen davon $\quad \curvearrowright \quad \sharp(A) = n!$

$$\curvearrowright \quad \mathbb{P}(A) = \frac{n!}{N \cdot \ldots \cdot (N-n+1)} = \frac{1}{\binom{N}{n}}; \quad \mathbb{P}(B) = \binom{N}{n}\frac{1}{\binom{N}{n}} = 1$$

d) <u>Binominialverteilung:</u>
Modell: In jedem Versuch ist das Resultat entweder Null oder Eins
Die Wahrscheinlichkeit einer „1“ ist: $p \in [0,1]$ und „0“ mit $1-p$
Es gibt n unabhängige Versuche. Wir suchen die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(k-mal1)$

$$\mathbb{P}(k-mal1) \overbrace{=}^{\text{später}} \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$
$$\Omega = \{0, \dots, n\} \qquad 0 \leq p \leq 1;$$
$$\boxed{B_{n,p}(\{k\}) := \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}; \quad k = 0, \dots, n}$$

zu zeigen: $B_{n,p}(\{k\}) \geq 0$ (klar), bleibt zu zeigen:

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,p}(\{k\}) = 1$$

Mit dem binomischen Satz gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$$

$\curvearrowright$ $B_{n,p}$ ist Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω: Binominialverteilung mit Parametern n,p.
$n = 1$ $\quad \curvearrowright \Omega(\{0,1\})$ $\quad B_{1,p} = 1-p$ $\qquad B_{1,p}(\{1\}) = p$: Zweipunktverteilung
$n \geq 4$ $\qquad A = \{0,1,2\}$ $\quad B_{n,p}(A) = (1-p)^n + np(1-p)^{1 \cdot n} + \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$

e) Hypergeometrische Verteilung
Lieferung von N-Geräten. Davon sind $M \leq N$ defekt. Entnehme aus der Lieferung zufällig $n \leq N$ Geräte und prüfe sie. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}($Genau m der geprüften Geräte sind defekt$)$. Insgesamt $\binom{N}{n}$ Möglichkeiten, Geräte zu entnehmen. Damit davon genau m defekt sind, m Geräte aus den M defekten entnehmen, n-m Geräte aus den N-M nicht defekten.

$$\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m} \text{ Möglichkeiten}$$

Ansatz:

$$\mathbb{P}(\{m\}) := \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}; \quad m = 0, \dots, n$$

$\Rightarrow$ Hypergeometrische Verteilung mit Parametern N,M,n.
z. z.

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m} = \binom{N}{N} \quad \text{Übungsaufgabe!}$$

$\curvearrowright$ $\mathbb{P}$ ist Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\Omega(\{0,\dots,n\})$ $\quad \binom{M}{m} = 0 \quad$ für $m \leq M$

f) POISSON-Verteilung:
Starten mit $B_{n,p}$ (n Versuche, Erfolgswahrscheinlichkeit p)

$$„n \to \infty, \quad p \to 0“$$

Gegeben: $\lambda > 0 \qquad p_n := \frac{\lambda}{n} \underset{n \to \infty}{\to} 0$

Satz 1.2

<u>*Poissonscher-Grenzwertsatz*</u>

$$\lambda > 0, \quad k \in \mathbb{N}_0$$
$$\lim_{n\to\infty} B_{n,\frac{\lambda}{n}}(\{k\}) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

<u>Beweis:</u>

$$\begin{aligned}
B_{n,\frac{\lambda}{n}}(\{k\}) &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{\lambda^k}{n^k}(1-\frac{\lambda}{n})^n(1-\frac{\lambda}{n})^{-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{k-mal}}(1-\frac{\lambda}{n})^n(1-\frac{\lambda}{n})^{-k} \\
&\underset{n\to\infty}{\to} \frac{\lambda^k}{k!}\cdot \qquad 1\cdot \qquad e^{-\lambda}\cdot \qquad 1 \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad \square
\end{aligned}$$

Definition 1.7
Die Abbildung P_λ *mit*

$$P_\lambda(\{k\}) := \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}; \qquad k = 0, 1, \ldots$$

heißt Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda > 0$

<u>Probe:</u> $\Omega = \mathbb{N}_0$
zu zeigen: $\sum_{k=0}^{\infty} P_\lambda(\{k\}) \overset{?}{=} 1$

$$e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$$
$$B_{n,\frac{\lambda}{n}}(\{k\}) \underset{n\to\infty}{\to} P_\lambda(\{k\})$$

Poisson-Verteilung trifft auf, wenn viele Versuche und geringe Erfolgswahrscheinlichkeiten herrschen

- Telefonzentrale, viele Teilnehmer, Wahrscheinlichkeit, dass einzelner Kunde anruft ist sehr gering
  $\Rightarrow$ ges. Zahl der Anrufe pro Tag ist *Poisson*-Verteilung

- Anzahl der Hausbrände pro Jahr

Bemerkung: $B_{n,p}(\{k\})$ schlecht berechenbar für n groß, P_λ mit $\lambda := np$ ist Approximation für $B_{n,p}$

Beispiel 1
500 Studenten, gesucht ist $\mathbb{P}($*Genau k Studenten haben am 24.12. Geburtstag)*
Exakt:

$$B_{500,\frac{1}{365}}(\{k\}) = \binom{500}{k} \frac{1}{365}^k \binom{364}{365}^{500-k}$$

Appr. Lösung: $\quad \lambda = \frac{500}{365}$

$$\mathbb{P}_\lambda(\{k\}) = \frac{\binom{500}{365}^k}{k!} e^{-\frac{500}{365}}$$

Beispiel 2
10.000 *Würfe auf ein Ziel mit Trefferwahrscheinlichkeit* $\frac{1}{1000}$, $\quad \lambda = 10$

$$\mathbb{P}_\lambda(\{k\}) = \frac{10^k}{k!} e^{-10}$$

$$\mathbb{P}_\lambda(\{0\}) = e^{-10} \approx 0,0000453\ldots$$

1.5 Stetige Verteilungen

Bauteil, Lebenszeit ist zufällig, wir registrieren den Zeitpunkt $t > 0$, an dem der Defekt eintritt. $t > 0$ ist zuf. reelle Zahl
Ziel: diesen Vorgang zu beschreiben
Hier: $\Omega = [0, \infty)$
Keinen Sinn zu fragen, nach der Wahrscheinlichkeit, dass der Ausfall zum Zeitpunkt
$t_0 > 0 \quad (t_0 = 2.000000000\ldots)$ eintritt. $\rightarrow$ wäre 0
Interesse: $\mathbb{P}($Ausfall im Zeitintervall [a,b])
Suchen: $\mathbb{P}([a,b]) = ?$

Definition 1.8
Eine Riemann-*integrierbare Funktion* $p: \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *heisst Wahrscheinlichkeitsdichte, wenn gilt:*

1) $p(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = 1$

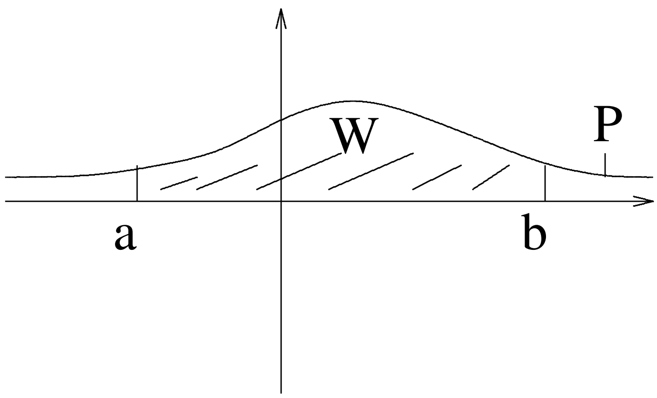


Abbildung 1.3: Definition der Wahrscheinlichkeitsdichte

Definition 1.9
Die Wahrscheinlichkeit eines Intervalls $[a, b]$ *ist*

$$\mathbb{P}([a, b]) := \int_a^b p(x)\ dx$$

p Dichte des Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$

- $\mathbb{P}([a, b]) \geq 0$
- $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\ dx = 1$

Problem: $\Omega = \mathbb{R}$, σ-Algebra ? $\mathbb{P}([a, b])$ definiert. Was ist $\mathbb{P}(A) =$? für $A \in \mathcal{A}$

Beispiel 1

$$p(x) := \begin{cases} 0 & : \quad x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & : \quad x > 0 \end{cases} \qquad \lambda > 0$$

$$p(x) \geq 0, \qquad \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\ dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = 1$$

$$\mathbb{P}([a, b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\ dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Diskrete Wahrscheinlichkeistmaße sind ungeeignet zur Beschreibung von Vorgängen, bei denen das Ergebnis eine reelle Zahl ist. Stetige Wahrscheinlichkeitsmaße:

$\Omega = \mathbb{R}$ Suchen σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{R}(\mathbb{R})$, so dass

$$\mathbb{P}: \quad \mathcal{A} \to [0,1]$$

Im Moment ist $\mathbb{P}$ nur auf $\{[a,b]: \quad a \leq b\}$ definiert.
Aussage: Ω beliebig, $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{R}(\Omega)$
Dann existiert eine kleinste $\mathcal{E}$-umfassende σ-Algebra $\mathcal{A}$.
Beweis:

$$\mathcal{A}_0 := \bigcap \left\{ \underbrace{\mathcal{A}: \quad \mathcal{A} \supseteq \mathcal{E}, \quad \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}}_{\neq\emptyset \text{ ,da } \mathfrak{R}(\Omega) \supseteq \mathcal{E}} \right\}$$

man zeigt: $\mathcal{A}_0$ ist σ-Algebra; $\mathcal{A}_0 \supseteq \mathcal{E}$
$\mathcal{L}\updownarrow(\mathbb{R})$ kleinste $\mathcal{E}$-umfassende σ-Algebra.
Ein stetiges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ lässt sich eindeutig von $\mathcal{E}$ auf $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ fortsetzen. $\to$ $(\mathbb{R}, \mathcal{L}\updownarrow(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}$ erzeugt von der Dichte p

Eigenschaften stetiger Wahrscheinlichkeitsmaße

1) Da $p(x) \geq 0 \to \int\limits_a^b p(x)\, dx \geq 0 \to \mathbb{P}([a,b]) \geq 0$
2) $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = 1$
3) $\mathbb{P}(\{a\}) = \int\limits_a^a p(x)\, dx = 0$
4) $\mathbb{P}\left((a,b)\right) = \mathbb{P}([a,b]) - \mathbb{P}(\{a\}) - \mathbb{P}(\{b\}) = \mathbb{P}([a,b])$
5) Sei $p(x) > 0 \quad$ auf $[a,b] \to \int\limits_a^b p(x)\, dx > 0$
6) Sei $p(x) = 0$ für $x \notin [a,b] \to \mathbb{P}([a,b]) = 1$

Wichtige Stetige Verteilungsgesetze

1.) Gleichverteilung auf $I = (a,b)$ Experiment: Zufälliges Ziehen einer Zahl aus $[a,b]$. Wahrscheinlichkeit dass ein Intervall eintritt hängt nur von der Länge, nicht aber von der Lage des Intervalls ab.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{|I|} & : \quad x \in I \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} \qquad ; \quad |I| = b - a$$

- $p(x) = 0$

- $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} p(x)\,dx = \frac{1}{|I|}\int\limits_{a}^{b} dx = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

$[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$

$$\mathbb{P}([\alpha,\beta]) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} p(x)\,dx = \frac{1}{ba}\int\limits_{\alpha}^{\beta} dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a} = 1$$

$\rightarrow$ Wahrscheinlichkeit ist proportional zur Länge von $[a, b]$

Abbildung 1.4: Beispiel zur Gleichverteilung

Beispiel 1
Straßenbahn fährt alle 15 Minuten. man gehe zufällig zur Strassenbahnhaltestelle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mehr als 5 Minuten zu warten?
Wahrscheinlichkeit ist $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

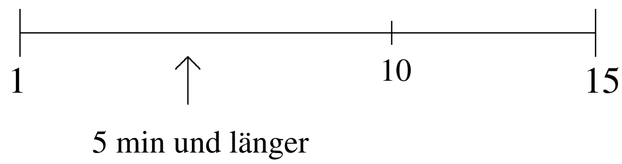


Abbildung 1.5: 2. Beispiel zur Gleichverteilung

2.) n-dimenstionale Gleichverteilung Sei $p: \quad \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, Wahrscheinlichkeitsdichte, dann gilt:

- $p(x) \geq 0; \quad x \in \mathbb{R}^n$
- $1 = \int_{\mathbb{R}^n} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots\ Int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1, \ldots, x_n$

$A \subset \mathbb{R}^n$ Quader oder Kugel oder ähnliches

$$\mathbb{P}(A) := \int\limits_{A} p(x)\,dx \quad \text{Wahrscheinlichkeitsmaß}$$

Beispiel 1
$$p(x_1, x_2) := \begin{cases} x_1 + x_2 & : \quad 0 \le x_1, x_2 \le 1 \\ 0 & : \quad \textit{sonst} \end{cases}$$
$p: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1) $\mathbb{P}(x_1, x_2) \ge 0$

2)

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 &= \int\limits_0^1\int\limits_0^1 (x_1 + x_2)\, dx_1\, dx_2 \\ &= \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{2}x_1^2 + x_1 x_2\right]_0^1 dx_2 \\ &= \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} + x_2\right) dx_2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \to p \quad \textit{ist Wahrscheinlichkeitsmaß!} \end{aligned}$$

$$A := \{(x_1 + x_2) : \quad x_1 \le x_2\}$$

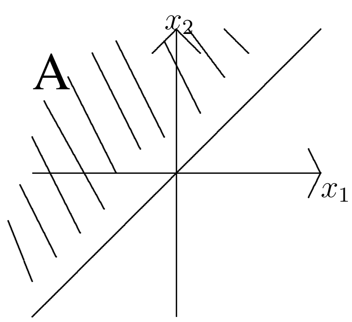


Abbildung 1.6: Fläche A

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \int\limits_{\substack{A \\ 0 \le x_1, x_2 \le 1}} (x_1 + x_2)\, dx_1\, dx_2 \\ &= \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2} (x_1 + x_2)\, dx_1\, dx_2 \\ &= \int\limits_0^1 3\frac{x_2^2}{2}\, dx_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sei nun $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Quader, Kugel oder ähnliches
$Vol_n(B)$ n-dimensionale Volumen von B
($n = 1 \to$ Länge; $n = 2 \to$ Fläche; $n = 3 \to$ Volumen ...
$p: \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$p(x) := \begin{cases} \frac{1}{Vol_n(B)} & : \quad x \in B \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

p Wahrscheinlichkeitsdichte?

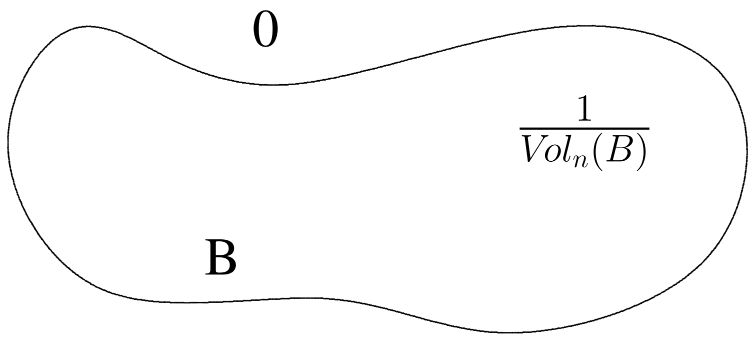


Abbildung 1.7: 2-dimensionale Gleichverteilung

1) $p(x) \geq 0$

2) $\int_{\mathbb{R}^n} p(x)\,dx = \int_B \frac{1}{Vol_n(B)}\,dx = \frac{Vol_n(B)}{Vol_n(B)} = 1$

$A \subseteq B$

$$\mathbb{P}(A) = \int\limits_A p(x)\,dx = \frac{1}{Vol_n(B)} \int\limits_A dx = \boxed{\frac{Vol_n(A)}{Vol_n(B)}}$$

$\to$ *n-dimensionale Gleichverteilung auf B von* $(A \subseteq B)$

Beispiel 1
Zwei Freunde treffen zufällig zwischen 12-13 Uhr auf dem Marktplatz ein. Jeder wartet nach Eintreffen noch 20 Minuten, dann geht er. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich beide treffen? t_1 *sei Zeitpunkt Freund*$_1$; t_2 *Zeitpunkt Freund*$_2$ *treffen ein.*
(t_1, t_2) *gleichverteilt auf* $[12, 13] \times [12, 13]$
Treffen $\Leftrightarrow \quad t_2 \leq t_1 + \frac{1}{3}$ *oder* $t_1 \leq t_2 + \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{3}$
$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$

Beispiel 2
Kugel mit Radius $R > 0$ *Gleichverteilung auf dieser Kugel*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Vol_3(A)}{\frac{4}{3}\pi\mathbb{R}^3}$$

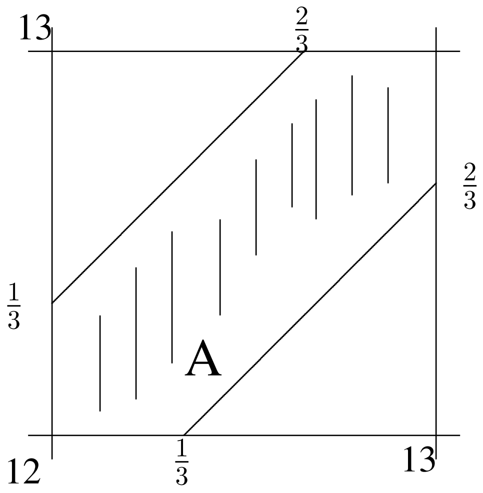


Abbildung 1.8: Fläche für das Treffen

$0 < r < R$

$$A = \left\{(x, y, z) : \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(A) = \frac{r^3}{R^3}$$

Beispiel 3
Nadeltest von Buffon (~1740)
lineares Papier und Nadel der Länge $a < 1$
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine Gerade (Linie) schneidet.

x Mittelpunkt	$0 \leq x \leq 1$
θ Winkel	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}$
	$\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Zufälliges Werfen der Nadel bedeutet:
Wähle Punkt $(x, \theta) \in [0,1] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ entsprechend der Gleichverteilung.
Nadel schneidet untere Gerade

$$\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{a}{2} \cos\theta$$

Nadel schneidet untere Gerade

$$\Leftrightarrow \quad 1 - x \leq \frac{a}{2} \cos\theta$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Vol_2(A)}{\pi} = \frac{1}{\pi} 2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a}{2} \cos\theta \, d\theta = \frac{a}{\pi} \sin\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{\pi}$$

zum Beispiel für $a = \frac{\pi}{4} \to \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$

$$r_n := \frac{\text{Anzahl der Schritte bei n Versuchen}}{n} \quad \text{(Relative Häufigkeit)}$$

$$r_n \to_{n\to\infty} \quad \to \quad \pi \approx \frac{2a}{r_n}$$

	a	n	Anzahl der Schritte	π
Wolf (1850)	0.8	5000	2532	3.160
Smith (1855)	0.6	3204	1218	3.157
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Lazzerini (1913)	$\frac{5}{6}$	3408	1808	3.142
Reinhard (1925)	0.5419	2520	859	3.179

Tabelle 1.1: Versuche zur Bestimmung der Kreiszahl Pi

3.) Normalverteilung (*Gauß-Verteilung*) .

Satz 1.3

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
a &:= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \\
a^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\, dx\, dy \\
x &= r\cos\theta & 0 < r < \infty \\
y &= r\sin\theta & 0 \le \theta < 2\pi \\
dx\, dy &= r\, dr\, d\theta \\
\to a^2 &= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_{0}^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr \\
&= 2\pi \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty} = 2\pi \\
\to a &= \sqrt{2\pi} \qquad \square
\end{aligned}$$

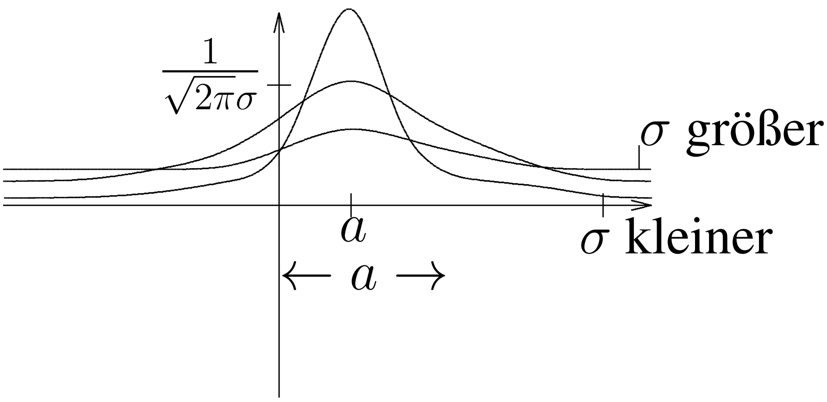


Abbildung 1.9: Normalverteilung

$$\boxed{\begin{gathered} a, x \in \mathbb{R}; \quad \sigma > 0 \\ \mathbb{P}_{a,\sigma^2}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-\frac{1}{2}(x-a)^2}{\sigma^2}} \end{gathered}}$$

Behauptung:
$\mathbb{P}_{a,\sigma^2}$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte!
$\mathbb{P}_{a,\sigma^2}(x) \geq 0$ klar, da $e^x > 0; \forall x \in \mathbb{R}$
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-\frac{1}{2}(x-a)^2}{\sigma^2}}$
Substitution: $y := \frac{x-a}{\sigma} \quad dx = \sigma\ dy$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\ \sigma\ dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy}_{=\sqrt{2\pi}} = 1$$

Definition 1.10
$\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ heißt das von $\mathbb{P}_{a,\sigma^2}$ erzeugte Wahrscheinlichkeitsmaß, d.h.

$$\mathcal{N}(a, \sigma^2)([\alpha, \beta]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{\frac{-\frac{1}{2}(x-a)^2}{\sigma^2}}\ dx$$

$\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ Normalverteilung mit Erwartungswert $a \in \mathbb{R}$ und Varianz $\sigma^2 > 0$

$\mathcal{N}(0, 1)$ heißt Standardnormalverteilung und hat die Dichte $\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ (Wichtigstes Wahrscheinlichkeitsmaß!)

4.) Exponentialverteilung .

$$\lambda > 0; \quad p(x) := \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & : \quad x > 0 \\ 0 & : \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Behauptung:
p ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte:

1) $p(x) \geq 0$ (klar)

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\ dx = \int\limits_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\ dx = \lambda \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{\infty} = 1$

Das erzeugte Wahrscheinlichkeitsmaß E_λ heißt Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$

$$E_\lambda([\alpha, \beta]) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \lambda e^{-\lambda x}\ dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_\alpha^\beta = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta} \quad (\alpha \geq 0)$$

$E - lambda$ wird verwendet zur Beschreibung von Lebensdauerverteilungen (ohne Altern).

Beispiel 1
Lebensdauer eines Bauteils sei Exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = \frac{1}{2}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil zum Zeitpunkt $t > o$ noch funktioniert?

$$A := \{\textit{arbeitet zum Zeitpunkt } t\} = \{\textit{Ausfall nach } t\} = (t, \infty)$$

$$\mathbb{P}(A) = E_{\frac{1}{2}}((t, \infty)) = e^{-\frac{t}{2}} - 0!$$

1.6 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Urne mit 4 weißen und 3 schwarzen Kugeln. Man ziehe 2 Kugeln ohne Zurücklegen. $\Omega = \{(s,s), (s,w), (w,s), (w,w)\}$
Wir suchen z.B. $\mathbb{P}(\{(s,w)\}) = ?$
$A :=$ {Erste Kugel schwarz} $= \{(s,s), (s,w)\}$
$B :=$ {Zweite Kugel weiß} $= \{(w,w), (s,w)\}$
Was ist berechenbar?

1) $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{7}$

2) $\mathbb{P}(B)$ unter der Bedingung, dass A eingetreten ist $= \mathbb{P}(A|B)$

$$\mathbb{P}(\{(s,w)\}) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{7}$$

Definition 1.11
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum;* $\quad B \in \mathcal{A}$ *mit* $\mathbb{P}(B) > 0$, *dann ist*

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von A, unter der Bedingung, dass B bereits eingetreten ist.

Beispiel 1
$E_\lambda([0,5])|[2,\infty])$
Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen vor Erreichen des Alters 5 stirbt, unter der Bedingung, mindestens 2 Jahre alt geworden zu sein:

$$\frac{E_\lambda([0,5] \cap [2,\infty])}{E_\lambda([2,\infty])} = \frac{e^{-2\lambda} - e^{-5\lambda}}{e^{-2\lambda}} = 1 - e^{-3\lambda} = E_\lambda([0,3])$$

ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein neugeborenes Teilchen höchstens 3 Jahre alt wird. (nicht altert)

Satz 1.4

1) *Die Zuordnung* $A \to \mathbb{P}(A|B)$ *ist Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $(\Omega, \mathcal{A})$
2) $\mathbb{P}(B|B) = 1; \quad \mathbb{P}(B^C|B) = 0$

Beweis:

1) $\mathbb{P}(\emptyset|B) = \frac{\mathbb{P}(\emptyset \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 0$
   $\mathbb{P}(\Omega|B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$
   $A_1, A_2, \ldots$ disjunkt $\to$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j|B) &= \frac{\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \cap B))}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j|B) \\ &\to \sigma - \text{Addidivität} \to (1)\end{aligned}$$

2)

$$\mathbb{P}(B|B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$

$$\mathbb{P}(B^C|B) = \frac{\mathbb{P}(B^C \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(B)} = 0$$

Beispiel 2
Gegeben sind zwei Urnen U_1 und U_2. In der ersten Urnen befinden sich zwei weiße und eine schwarze Kugel, in der zweiten eine weiße und zwei schwarze Kugeln, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Urne gezogen wird gleich $\frac{1}{3}$, die der zweiten gleich $\frac{2}{3}$ ist. Als erstes wird eine Urne ausgewählt und dann eine Kugel aus dieser Urne gezogen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Kugel weiß ist.
$\Omega = \{w_1, w_2, s_1, s_2\}$ *mit* w_1 *ist aus* U_1
$U_1 = \{w_1, s_1\} \qquad U_2 = \{s_2, w_2\} \qquad W = \{w_1, w_2\} \qquad S = \{s_1, s_2\}$
$\mathbb{P}(U_1) = \frac{1}{3} \qquad \mathbb{P}(U_2) = \frac{2}{3} \qquad \mathbb{P}(W|U_1) = \frac{2}{3} \qquad \mathbb{P}(W|U_2) = \frac{1}{3}$
Wir suchen $\mathbb{P}(W)$
$\Omega = U_1 \cup U_2$
$\mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(U_1) \cdot \mathbb{P}(W|U_1) + \mathbb{P}(U_2) \cdot \mathbb{P}(W|U_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$

Beispiel 3
Nun umgekehrte Fragestellung:
Wir haben weiß beobachtet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Kugel aus Urne U_1 stammt?
Wir suchen also die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(U_1|W)$
Am Anfang vorgegebene Wahrscheinlichkeiten für U_1, U_2
$\rightarrow$ a priori *Wahrscheinlichkeit (in unserem Fall $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$)*
Versuch durchgeführt und weiß beobachtet:
$\mathbb{P}(U_1|W) \qquad \mathbb{P}(U_2|W) \qquad \rightarrow$a posteriori *Wahrscheinlichkeit*
Allgemeine Situation:
$\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_j$ *(disjunktiv)*
$\mathbb{P}(B_1), \ldots, \mathbb{P}(B_n)$ *a priori Wahrscheinlichkeiten*
$A \in \mathcal{A}$ *eingetreten*
$\mathbb{P}(B_1|A), \ldots, \mathbb{P}(B_n|A)$ *a posteriori Wahrscheinlichkeiten*

Satz 1.5 (Formel über die totale Wahrscheinlichkeit)
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \quad B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$
$\mathbb{P}(B_j) > 0, \quad$ *disjunkt und* $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j := \Omega$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_j) \cdot \mathbb{P}(A|B_j)}$$

Beweis:
$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_j) \cdot \mathbb{P}(A|B_j) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_j) \cdot \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B_j)} = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(\underbrace{A \cap B_j}_{\text{disjunkt}}) = \mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{n} (A \cap B_j))$

$= \mathbb{P}(A \cap \underbrace{\bigcup_{j=1}^{n} B_j}_{\text{nach Vorr.}=\Omega}) = \mathbb{P}(A) \qquad \square$

Satz 1.6 (Formel von Bayes)

$$\boxed{\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(B_j) \cdot \mathbb{P}(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A|B_i)}}$$

Beweis:
$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(A|B_j)$
$\rightarrow$ Rechte Seite $= \frac{\mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(A|B_j)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B_j)\cdot\frac{\mathbb{P}(A\cap B_j)}{\mathbb{P}(B_j)}}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A\cap B_j)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B_j|A) \qquad \square$
Bemerkungen:

1) Kennt man bereits $\mathbb{P}(A)$, so vereinfacht sich obige Formel:

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(A|B_j)}{\mathbb{P}(A)}$$

2) $\Omega = B \cup B^C$

$$\boxed{\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(B^C)\mathbb{P}(A|B^C)}}$$

Beispiel 4 (TBC-Test)
Person hat TBC $\rightarrow$ Test ist in 96% der Fälle positiv
Person hat kein TBC $\rightarrow$ Test ist in 94% der Fälle negativ
0.4% *der Bevölkerung hat TBC.*
Wir suchen Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Person mit positiven Test wirklich TBC hat?
$A := \{$*Test positiv*$\}; \quad B := \{$*Person hat TBC*$\}$ *Wir suchen* $\mathbb{P}(B|A)$*!*
$\mathbb{P}(B) = 0.004 \quad \rightarrow \quad \mathbb{P}(B^C) = 0.996$
$\mathbb{P}(A|B) = 0.96; \qquad \mathbb{P}(A|B^C) = 0.06$
$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)+\mathbb{P}(B^C)\mathbb{P}(A|B^C)} = \frac{0.004\cdot 0.96}{0.004\cdot 0.96+0.996\cdot 0.06} = 0.06$
Nur 6% der positiv getesteten Personen haben TBC.

1.7 Unabhängigkeit von Ereignissen

Ziel: Mathematische Formulierung der Unabhängigkeit von Ereignissen

Beispiel 5
2-maliges Würfeln
$\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}$
$\mathbb{P}$ *Gleichverteilung*
$A :=$ {*1. Wurf gerade Zahl*}
$B :=$ {*2. Wurf ist* $\geq$ *3*}
Intuitiv sind A und B unabhängig, d.h. Eintreten von B ist unabhängig davon, ob A eintritt;

$$\mathbb{P}(B|A) \overset{!}{=} \mathbb{P}(B)$$

Beispiel 6
Graswachstum und Mondphasen abhängig oder unabhängig?
$\mathbb{P}($*Gras wächst pro Tag* $\leq$ *1 cm* | *Vollmond*$) = \mathbb{P}($*Gras wächst pro Tag 1 cm*$)$
B unabhängig von A, falls $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B|A) \quad \rightarrow \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Definition 1.12
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *Wahrscheinlichkeitsraum,* $\quad A, B \in \mathcal{A}$
A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn gilt:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Satz 1.7

1) A *unabhängig* $B \Leftrightarrow B$ *unabhängig* A
2) $\emptyset, \Omega$ *sind unabhängig von jedem* $A \in \mathcal{A}$
3) A, B *unabhängig*$\rightarrow A, B^C$ *unabhängig* $\rightarrow A^C, B$ *unabhängig*

Beweis:

1) $\mathbb{P}(A \cap \emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 = \mathbb{P}(\emptyset) \cdot \mathbb{P}(A)$
   $\mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A) = 1 \cdot \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\Omega) \cdot \mathbb{P}(A)$
2) $\mathbb{P}(A \cap B^C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B^C) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \setminus A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap B^C)$

Wir wissen: B^C, A unabhängig $\rightarrow B^C, A^C$ unabhängig (analog zu obigem Beweis!)

Beispiel 7
Zahlenlotto 6 aus 49:
$A :=$ {*1. gezogene Zahl ist gerade*}
$B :=$ {*2. gezogene Zahl ist ungerade*}
$\mathbb{P}(A \cap B) \overset{!}{=} \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \quad ?$
$\mathbb{P}($*1. Zahl gerade und 2. Zahl ungerade*$) = \frac{24 \cdot 25}{49 \cdot 48} = \frac{25}{98}$

$\mathbb{P}(\textit{1. Zahl gerade}) = \frac{24}{49}$
$\mathbb{P}(\textit{2. Zahl ungerade}) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^C) \cdot \mathbb{P}(A^C) = \frac{25}{48} \cdot \frac{24}{49} + \frac{24}{48} \cdot \frac{25}{49} = 2 \cdot \frac{24 \cdot 25}{48 \cdot 49} = \frac{25}{49}$
$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{24 \cdot 25}{49 \cdot 48} \quad \neq \quad \frac{24 \cdot 25}{49 \cdot 49} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Beispiel 8
n-facher Münzwurf mit fairer Münze:
$a := \{\textit{1. Wurf 0}\} \qquad B := \{\textit{n. Wurf 1}\}$
$A := \{(0, \omega_2, \ldots, \omega_n) : \omega_j \in \{0, 1\}\}$
$\mathbb{P}(A) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(B)$
$A \cap B = \{(0, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}, 1)\}$
$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ $\quad \rightarrow$*A und B unabhängig!*

Unabhänigkeit von n-Ereignissen

Gegeben: $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ $\quad$ Wann heißen $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig?

- Falls $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j); \quad i \neq j \rightarrow$ paarweise unabhängig
  <u>aber nicht</u> $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n)$
- $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n) \rightarrow$ folgt nicht die paarweise Unabhängigkeit!
- beides ungeeignet, müsste vereint werden!

Definition 1.13
$A_1, \ldots, A_j \in \mathcal{A}$ heißen unabhängig,wenn für alle $1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n$ und $m = 2, \ldots, n$ gilt:

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{i_m})$$

Beispiel 9 (n=3)
.

$$\left.\begin{array}{lllll} m=2 & i_1 = 1 & i_2 = 2 & & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \\ & i_1 = 1 & i_2 = 3 & & \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3) \\ & i_1 = 2 & i_2 = 3 & & \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) \\ & & & & \\ m=3 & i_1 = 1 & i_2 = 2 & i_3 = 3 & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) \end{array}\right\} \textit{(*)}$$

(*) alle müssen erfüllt sein, keine folgt aus der anderen!

Beispiel 10
2-faches Würfeln:
$A_1 := \{\textit{1. Würfel gerade}\}$
$A_2 := \{\textit{2. Würfel ungerade}\}$
$A_3 := \{\textit{beide Würfe gerade oder beide Würfe ungerade}\}$
$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}$
$A_3 = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5), (2,2), (2,4), \ldots\}$

$\mathbb{P}(A_3) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3)$
$A_1 \cap A_3 = \{(2,2), (2,4), (2,6, (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$
$\rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ *o.k.*
analog $A_1 \cap A_2$ *und* $A_2 \cap A_3$ $\rightarrow$*paarweise unabhängig!*
$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \qquad \neq \qquad \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{8}$
$\rightarrow A_1, A_2, A_3$ *nicht unabhängig!*

Beispiel 11 (Veranschaulichung)
Maschine M, n Bauteile, $B_1, \ldots, B_n$ *Ausfall unabhängig!*
$p(B_j$*fällt aus*$) = p_j \qquad 0 \leq p_j \leq 1$

1) *M fällt aus, wenn mindestens ein Bauteil ausfällt*
   $\mathbb{P}($*M fällt nicht aus*$) = \mathbb{P}(B_1, \ldots, B_n$ *fällt nicht aus*$) = \mathbb{P}(B_1$ *nicht*$) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(B_n$ *nicht*$) = \prod_{j=1}^{n}(1 - p_j)$
   $\rightarrow \mathbb{P}($*M fällt aus*$) = 1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - p_j)$
   p_j *nahe bei 1:*$\rightarrow 1 - p_j$ *nahe 0*$\rightarrow \prod$ *nahe 0* $\rightarrow \mathbb{P}($*M fällt aus*$) \approx 1$

2) *Maschine fällt aus, wenn alle Bauteile ausfallen*
   $\mathbb{P}($*M fällt aus*$) = \mathbb{P}(B_1$ *fällt aus*$, \ldots, B_n$ *fällt aus*$) = \mathbb{P}(B_1$ *fällt aus*$) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(B_n$ *fällt aus*$) = \prod_{j=1}^{n} p_j$
   p_j *nahe 0*$\rightarrow \prod$ *nahe* $0 \rightarrow \mathbb{P}(M$ *fällt aus*$) \approx 0$

Bernoulli-Schema

Man betrachte ein stochastiches Experiment, bei dem es nur die zwei Ergebnisse Erfolg (=1) und Mißerfolg (=0) gibt. Die Wahrscheinlichkeit für Erfolg sei $p \in [0,1]$ und entsprechend ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für Mißerfolg als $1 - p$. Für n unabhängige Experimente (Idee/Gedanke von *Bernoulli*) erhält man so einen Vektor $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, wobei die $\omega_j \in \{0,1\}$ sind, und $\Omega = \{0,1\}^n \qquad \mathcal{A} = \mathfrak{R}(\Omega)$

Beispiel 12 (Bernoulli-Schema für $p = \frac{1}{2}$)
Legt man für $\mathbb{P}$ *die Gleichverteilung zugrunde, also* $p = \frac{1}{2}$*, so bekommt man für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses* ω

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{2^n}$$

Beispiel 13 (Bernoulli-Schema für $p > \frac{1}{2}$)
Ist eines der Teilergebnisse wahrscheinlicher als das andere ($p > \frac{1}{2}$*), wird das Ereignis* $(1, \ldots, 1)$ *wahrscheinlicher als das Ereignis* $(0, \ldots, 0)$ *und* $\mathbb{P}$ *ist keine Gleichverteilung!*

Bei $n = 4$ *Schritten ist beispielsweise* $\mathbb{P}\big((0,1,0,1)\big) = p^2(-p)^2$ *oder* $\mathbb{P}\big((0,0,0,1)\big) = p(1-p)^3$. *Allgemein gilt:*

$$p^k(1-p)^{n-k} = \mathbb{P}(A) \qquad k = \sharp\{j : \omega_j = 1\} \text{ bzw. } k = \sum_i^n w_i$$

$\Omega = \{0,1\}^n \qquad 0 \leq p \leq 1$
$\mathbb{P}(\{\omega\}) = p^k(1-p)^{n-k}$
$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n), \quad k = \omega_1 + \ldots + \omega_n$
Probe: $\mathbb{P}$ ist Wahrscheinlichkeitsmaß

1) $p^k(1-p)^{n-k} \geq 0$

2)

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega \in \mathbb{R}} p(\{\omega\}) \overset{!}{=} 1 \quad &= \sum_{k=0}^n \sum_{\omega:\omega_1+,\ldots,+\omega_n=k} \underbrace{p(\{\omega\})}_{p^k(1-p)^{k-n}} \\
&= \sum_{k=0}^n p^k(1-p)^{n-k} \underbrace{\sharp\{\omega : \omega_1+,\ldots,+\omega_n = k\}}_{\binom{n}{k}} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1
\end{aligned}$$

$A := \{\text{n-ter Versuch} = 1\} \subseteq \{0,1\}^n$
$A = \{(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, 1) : \omega_j \in \{0,1\}\}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{k=1}^n \sum_{\omega \in A; \omega_1+\ldots+\omega_n=k} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n p^k(1-p)^{n-k} \cdot \underbrace{\sharp\{\omega \in \mathcal{A} : \omega_1 + \ldots + \omega_n = k\}}_{\binom{n-1}{k-1}} \\
&= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k} p^{n-k}(1-p)^{n-1-k} = p\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k} p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)} \\
&= p\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k(1-p)^{n-1-k} \\
&= p(p+(1-p))^{n-1} = p = \mathbb{P}(A)
\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(\omega_1 \overset{0}{=} 1, \ldots, \omega_n \overset{0}{=} 1) = \mathbb{P}(\omega_1 \overset{0}{=} 1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\omega_n \overset{0}{=} 1)$
unabhängig von Ereignissen, deren Eintreten nur vom j-ten Versuch abhängt.

Beispiel 14

.

$$\left.\begin{array}{l} A = \{2. \text{ Versuch } 0\} \\ B = \{4. \text{ Versuch } 1\} \\ C = \{7. \text{ Versuch } 0\} \end{array}\right\} \textit{unabhängig}$$

$A := \{\text{genau k mal Erfolg}\}$
$\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{\omega_1+\ldots+\omega_n=k} p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$
Binominialverteilung $B_{n,p}$ beschreibt folgendes Experiment:
Führe n unabhängige Versuche durch: 1 mit p und 0 mit 1-p:

$$B_{n,p}(\{k\}) = \mathbb{P}(\text{Genau k-mal Erfolg})$$

Geometrische Verteilungen

Eins erscheint mit Wahrscheinlichkeit p, Null mit Wahrscheinlichkeit $1-p$
Gesucht ist $\mathbb{P}$(Im $(k+1)$-ten Versuch erscheint erstmals eine Eins)
Wir führen Hilfsraum ein:

$$\Omega = \{\omega := (\omega_1, \omega_2, \ldots), \omega_j \in \{0,1\}\}$$
$$A = \{\omega : \omega_1 = a_1, \ldots, \omega_n = a_n, \omega_{n+1} \text{ beliebig}\}$$

für vorgegebene $a_1, \ldots, a_n \in \{0,1\}$

$$\mathbb{P}(A) := p^k(1-p)^{n-k} \qquad k = a_1 + \ldots + a_n$$

$\mathbb{P}$ lässt sich eindeutig zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf der von solchen Mengen A erzeugten σ-Algebra fortsetzen (ohne Beweis!)
Spezialfall:

$$A = \{\omega : \omega_1 = 0, \ldots, \omega_n = 0, \omega_{n+1} = 1\} = \{\text{im } (n+1)\text{-ten Versuch das erste Mal Eins}\}$$

$\rightarrow \mathbb{P}(A) = p(1-p)^n$

Definition 1.14
$\mathbb{P}(\{n\}) = \mathbb{P}($*im* $(n+1)$*. Versuch erstmals Erfolg*$)$
$0 < p < 1, \quad \Omega = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$
Das Wahrscheinlichkeitsmaß von $\mathbb{P}$ *auf* $\mathfrak{R}(\mathbb{N}_0)$ *mit:*

$$\mathbb{P}(\{n\}) := p(1-p)^n$$

heisst geometrische Verteilung mit Parameter p.

<u>Problem:</u>
zu zeigen: $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{n\}) \stackrel{?}{=} 1$
<u>Beweis:</u>
$\sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n = p \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1 \quad \rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsmaß $\square$

Beispiel 1
Wahrscheinlichkeit, dass beim Würfeln die 6 erstmals im 10. Versuch erscheint:
$p = \frac{1}{6}; \quad 1-p = \frac{5}{6}$
$\mathbb{P}(\{9\}) = \frac{1}{6} \cdot (\frac{5}{6})^9 \approx 0.0323\ldots$

Beispiel 2 (Roulette)
$\mathbb{P}($*Im 88. Versuch erstmals rot*$) = \mathbb{P}(\{87\}) \qquad p = \frac{18}{37}; \qquad 1-p = \frac{19}{37}$
$\rightarrow \mathbb{P}(\{87\}) = \frac{18}{37} \cdot (\frac{19}{37})^{87} \approx 3.19951 \cdot 10^{-26}$

1.8 Verteilungsfunktion

$\mathbb{P}$ sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ (besser $\mathcal{L}\updownarrow(\mathbb{R})$), stetig oder diskret

Definition 1.15
Die Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(t) := \mathbb{P}((-\infty, t]), \quad t \in \mathbb{R}$$

heisst Verteilungsfunktion des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$.

Beispiel 1
$\mathbb{P}(\{0\}) = 1-p \qquad \mathbb{P}(\{1\}) = p$

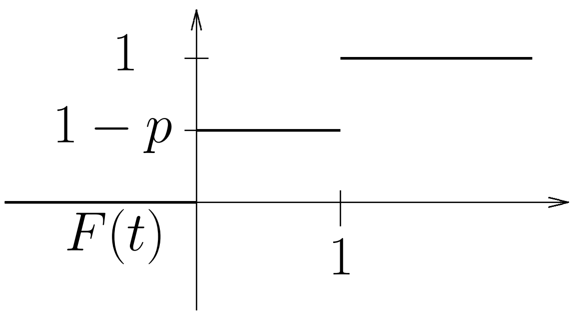


Abbildung 1.10: Verteilungsfunktion zu Beispiel 1

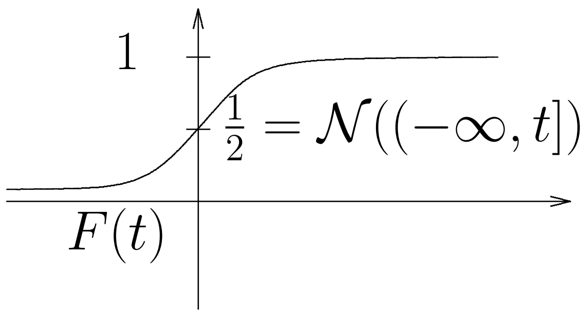


Abbildung 1.11: Verteilungsfunktion zu Beispiel 2

Beispiel 2
$\mathbb{P} = \mathcal{N}(0,1)$ *(Standardnormalverteilung)*
$F(t) = \mathbb{P}((-\infty, t]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$

Satz 1.8
Sei F die Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes

1) *F ist monoton wachsend*

2) $F(-\infty) := \lim\limits_{t\to-\infty} F(t) = 0;$
$F(\infty) := \lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 1$

3) *F ist rechtsseitig stetig*

Beweis:

1) $t \leq s \to (-\infty, t] \subseteq (-\infty, s] \quad \overset{\text{Monotonie der W.-Maße}}{\to} \quad \mathbb{P}((-\infty, t]) \leq \mathbb{P}((-\infty, s]) \quad \to$ 1)

2) $t_n \searrow -\infty, \quad A_n := (-\infty, t_n] \quad \to \quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$
$\to \quad \mathbb{P}(A_n) \quad \to_{n\to\infty} \quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \to \quad \to F(t) \to_{t\to-\infty} 0$
$t_n \nearrow \infty, \quad A_n := (-\infty, t_n] \quad \to \quad A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (-\infty, \infty)$
$\to \quad \mathbb{P}(A_n) \to_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1 \quad \to \quad F(\infty) = 1$

3) zu zeigen: $t_n \searrow t \quad \to \quad F(t_n) \to F(t)$
$t_n \searrow t, \quad A_n := (-\infty, t_n] \quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (-\infty, t]$
$\to \quad \mathbb{P}(A_n) \to_{n\to\infty} \mathbb{P}(-\infty, t] = F(t)$

□ Ohne Beweis:
Sei $F: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit 1),2),3). Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{R}$ mit $F(t) = \mathbb{P}((-\infty, t])$

Weitere Eigenschaften

1) $b > a \quad F(b) - F(a) = \mathbb{P}((-\infty, b]) - \mathbb{P}((-\infty, a]) = \mathbb{P}((-\infty, b] \setminus (-\infty, a]) = \mathbb{P}((a, b))$

2) $\mathbb{P}(\{t_0\}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}((t_0 - \frac{1}{n}, t_0]) = \lim\limits_{n\to\infty} \left[F(t_0) - F(t_0 - \frac{1}{n})\right] = F(t_0) - F(t_0 - 0)$
   F ist stetig in $t_0 \Leftrightarrow F(t_0 - 0) = F(t_0) \Leftrightarrow \mathbb{P}(\{t_0\}) = 0$
   F hat einen Sprung der Höhe $h > 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\{t_0\}) = h$
   Wenn $\mathbb{P}$ stetig $\to$ F stetig
   Wenn $\mathbb{P}$ diskret $\to$ F hat nur Sprünge (dazwischen konstant)

   Beispiel 3
   $\mathbb{P}$ Poisson-*Verteilung*

$$\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

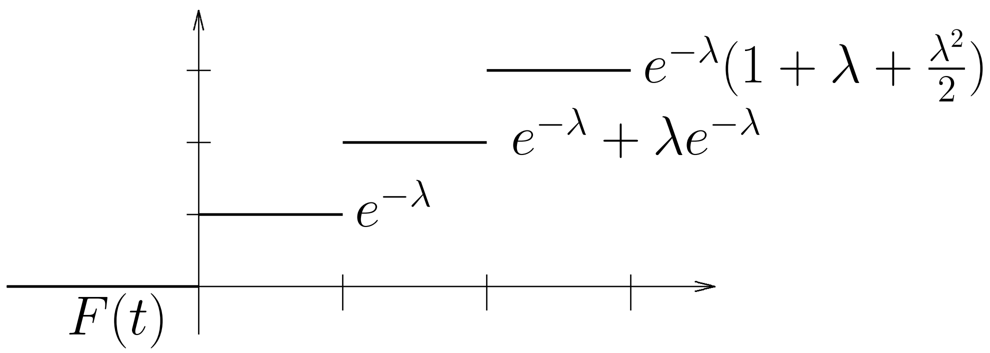


Abbildung 1.12: Verteilungsfunktion zu Beispiel 3

Beispiel 4
Sei $F(t) = \begin{cases} 0 & : \quad -\infty < t < 1 \\ \frac{1}{4} & : \quad 1 \le t < 2 \\ 1 & : \quad t \ge 2 \end{cases}$

$\mathbb{P}([\frac{1}{2}, 4]) = 1 \qquad \mathbb{P}([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}([\frac{3}{2}, \infty)) = \frac{3}{4}$

3) $\mathbb{P}$ habe eine Dichte p
   $F(t) = \mathbb{P}((-\infty, t]) = \int\limits_{-\infty}^{t} p(x)\, dx$

   $\boxed{F'(t) = \frac{d}{dt} F(t) = p(t)}$ (p stetig integrierbar)

   Beispiel 5
   $F(t) := \begin{cases} 0 & : \quad t \le 0 \\ 1 - e^{-t^2} & : \quad t > 0 \end{cases} \quad \to \quad p(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t \le 0 \\ 2te^{-t^2} & : \quad t > 0 \end{cases}$

2 Zufällige Größen

2.1 Definition und Verteilungsgesetz

Zufälliges Experiment, Beschreibung erfolgt durch $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; Wir beobachten $\omega \in \Omega$
Transformieren ω :

$$\text{Gegeben sei Abbildung } X : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \text{(fest)}$$

$$\text{transformiert } \omega \to X(\omega) \in \mathbb{R}$$

$$\text{beobachte am Ende den Wert } X(\omega)$$

Beispiel 1
$\Omega = \mathbb{R}^n, \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ *(n Versuchsergebnisse)*
$X(\omega) := \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \omega_j$ *(Mittelwert)*

Beispiel 2
Würfel 2 mal
$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$; $\mathbb{P}$ *Gleichverteilung*
$X(\omega_1, \omega_2) := \omega_1 + \omega_2$ *(Summe)*
z.B. $X(1,5) = 6$, $X(2,6) = 8$;

Beispiel 3
$\Omega = [0,1]$; $\mathbb{P}$ *Gleichverteilung*
$X(t) := t^2$
es tritt $t \in [0,1]$ *ein, transformiere zu* t^2.

Beobachtete ω's treten mit gewissen Wahrscheinlichkeiten auf.
$\to X(\omega)$'s treten mit gewissen Wahrscheinlichkeiten auf.
$\mathbb{P}(\alpha \le X(\omega) \le \beta) =?$

Definition 2.1
Eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst zufällige Größe (oder „reellwertige Zufallsvariable“ oder „zufällige reelle Zahl“), falls für jede Zahl $t \in \mathbb{R}$ stets gilt:

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le t\} \in \mathcal{A}$$

Bemerkungen:

1) $B \in (\mathbb{R})$ $\qquad X$ sei Zufallsgröße
   $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$
   (Wir wissen dies nur für $B = (-\infty, t], \quad t \in \mathbb{R}$)

2) Nehme X nur die Werte $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}$ an
   Dann ist X Zufallsgröße $\Leftrightarrow \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_k\} \in \mathcal{A}, \quad k = 1, 2, \ldots$

3) Gilt $\mathcal{A} = \mathfrak{R}(\Omega) \to$ jede Abbildung X von Ω nach $\mathbb{R}$ ist Zufallsgröße

Definition 2.2
Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsgröße, $\quad B \in (\mathbb{R})$.

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B) \text{ (Kurzschreibweise)}$$

Satz 2.1
$\mathbb{P}_X$ *ist Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $(\mathbb{R}, (\mathbb{R}))$.
$\mathbb{P}_X$ *nennt man das Verteilungsgesetz der Zufallsgröße* X

Beispiel 1
$\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2; \qquad \mathbb{P}$ *Gleichverteilung*
$X(\omega_1, \omega_2) := \max\{\omega_1, \omega_2\}$
Werte von X ? Zahlen von 1 bis 6 $(1, \ldots, 6)$
$\mathbb{P}_X(\{1\}) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{36}$
$\mathbb{P}_X(\{6\}) = \mathbb{P}(X = 6) = \frac{11}{36}$
$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : X(\omega) = 6) = \mathbb{P}((1,6), \ldots, (6,6), (6,1), \ldots, (6,5)) = \frac{11}{36}$

Beispiel 2
$\Omega = \mathbb{R}; \qquad \mathbb{P} = \mathcal{N}(0,1); \qquad X(x) := x^2$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \le t) &= \begin{cases} 0 & : \quad t \le 0 \\ \mathcal{N}(0,1)\{x \in \mathbb{R} : x^2 \le t\} & : \quad t > 0 \end{cases} \\
&= \mathcal{N}(0,1)([-\sqrt{t}, \sqrt{t}]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx
\end{aligned}$$

$X : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \bigwedge\limits_{x \in \mathbb{R}}$ gilt:

$$\{X \le t\} = X^{-1}((-\infty, t]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le t\} \in \mathcal{A}$$

X Zufallsgröße

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) \text{ Verteilungsgesetz von X}$$

Satz 2.2
$\mathbb{P}_X$ *ist Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $(\mathbb{R}, (\mathbb{R}))$

Beweis:
$\mathbb{P}_X(\emptyset) = \mathbb{P}\{\omega : X(\omega) \in \emptyset\} = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$
$\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}\{\omega : X(\omega) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{P}(\Omega) = 1$
$X^{-1}(A \cap B) = X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B) \quad (A,B \text{ disjunkt})$
$X^{-1}(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j) = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X^{-1}(B_j)$
dann seien B_1, B_2 disjunkte Ordnungen
$i \neq j \quad \emptyset = X^{-1}(\underbrace{B_i \cap B_j}_{=\emptyset}) = X^{-1}(B_j) \cap X^{-1}(B_i)$
$\rightarrow X^{-1}(B_i)$ disjunkte Teilmengen von Ω

$$\mathbb{P}_X(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \mathbb{P}(X^{-1}(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j)) = \mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{X^{-1}(B_j)}_{\text{disjunkt}}) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X^{-1}(B_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}_X(B_j)$$

$\rightarrow \mathbb{P}_X$ Wahrscheinlichkeitsmaß $\quad \rightarrow \mathbb{P}_X$ Verteilungsgesetz von X

Beispiel 1
Würfel 2 mal $\quad \Omega = \{1, \dots, 6\}^2$
$X\{\omega_1, \omega_2\} := \omega_1 - \omega_2, \qquad \mathbb{P}_X = ?$
X *hat Werte in* $\{-5, \dots, 0, \dots, 5\}$
$\mathbb{P}_X(\{-5\}) = \mathbb{P}(X = -5) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{5\})) = \mathbb{P}((1,6)) = \frac{1}{36}$
$\mathbb{P}_X(\{0\}) = \frac{1}{6} \qquad X^{-1}(\{0\}) = \{(1,1), \dots, (6,6)\}$

Beispiel 2
$\mathbb{P}$ *sei Gleichverteilung auf* $[0,1]$*!*
$\omega = (\omega_1, \omega_2) \qquad X(\omega) := \omega_1 + \omega_2 \qquad \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}\{(\omega_1, \omega_2 : \omega_1 + \omega_2 \leq t\}$
$\mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 0 & : \ t \leq 0 \\ 1 & : \ t \geq 2 \end{cases}$
$0 \leq t \leq 1 \qquad \mathbb{P}(X \leq t) = \frac{t^2}{2}$
$1 \leq t \leq 2 \qquad \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - \frac{(2-t)^2}{2} = 2t - 1 - \frac{t^2}{2}$

Sprechweisen

1) Eine Zufallsgröße X heisst gleichverteilt auf $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, falls $\mathbb{P}_X$ die Gleichverteilung auf $\{x_1, \dots, x_n\}$ ist, das heisst

$$\mathbb{P}_X(\{x_i\}) = \frac{1}{N} \qquad \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{N} \qquad j = 1, \dots, N$$

2) X $\sim B_{n,p}$, das heisst $\mathbb{P}_X = B_{n,p}$, das heisst

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^n (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, \dots, n$$

insbesondere ist $\mathbb{P}(X \in \{0, \dots, n\}) = 1$

3) X ist *Poisson*verteilt mit $\lambda > 0$,wenn gilt:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad k = 0, 1, \dots$$

insbesondere ist $\mathbb{P}(X \in \mathbb{N}_0) = 1$

4) $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, das heisst

$$\underbrace{\mathbb{P}(\alpha \le x \le \beta)}_{=\mathbb{P}(\omega:\alpha \le X(\omega) \le \beta)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\, dt$$

5) X exponentialverteilt mit $\lambda > 0$, falls gilt:

$$\mathbb{P}(X \ge t) = e^{-\lambda t}; \quad \ge 0$$

insbesondere gilt: $\mathbb{P}(X \ge 0) = 1$

Bemerkung 1:

X heisst diskret bzw. stetig, falls $\mathbb{P}_X$ diskret bzw. stetig
X diskret $\Leftrightarrow \bigcup_{D \subseteq \mathbb{R}}$ abzählbar, mit $\mathbb{P}(X \le D) = 1$
zum Beispiel: *Poisson*verteilt $\to$ X diskret

X stetig $\Leftrightarrow \bigcup_{\text{W-Dichte p}}$ mit $\mathbb{P}(\alpha \le X \le \beta) = \int_\alpha^\beta p(s)\, ds$
zum Beispiel: $X \sim \mathcal{N}(0,1) \to X$ stetig

Bemerkung 2:

$F_X(t) := \mathbb{P}_X((-\infty, t]) = \mathbb{P}(X \le t)$ Verteilungsfunktion von X

2.2 Gemeinsame Verteilung

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum

$$\left.\begin{array}{l} X_1 : \Omega \to \mathbb{R} \\ \vdots \\ X_n : \Omega \to \mathbb{R} \end{array}\right\} n \text{ zufällig}$$

Beispiel 3
3 mal würfeln
$X_1(\omega) := \max\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$
$X_2(\omega) := \min\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$
$X_3(\omega) := \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$

Definition 2.3
Die Abbildung $\overrightarrow{X} = (X_1 \dots X_n)$ *mit*

$$\overrightarrow{X} = (X_1(\omega) \dots X_n(\omega)) \in \mathbb{R}^n$$

heisst n-dimensional zufälliger Vektor mit Koordinaten $X_1 \dots X_n$

Beispiel 3 (obiges Beispiel)
Würfel:

$$(1,1,4) \xrightarrow{\overrightarrow{X}} (4,1,6)$$
$$(2,3,6) \to (6,2,11)$$
$$\overrightarrow{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

Definition 2.4
Die Abbildung $\mathbb{P}_{\overrightarrow{X}} \to \mathbb{P}_{(X_1 \dots X_n)}$ *mit:*

$$\mathbb{P}_{\overrightarrow{X}}(B) = \mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \overrightarrow{X}(\omega) \in B\right\}$$

heisst gemeinsames Verteilungsgesetz von $X_1 \dots X_n$.
$\mathbb{P}_{\overrightarrow{X}}$ *ist Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $(\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n))$.

Beispiel 1
$B = [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_n, \beta_n]$ *Quader*

$$\mathbb{P}_{\overrightarrow{X}}(B) = \mathbb{P}(\alpha_1 \leq X_1 \leq \beta_1, \dots, \alpha_n \leq X_n \leq \beta_n)$$

$\Big[$ *gleichtzeitig muss* $\alpha_1 \leq X_1 \leq \beta_1$ *und* $\dots$ *und* $\alpha_n \leq X_n \leq \beta_n$ *erfüllt sein* $\Big]$

Beispiel 2
Würfel 2 mal:

$$X_1(\omega_1, \omega_2) := \min\{\omega_1, \omega_2\}$$

$$X_2(\omega_1, \omega_2) := \max\{\omega_1, \omega_2\}$$

$$\mathbb{P}_{\overrightarrow{X}}(\{(1,4)\}) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 4) = \frac{1}{18}$$

$$\mathbb{P}_{\overrightarrow{X}}(\{(4,1)\}) = \mathbb{P}(X_1 = 4, X_2 = 1) = 0$$

$$\mathbb{P}_{\overrightarrow{X}}(\{(3,3)\}) = \mathbb{P}(X_1 = 3, X_2 = 3) = \frac{1}{36}$$

		X_1					
		1	2	3	4	5	6
X_2	1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
	2	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0
	3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0
	4	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	0	0
	5	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	0
	6	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

$X_1 \ldots X_n$ gegeben
$\mathbb{P}(X_1 \ldots X_n)$ Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^n$ (gemeinsame Verteilung)
$\mathbb{P}_{X_1 \ldots X_n}$ n Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$ (Randverteilungen)

Frage:
Was ist informativer? n Randverteilungen oder eine gemeinsame Verteilung?

Beispiel 1
ω ist zufällig herausgenommener Student:

$$X_1(\omega) \quad \textit{Alter}$$

$$X_2(\omega) \qquad \textit{m oder w}$$

$$\mathbb{P}_{X_1}(\{22\}) = \frac{\textit{Anzahl der 22-Jährigen}}{N}$$

$$\mathbb{P}_{X_2}(\{w\}) = \frac{\textit{Anzahl der Mädchen}}{N}$$

$$\mathbb{P}_{\overrightarrow{X}}((22, w)) = \mathbb{P}(X_1 = 22, X_2 = w) = \frac{\textit{Anzahl der 22-jährigen Mädchen}}{N}$$

Satz 2.3
Die gemeinsame Verteilung $\mathbb{P}(X_1 \ldots X_n)$ bestimmt die Randverteilung von $\mathbb{P}_{X_1 \ldots X_n}$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{X_1}(B) &= \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \in B\} \\
&= \mathbb{P}(\omega \in \Omega : X_1(\omega) \in B, X_2(\omega) \in \mathbb{R}, \dots, X_n(\omega) \in \mathbb{R}) \\
&= \mathbb{P}(\omega \in \Omega : \overrightarrow{X}(\omega) \in B \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}) \\
&= \mathbb{P}_{\overrightarrow{X}}(B \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Konkrete Rechenregeln

1) $n = 2$, X und Y zufällig und beide diskret: $\bigvee\limits_{x_1, x_2 \ldots \in \mathbb{R}} \bigvee\limits_{y_1, y_2 \ldots \in \mathbb{R}}$ mit :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = x_i) = 1 \text{ und } \mathbb{P}(Y \in \{y_1, y_2, \ldots\}) = 1$$

$$p_{ij} := \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}_{(X,Y)}(\{(x_i, y_j)\})$$

$$p_{ij} \geq 0 \qquad \sum_{i,j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$$

$$p_i := \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(X = x_i, Y \in \{y_1, y_2, \ldots\}) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$$

$$\mathbb{P}_{(x,y)}(B) = \sum_{(x_i, y_j) \in B} p_{ij}$$

$$p_j := \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$$

		X							
		1	2	3	4	5	6		
	1						$\mathbb{P}_{61}$	$\mathbb{P}_{01}$	$\frac{1}{36}$
	2			$\mathbb{P}_{33}$				$\mathbb{P}_{02}$	$\frac{3}{36}$
Y	3							$\mathbb{P}_{03}$	$\frac{5}{36}$
	4							$\mathbb{P}_{04}$	$\frac{7}{36}$
	5							$\mathbb{P}_{05}$	$\frac{9}{36}$
	6							$\mathbb{P}_{06}$	$\frac{11}{36}$
		$\mathbb{P}_{10}$	$\mathbb{P}_{20}$	$\mathbb{P}_{30}$	$\mathbb{P}_{40}$	$\mathbb{P}_{50}$	$\mathbb{P}_{60}$		
		$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$		

$$\mathbb{P}(Y = 6) = \mathbb{P}_{\dot{6}} = \frac{11}{36} \qquad \mathbb{P}(X = 6, Y = 1) = \mathbb{P}_{61} = 0$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}_{40} = \frac{5}{36} \qquad \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = \mathbb{P}_{22} = \frac{1}{36}$$

$X_1 \dots X_n: \quad \Omega \to \mathbb{R}$ n zufällige Größen
$(X_1 \dots X_n) \quad \Omega \to \mathbb{R}^n$ zufälliger Vektor

$$\omega \to (X_1(\omega) \dots X_n(\omega))$$

$\mathbb{P}_{(x_x, x_2)}$ gemäß Verteilung, Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^n)$
$\to \quad \mathbb{P}_{X_1} \dots \mathbb{P}_{X_n}$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$ Randverteilungen

2) stetiger Fall:
$\exists$ Dichte $p: \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathbb{P}(\alpha_1 \leq X_1 \leq \beta_1, \dots, \alpha_n \leq X_n \leq \beta_n) = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdots \int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} p(t_1, \dots, t_n)\, dt_n \dots dt_1$$

Welche Dichten haben die Randverteilungen?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X_j}([\alpha, \beta]) &= \mathbb{P}(\alpha \leq X_j \leq \beta) \\ &= \mathbb{P}(-\infty < X_1 < \infty, \dots, \alpha \leq X_j \leq \beta, \dots, -\infty < X_n < \infty) \\ &= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \dots dt_n}_{q(t_j)}\, dt_j\end{aligned}$$

$$\to \mathbb{P}_X \text{ hat Dichte } q$$

$\mathbb{P}_{X_j}$ hat die Dichte

$$t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(t_1, \dots, t_j, \dots, t_n)\, dt_1 \dots dt_j \dots dt_n$$

Beispiel 1
$\mathbb{P}_{(X,Y)}$ *sei Gleichverteilung auf Einheitskreis*

$$p(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & t^2 + s^2 \leq 1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

$\to \mathbb{P}_X$ *hat Dichte* q *mit*

$$q(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(t, s)\, ds = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} ds = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - t^2} \text{ für } |t| \leq 1$$

$$\to \mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 - t^2}\, dt$$

$-1 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$

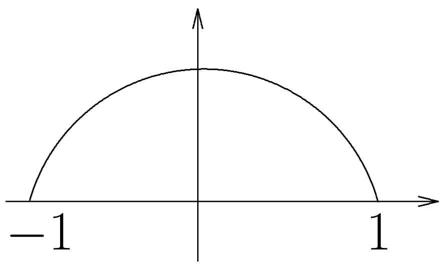


Abbildung 2.1: Dichte von $\mathbb{P}_X$ (Beipiel 1)

Frage: Bestimmen die Randverteilungen die gemeinsame Verteilung?

Beispiel 2
In einer Urne befinden sich zwei Kugeln mit Wert 0 und zwei Kugeln mit Wert 1. Wir ziehen zwei Kugeln ohne zurücklegen:
X Wert Kugel 1
Y Wert Kugel 2

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 0 | X = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

		X		
		0	1	
Y	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{\tilde{X}}$
$\mathbb{P}_Y = \mathbb{P}_{\tilde{Y}}$
aber: $\mathbb{P}_{(X,Y)} \neq \mathbb{P}_{(\tilde{X},\tilde{Y})}$

mit zurücklegen:

		X		
		0	1	
Y	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Randbedingungen bestimmen im Allgemeinen nicht die gemeinsamen Verteilungen!

2.3 Unabhängigkeit zufälliger Größen

Beispiel 1
Würfel 3 mal
X Wert 1. Wurf *Y Summe 2. und 3. Wurf*
Frage: X und Y unabhängig?

Definition 2.5
n zufällige Größen $X_1, \dots, X_n$ heißen unabhängig, wenn für alle $B_1, \dots, B_n \in (\mathbb{R})$ stets gilt:

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n \in B_n) \tag{*}$$

Bemerkung:

1) es reicht aus, wenn (*) für Intervalle gilt.
2) es reicht aus, wenn (*) für Intervalle der Form $(-\infty, X]$ gilt, d.h. wenn $\bigwedge\limits_{t_j \in \mathbb{R}}$:

$$\mathbb{P}(X_1 \leq t_1, \dots, X_n \leq t_n) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j \leq t_j)$$

3) $X_1, \dots, X_n$ sind unabhängig $\Leftrightarrow \bigwedge\limits_{B_1,\dots,B_n} \in (\mathbb{R})$ stehts $\{X_1 \in B_1\}, \dots, \{X_n \in B_n\}$ unabhängig sind (nicht trivial! ;-))

Konkrete Fälle

1) Diskreter Fall, $n = 2$
X hat Werte $X_1, X_2, \dots$
Y hat Werte $Y_1, Y_2, \dots$

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

$$p_{i0} = \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$$

$$p_{0j} = \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$$

Satz 2.4
Die zufälligen Größen X und Y sind dann und nur dann unabhängig, wenn gilt:

$$p_{ij} = p_{i0} \cdot p_{0j} \qquad \bigwedge_{i,j} 1 \leq i, j < \infty$$

Beweis: „⇒“

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \mathbb{P}(X \in \{x_i\}\,,\; Y \in \{y_j\}) \\ &\overset{\text{unabh.}}{=} \mathbb{P}(X \in \{x_i\}) \cdot \mathbb{P}(Y \in \{y_i\}) = p_{i0} \cdot p_{0j} \end{aligned}$$

Beweis: „⇐“

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in B_1, Y \in B_2) &= \sum_{x_i \in B_1, y_j \in B_2} p_{ij} = \sum_{x_i \in B_1, y_j \in B_2} p_{i0} \cdot p_{0j} \\ &= \sum_{x_i \in B_1} p_{i0} \cdot \sum_{y_j \in B_2} p_{0j} = \mathbb{P}(X \in B_1) \cdot \mathbb{P}(Y \in B_2) \\ &\Rightarrow \text{unabhängig} \qquad \square \end{aligned}$$

2) Stetiger Fall
$\mathbb{P}(X_1, \dots, X_n)$ hat Dichte $p : \mathbb{R}^n \to \quad [0, \infty)$

- Randverteilungen $\mathbb{P}_{X_1}, \dots, \mathbb{P}_{X_n}$
- dann sind $X_1, \dots, X_n$ genau dann unabhängig, wenn

$$p(t_1, \dots, t_n) = p_1(t_1) \cdot \ldots \cdot p_n(t_n)$$

Beweis: „⇒“

$$\begin{aligned} (*) &= \mathbb{P}(\alpha_1 \le X_1 \le \beta_1, \dots, \alpha_n \le X_n \le \beta_n) \\ &= \mathbb{P}(\alpha_1 \le X_1 \le \beta_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\alpha_n \le X_n \le \beta_n) \\ &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} p_1(t_1)\, dt_1 \cdot \ldots \cdot \int_{\alpha_n}^{\beta_n} p_n(t_n)\, dt_n \\ &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} p_1(t_1) \cdot \ldots \cdot p_n(t_n)\, dt_n \ldots dt_1 \\ (*) &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} p(t_1, \dots, t_n)\, dt_n \ldots dt_1 \\ &\bigwedge_{\alpha_i < \beta_i} \qquad p(t_1 \ldots t_n) = p_1(t_1) \cdot \ldots \cdot p_n(t_n) \end{aligned}$$

Umkehrung analog $\square$

2.4 Transformation zufälliger Größen

$$X : \Omega \quad \to \mathbb{R} \text{ Zufallsgröße}, \quad f : \mathbb{R} \quad \to \mathbb{R}$$
$$Y := f(X)$$

*(Prüfungs-)*Frage:
Wie berechnet sich $\mathbb{P}_Y$ aus $\mathbb{P}_X$?

Beispiel 1
X *Sei gleichverteilt auf* $\{1 \dots 6\}$

$$f : \mathbb{R} \quad \to \mathbb{R} \textit{ sei gegeben durch } f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \geq 4 \\ 0 & : \quad x < 4 \end{cases}$$
$$Y := f(X)$$
$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X \geq 4) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X < 4) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(Y) = B_{1,\frac{1}{2}}$$

Beispiel 2

$$X \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad Y = X^2$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq t) &= \mathbb{P}(X^2 \leq t) \\ &= \mathbb{P}(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \end{aligned}$$

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$$

$$q \textit{ Dichte von } \mathbb{P}_Y \to q(t) = \frac{d}{dt} F_Y(t)$$

$$F_Y(t) = H(\sqrt{t}) \qquad H(n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^n e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \qquad H'(n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{n^2}{2}}\, dx$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(\sqrt{t}) &= H'(\sqrt{t}) \cdot \frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}, \qquad t > 0 \\ q(t) &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{t}{2}} & : \quad t > 0 \\ 0 & : \quad t \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Lineare Transformationen

$$f(t) = at + b \qquad \rightarrow \qquad Y = a \cdot X + b$$

- 1. Fall $a > 0$:

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(aX + b \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \frac{t-b}{a})$$

$$F_Y(t) = F_X(\frac{t-b}{a})$$

- 2. Fall $a < 0$:

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(aX + b \leq t) = \mathbb{P}(X \geq \frac{t-b}{a}) = 1 - \mathbb{P}(X < \frac{t-b}{a})$$

$$\text{falls X stetig} \rightarrow \quad 1 - \mathbb{P}(X \leq \frac{t-b}{a}) = 1 - F_X(\frac{t-b}{a})$$

X hat Verteilungsdichte p

$$\begin{aligned} \rightarrow q(t) = \frac{d}{dt} F_Y(t) &\overset{a \geq 0}{=} \frac{d}{dt} F_X(\frac{t-b}{a}) = \frac{1}{a} p(\frac{t-b}{a}) \\ &\overset{a \leq 0}{=} \frac{d}{dt} (1 - F_X(\frac{t-b}{a})) = -\frac{1}{a} p(\frac{t-b}{a}) \end{aligned}$$

q Dichte von $aX + b$

$$q(t) = \frac{1}{|a|} p(\frac{t-b}{a})$$

Beispiel 1

$$X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$Y = \sigma X + b \qquad \sigma > 0$$

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$q(t) = \frac{1}{\sigma} p(\frac{t-b}{a}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-b)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\sigma X + b \sim \mathcal{N}(b, \sigma^2)$$

Beispiel 2

$$p(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & : \quad t > 0 \\ 0 & : \quad t \leq 0 \end{cases}$$

$$Y = aX \qquad a > 0$$

$$q(t) = \frac{1}{a} p(\frac{t}{a}) = \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{\lambda}{a} t} \qquad t > 0$$

$$Y \textit{ ist exponentialverteilt mit Parameter } \frac{\lambda}{a}$$

Simulation zufälliger Größen

1. Schritt

Simulation auf einer $[0,1]$ gleichverteilten Zufallsgröße. Unabhängigkeit wählt Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots \in \{0,1\}$ mit

$$\mathbb{P}\{\omega_j = 0\} = \mathbb{P}(\omega_j = 1) = \frac{1}{2}$$

Erhalten zufällige Folge $\omega_1, \omega_2, \ldots$ von Nullen und Einsen $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$, setzen

$$U(\omega) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega_j}{2^j}$$

dass heisst, $U(\omega) = 0, \omega_1\omega_2 \ldots$ im Binärsystem
$0,0,1,1,1,0,1 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \ldots$
$U(\omega) \in [0,1] \quad \to$ U gleichverteilt auf $[0,1]$,d.h.

$$\mathbb{P}(\alpha \leq U \leq \beta) = \beta - \alpha$$

für $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$.
$U(\omega)$ ist eine gleichverteilte zuf. Zahl aus $[0,1]$.

2. Schritt

$Q:$ Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$,
Q habe Dichte q mit $q(x) > 0, \quad x \in (a,b), \quad q(x) = 0$ für $x \notin [a,b]$
$a = -\infty, \quad b = \infty$ möglich!

$$F(t) = Q((-\infty, t]) = \int_{-\infty}^{t} q(x)\, dx$$

$\rightarrow$ F streng monoton wachsend auf $[a,b]$:

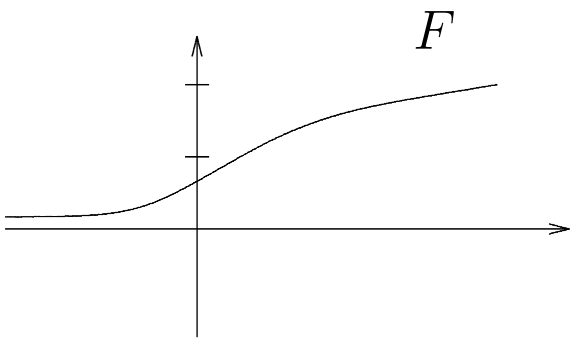


Abbildung 2.2: F

$\rightarrow F^{-1}: \quad (0,1) \rightarrow (a,b)$ existiert:

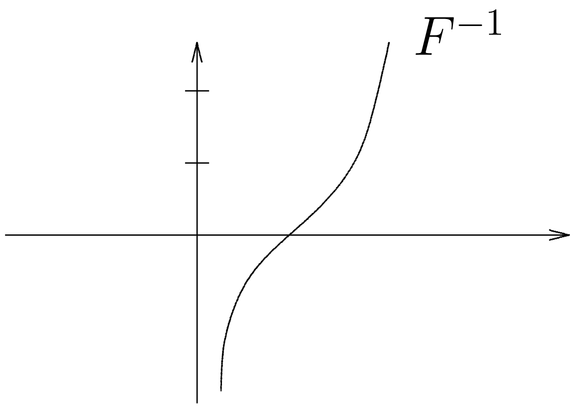


Abbildung 2.3: F^{-1}

Satz 2.5
Sei Q wie oben mit Verteilungsfunktion F und sei U gleichverteilt auf $[0,1]$
Sei $X := F^{-1}(U)$*, so folgt*

$$\mathbb{P}_X = Q$$

<u>Beweis:</u>

$$\mathbb{P}(U \leq S) = \begin{cases} 0 & : \quad s < 0 \\ s & : \quad 0 \leq s \leq 1 \\ 1 & : \quad s > 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq t) \overset{F^{-1} \text{ wachs.}}{=} \mathbb{P}(U \leq \underbrace{F(t)}_{\in[0,1]}) = F(t)$$

$$= Q((-\infty, t]) \quad \to \quad \bigwedge t \to \mathbb{P}_X = Q \qquad \square$$

Anwendung

1) Wollen ein $x \in \mathbb{R}$ wählen gemäß $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

$$\Phi^{-1}(t): \quad (0,1) \to \mathbb{R}$$

Ist U gleichverteilt auf $[0,1]$, so ist $\Phi^{-1}(U)$ gemäß $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt.

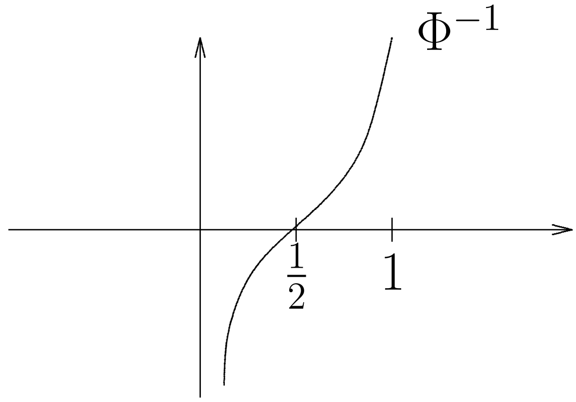


Abbildung 2.4: Φ^{-1}

Suchen $x \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}(\alpha \leq x \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds$

Im 1. Schritt $u \in [0,1]$ gleichverteilt,

$$x := \Phi^{-1}(u) \quad \to \quad \text{x ist } \mathcal{N}(0,1)\text{-verteilt}$$

Suchen unabhängige $X_1, \ldots, X_n$ normalverteilt

$$\left.\begin{array}{l} \omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \ldots \in \{0,1\} \\ \omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}, \ldots \in \{0,1\} \\ \quad \vdots \\ \omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, \ldots \in \{0,1\} \end{array}\right\} u_1, u_2, \ldots, u_n \text{ gleichverteilt und unabhängig}$$

$$x_1 := \Phi^{-1}(u_1); \ldots ; x_n := \Phi^{-1}(u_n)$$

Bemerkung:

$$Y_1 := \sigma x_1 + a; \ldots ; Y_n = \sigma x_n + a, \quad \sigma > 0, a \in \mathbb{R}$$
$$\to Y_1, \ldots, Y_n \text{ unabhängig und } \mathcal{N}(a, \sigma^2)\text{-verteilt!}$$

2) Man konstruiert n unabhängige exponentialverteilte Zahlen $t_1, \ldots, t_n$ mit Parameter $\lambda > 0$
Im 1.Schritt: $u_1, \ldots, u_n$ wie oben

$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = 1 - e^{-\lambda t}$$

$1 - e^{-\lambda t} = s \quad (0 < s < 1) \qquad \to$

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} &= 1 - s \\ -\lambda t &= \ln(1 - s) \\ t &= \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{1-s}\right) \end{aligned}$$

$$F^{-1}(s) = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{1-s}\right)$$

U gleichverteilt auf $[0, 1] \quad \to \quad \ln\left(\frac{1}{1-n}\right)$ ist exponential verteilt mit Parameter $\lambda > 0$.
$1 - U$ ist ebenfalls gleichverteilt auf $[0, 1]$. $\quad \to \quad \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$ ist exponential verteilt mit $\lambda > 0$
$u_1, \ldots, u_n$ unabhängig gleichverteilte Zahlen aus $[0, 1]$

$$x_j := \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{n}\right), \quad 1 \leq j \leq n$$

$$\to \quad t_1, \ldots, t_n \text{ unabhängig exponential verteilt}$$

Sei Q ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß. Wie simuliert man Q?

Beispiel 1
Wollen eine $B_{n,p}$-Verteilung simulieren. Suchen ein $k \in \{0, \ldots, n\}$ gemäß $B_{n,p}$ verteilt.

2.5 Rechnen mit zufälligen Größen

Problem

$$X, Y \text{ unabhängige Zufallsgrößen}$$
$$Z := X + Y$$

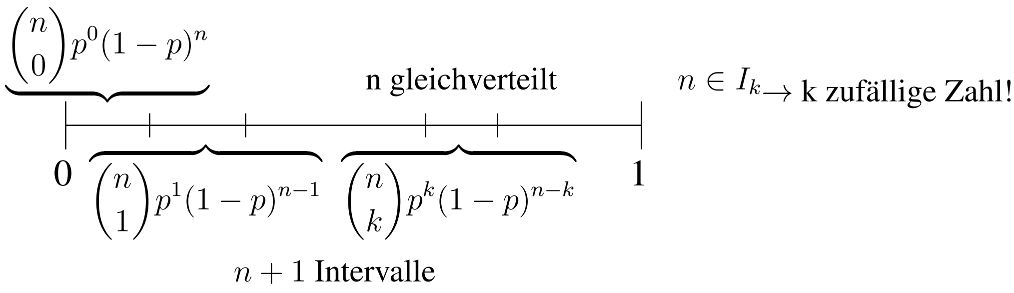


Abbildung 2.5: Simulation einer zuf. Größe

Frage

Wie berechnet sich das Verteilungsgesetz von Z aus denen von X und Y?

Beispiel 1
X,Y beide gleichverteilt auf $\{1,\ldots,6\}$

$$\mathbb{P}(X+Y=2)=\frac{1}{36};\qquad \mathbb{P}(X+Y=7)=\frac{1}{6}$$

Satz 2.6
X,Y seine Zufallsgrößen mit Werten in $\mathbb{N}_0=\{0,1,\ldots\}$*, X,Y sind unabhängig, dann gilt:*

$$\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=i)\cdot\mathbb{P}(Y=k-i)$$

<u>Beweis:</u>

$$\begin{aligned}
B_k &:= \{(i,j):\quad i,j\in\mathbb{N}_0,\quad i+j=k\}\\
\mathbb{P}(X+Y=k) &= \mathbb{P}((X,Y)\in B_k)=\mathbb{P}_{X,Y}(B_k)\\
B_k &:= \bigcup_{i=0}^{k}\{(i,k-i)\}=\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}_{X,Y}(\{(i,k-i)\})\\
&= \sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=i,Y=k-i)\\
&\overset{\text{unabh.}}{=} \mathbb{P}(X=i)\cdot\mathbb{P}(Y=k-i)
\end{aligned}$$
□

Beispiel 2
$\mathbb{P}(X=i)=\frac{1}{6};\quad i=1,\ldots,6;$ *Null sonst*
$\mathbb{P}(Y=i)=\frac{1}{6};\quad i=1,\ldots,6;$ *Null sonst*
$\mathbb{P}(X+Y=3)=\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(X=3)+\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=2)+\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=1)$
$+\,\mathbb{P}(X=3)\mathbb{P}(Y=0)=0+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+0=\frac{1}{18}$

Satz 2.7
Sei X Poissonverteilt mit $\lambda > 0$ und Y Poissonverteilt mit $\mu > 0$

$$X,Y \text{ unabhängig } \Rightarrow X+Y \text{ Poissonverteilt mit } \lambda+\mu$$

<u>Beweis:</u>

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\mu} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \underbrace{\frac{k!}{i!(k-i)!}}_{\binom{k}{i}} \cdot \lambda^i \mu^{k-i} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}(\lambda+\mu)^k \qquad \square
\end{aligned}$$

Deutung

Telefonzentralen in A und B
Anzahl der Anrufe in A (B bzw. A+B) sein Poissonverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ ($\mu > 0$ bzw. $\lambda + \mu > 0$)

Lemma 2.8
Für $k = 0, 1, \ldots, m+n$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k} \qquad \text{s.o.}$$

Satz 2.9
$X \sim B_{n,p}, \quad Y \sim B_{m,p}$

$$X, Y \text{ unabh.} \quad \rightarrow \quad X+Y \sim B_{n+m,p}$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-(k-i)} \\
&= p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \\
&\overset{2.8.}{=} \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}; \quad k = 0, \ldots, n \\
&\to X+Y \text{ ist } B_{n+m,p}\text{-verteilt} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Folgerung

$X_1, \ldots, X_N$ unabhängig, $\mathbb{P}(X_j = 1) = p; \quad \mathbb{P}(X_j = 0) = 1 - p$
$\to X_j \sim B_{1,p}$
$\overset{2.9.}{\Rightarrow} X_1 + \ldots + X_n \sim B_{n,p}$

$$\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \text{Genau k der } X_j(\omega) \text{ sind } 1\right\}$$

Addition stetiger Zufallsgrößen

$$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(t)\, dt$$

$$\mathbb{P}(\alpha \leq Y \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} q(s)\, ds$$

$$\mathbb{P}(\alpha \leq X + Y \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} r(z)\, dz$$

Frage

Wie berechnet sich r aus p und q?

Theorem 2.10
X habe Verteilungsdichte p, Y q und X,Y unabhängig. Dann hat $X + Y$ die Verteilungsdichte r mit $r = p * q$ (Faltung) und

$$r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x-y)\ q(y)\ dy = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\ q(x-y)\ dy$$

<u>Beweis:</u>
$Z := X + Y, \quad t \in \mathbb{R},$
$B_t := \{(x,y) : \quad x + y \leq t\} \subseteq \mathbb{R}^2$
$\mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}((x,y) \in B_t) = \mathbb{P}_{X,Y}(B_t) = (*)$

entscheidend:
X,Y unabhängig: $\mathbb{P}_{X,Y}$ hat Dichte $p(x)q(y)$, d.h.

$$\mathbb{P}_{X,Y}(B) = \iint_B p(x)\ q(y)\ dx\ dy$$

$$(*) \qquad = \iint_{B_t} p(x)\ p(y)\ dx\ dy = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{t-x} q(y)\ p(x)\ dy\right]}_{(1)} dx$$

$$(1) \qquad -\infty < y \leq t - x \quad \rightarrow \quad -\infty < y + x \leq t \qquad u := y + x$$

$$\Rightarrow \qquad = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} q(u-x)\ du\ p(x)\ dx$$

$$\Rightarrow \qquad = \int_{-\infty}^{t} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\ q(u-x)\ dx\right]}_{(2)} du$$

$$(2) \qquad = r(u) = (p * q)(u)$$

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} r(u)\ du \quad \rightarrow \quad \text{r Verteilungsdichte von Z.}$$

Rest durch Substitution $\square$

Sei $\mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} p(x)\ dx \qquad \mathbb{P}(Y \leq t) = \int_{-\infty}^{t} q(y)\ dy$

$$\text{X,Y unabhängig} \quad \rightarrow \quad \mathbb{P}(X + Y \leq t) = \int_{-\infty}^{t} r(z)\ dz$$

wobei $r = p * q$, d.h.

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z-x)\ q(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\ q(z-x)\ dx$$

Beispiel 1
Zwei Bauteile gleicher Art, Lebensdauer exponential verteilt

- *nehmen 1. Bauteil in Betrieb*
- *bei Ausfall ersetzen durch 2. Bauteil*

Frage

$\mathbb{P}($*2. Bauteil in* $[1, b]$ *ausfällt)=?*
X_i *Lebenszeit des i-ten Bauteils* $(i = 1, 2)$
Dichten: $p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x > 0 \qquad q(y) = \lambda e^{-\lambda y} \qquad y > 0$

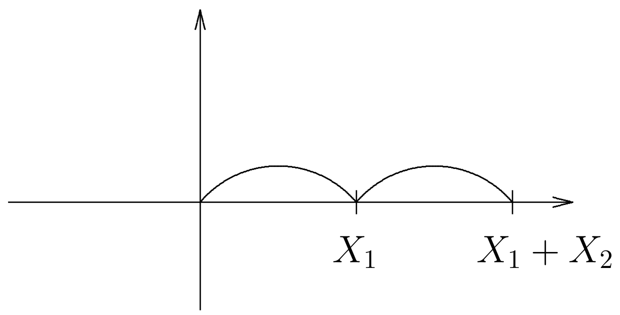


Abbildung 2.6: Beispiel 1

$$\rightarrow r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z-x)\ q(x)\ dx = \lambda^2 \int_{0}^{t} e^{-\lambda(z-x)} e^{-\lambda x}\ dx = \lambda^2 \int_{0}^{t} e^{-\lambda z}\ dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z} \qquad z > 0$$

$$\rightarrow \mathbb{P}(X_1 + X_2 \geq t) = \lambda^2 \int_{t}^{\infty} z e^{\lambda z}\ dz = \lambda(\lambda + t) e^{-\lambda t} \qquad t > o$$

Beispiel 2
$X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2), \quad Y \sim \mathcal{N}(b, \mu^2), \quad X, Y$ *unabhängig*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\frac{1}{2}(x-a)^2}{\sigma^2}} \qquad q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\mu} e^{-\frac{\frac{1}{2}(y-b)^2}{\mu^2}}$$

$$r(z) = \frac{1}{2\pi\sigma\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\frac{1}{2}(z-x-a)^2}{\sigma^2}} e^{\frac{-\frac{1}{2}(x-b)^2}{\mu^2}} \, dx$$

$$X + Y \sim \mathcal{N}(a + b, \sigma^2 + \mu^2)$$

2.6 Erwartungswert

Gegeben sei eine Zufallsgröße X, suchen einen „mittleren“ Wert von X

Analyse

X nimmt nur die Werte $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ an

$$\mathbb{P}(X = x_k) = p_k, \quad 1 \leq k \leq n$$

N unabhängige Versuche gemäß X, dann nimmt X ungefähr $N \cdot p_k$ den Wert x_n an

$$\begin{aligned} \text{Durchschnitt} &= \frac{1}{N} \{x_1 \cdot \text{ Eintreten Zahl von } x_1 + \ldots + x_n \cdot \text{ Eintreten Zahl von } x_n\} \\ &= \frac{1}{N} \{x_1 N p_1 + \ldots + x_n N p_n\} \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j p_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbb{P}(X = x_j) \end{aligned}$$

Beispiel 1
Würfel
$\mathbb{P}(X = 1) = \ldots = \mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{6}$
Durchschnitt$= 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + \ldots + 6 \cdot \mathbb{P}(X = 6) = \frac{1 + \ldots + 1}{6} = 3.5$

Beispiel 2
$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{3} \qquad \mathbb{P}(X = -4) = \frac{2}{3}$
Durchschnitt$= 2 \cdot \frac{1}{3} + (-4)\frac{2}{3} = -2$

Definition 2.6
Sei X eine Zufallsgröße mit möglichen Werten $x_1, x_2, \ldots$ *aus* $\mathbb{R}$

1) gilt $x_k \geq 0$ für $k = 1, 2, \ldots$, so setzt man:

$$\mathbb{E}X := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \mathbb{P}(X = x_k) \qquad (\mathbb{E}X = \infty \text{ möglich})$$

2) Sind die $x_n \in \mathbb{R}$ beliebig und gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \mathbb{P}(X = x_k) < \infty$$

so setzt man:

$$\mathbb{E}X := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \mathbb{P}(X = x_k)$$

$\mathbb{E}X$ heisst Erwartungswert der Zufallsgröße X

Beispiel 1
Münzwurf, 0 oder 1 mit $p = \frac{1}{2}$
x Euro Einsatz: $0 \rightarrow$ verloren $(x = 0)$ $\quad 1 \rightarrow$ Gewinn $2x$
Strategie:
1. Spiel 1 Euro Einsatz
bei Verlust
2. Spiel 2 Euro Einsatz
bei Verlust
3. Spiel 4 Euro Einsatz
bei Verlust
$\vdots$
k. Spiel 2^{k-1} Euro Einsatz
Im k-ten Spiel Gewinn: $\rightarrow$ 2^k Euro Gewinn $\rightarrow$ $1 + 2 + 3 + \ldots + 2^{k-1}$ Einsatz bis dato$= 2^k - 1$ $\rightarrow$ Gewinn: $2^k - (2^k - 1) = 1$ Euro
$\{$ Einsatz $2^k - 1\} = \{$ Im k-ten Spiel eine 1$\}$
X benötigter Einsatz

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} (2^k - 1) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X = 2^k - 1)}_{2^{\frac{1}{k}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 1}{2^k} = \infty!$$

(deshalb: Höchsteinsatz)

Beispiel 2
$X \sim B_{n,p}$
Mögliche Werte von X sind $0 \ldots n$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \mathbb{E}X &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} p^k (1-p)^{n-1-k} \\
&= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\
&= np(p+1-p)^{n-1} = np
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ *bei einem verfälschten Münzwurf tritt im Durchschnitt* np *oft die 1 ein*

Beispiel 3
X Sei gleichverteilt auf $\{x_1 \dots x_n\}$

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{n} x_k \underbrace{\mathbb{P}(X = x_k)}_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

arithmetisches Mittel

Beispiel 4
X Poissonverteilt

$$\mathbb{E}X = \sum_{K=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = \lambda$$

Deutung: Zugriff auf eine Seite
im Schnitt pro Tag 1000 Zugriffe
$\rightarrow \mathbb{P}($*k Zugriffe pro Tag*$) = \frac{1000^k}{k!} e^{-1}000$

Beispiel 5
$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k \quad k = 0, 1, \dots$
$X = k \Leftrightarrow$ *im* $(k+1)$. *Versuch erstmals eine 1*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \sum_{k=0}^{\infty} pk(1-p)^k \qquad k=0 \Rightarrow 0\\ &= p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k\\ &= p(1-p)\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}\end{aligned}$$

$$f(p) := \underbrace{\sum_{K=0}^{\infty}(1-p)^k}_{f'(p)=-\sum\limits_{k=0}^{\infty} k(1-p)^{k-1}} = \frac{1}{1-(1-p)} = \underbrace{\frac{1}{p}}_{f'(p)=-\frac{1}{p^2}}$$

$$\rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p^2}$$

$$\mathbb{E}X = \frac{p(1-p)}{p^2} = \frac{1-p}{p}$$

Beispiel 1
Würfeln bis zum ersten Erscheinen einer 6
Wie viele Würfe sind im Durchschnitt nötig, bis zum ersten Erscheinen der 6?
$p = \frac{1}{6}; \qquad 1-p = \frac{5}{6}$
$\mathbb{E}X = 5$ *Im Durchschnitt erscheint die 6 im 6. Wurf*

Beispiel 2
Erstmals Rot im Roulette
$p_{rot} = \frac{18}{37}; \qquad 1-p = \frac{19}{37}$
$\mathbb{E}X = \frac{\frac{10}{37}}{\frac{18}{37}} = \frac{19}{18}$

Erwartungswert stetiger Zufallsgrößen

$$\mathbb{P}(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} p(s)\, ds \qquad \mathbb{E}X = ?$$

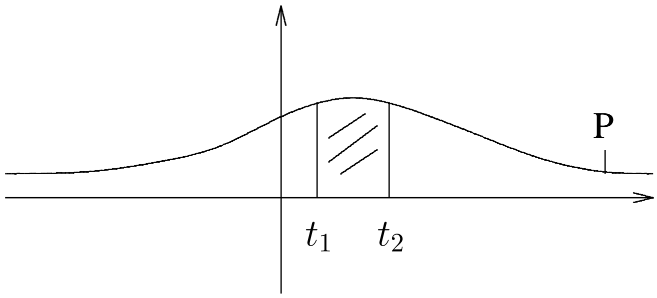


Abbildung 2.7: Erwartungswert einer stetigen Zufallsgröße

Analyse

$$\mathbb{P}(t_1 \leq X \leq t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(s)\ ds \sim (t_2 - t_1)p(t_1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} t_k \mathbb{P}(t_{k-1} \leq X \leq t_k) \sim \sum_{k=1}^{n} t_k(t_k - t_{k-1})p(t_{k-1}) \quad \to \int_{-\infty}^{\infty} tp(t)\ dt$$

$\mathbb{E}X$ Erwartungswert oder auch Mittelwert
Wenn X höchstens abzählbar viele Werte annimmt, $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}$, dann ist der (diskrete) Erwartungswert (falls er existiert):

$$\mathbb{E}X := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

X stetige Zufallsgröße, d.h. es existiert eine Verteilungsdichte $p : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} p(s)\ ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{E}X =?$
Approximation von X durch diskrete Zufallsgröße

Definition 2.7
X mit Verteilungsdichte p besitzt ein Erwartungswert, wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|p(t)\ dt < \infty$$

$$\text{Stetiger Erwartungswert: } \mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} tp(t)\ dt$$

Beispiel 1
X sei gleichverteilt auf $[a, b]$, *d.h. Verteilungsdichte p hat die Gestalt:*

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : \quad a \le t \le b \\ 0 & : \quad \textit{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} tp(t)\ dt = \int\limits_{a}^{b} t\frac{1}{b-a}\ dt = \frac{b^2 - a^2}{2}\frac{1}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

Mitte des Intervalls

Beispiel 2
$X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t-a)^2}{2\sigma^2}}\ dt \qquad \textit{Substitution: } t - a := s \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (s+a)e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}}\ ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} se^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}}\ ds + a\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}}\ ds \\ &= 0 + a \cdot 1 = a \end{aligned}$$

Beispiel 3
X exponentialverteilt mit $\lambda > 0$

$$p(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & : \quad t > 0 \\ 0 & : \quad t < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \mathbb{E}X = \lambda \int\limits_{0}^{\infty} te^{-\lambda t}\ dt = \frac{1}{\lambda} \int\limits_{0}^{\infty} se^{-s}\ ds = \frac{1}{\lambda} \cdot 1 = \frac{1}{\lambda}$$

Die Lebensdauer eines Bauteils sei exponentialverteilt. Im Durchschnitt arbeitet das Bauelement 10 Zeiteinheiten.

$$\rightarrow \frac{1}{\lambda} = 10 \qquad \lambda = \frac{1}{10}$$

$$\rightarrow \mathbb{P}(\text{Bauelement arbeitet t Zeiteinheiten oder mehr}) = e^{-\frac{t}{10}}$$

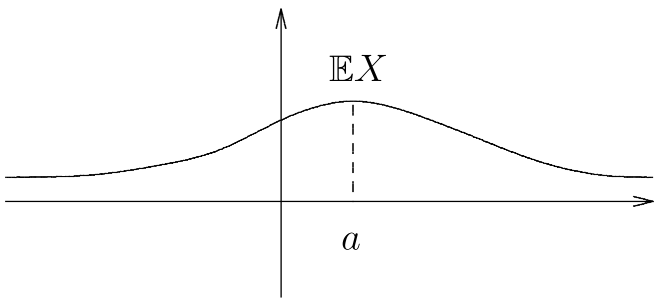


Abbildung 2.8: Erwartungswert (zu Beispiel 3)

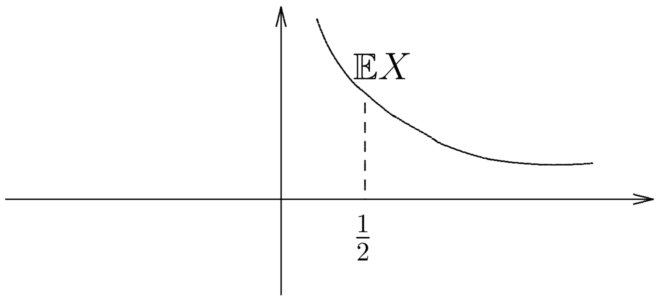


Abbildung 2.9: Erwartungswert (zu Beispiel 3)

Beispiel 4
X sei Cauchy*-verteilt, d.h.*

$$p(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}; \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|p(t)\, dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} t\frac{1}{1+t^2}\, dt = \infty$$

$\Rightarrow$ *X besitzt* <u>*keinen*</u> *Erwartungswert*

Eigenschaften von Erwartungswerten

1) <u>Linerarität</u>
   $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zufällige Größen, $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha\mathbb{E}X + \beta\mathbb{E}Y$$

   Anwendung:
   Erwartungswert beim Würfeln ist 3.5
   Würfel 3 mal, Summe der drei Würfe
   Erwartungswert: $3 \cdot 3.5 = 10.5$

2) Transformationssatz
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}f(X) \begin{array}{ll} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(x_k)\mathbb{P}(X = x_k) & \text{(diskret)} \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)p(t)\ dt & \text{(stetitg)} \end{array}$$

Beispiel 1
X sei $B_{n,p}$-verteilt

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{k=1}^{n} f(k^2)\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

Beispiel 2
X sei exponential verteilt

$$\mathbb{E}\log X = \int_0^{\infty} (\log t)\lambda e^{-\frac{\lambda}{t}}\ dt$$

$$\mathbb{E}\frac{1}{X} = \int_0^{\infty} \frac{1}{t}\lambda e^{-\frac{\lambda}{t}}\ dt = \infty$$

3) Multiplikationsformel
X,Y unabhängig

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = (\mathbb{E}X) \cdot (\mathbb{E}Y)$$

4) Monotonie

$$X \leq Y, \text{ d.h. } X(\omega) \leq Y(\omega), \quad \bigwedge_{\omega \in \Omega}$$
$$\to \quad \mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$$

$$\mathbb{E}(X + c) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}c = \mathbb{E}X + c \qquad \text{(c ist Konstante)}$$

2.7 Varianz und Kovarianz

Definition 2.8
Eine zufällige Größe X hat ein 2. Moment, *wenn gilt:*

$$\mathbb{E}|X|^2 < \infty, \text{ d.h. } \begin{array}{ll} \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2\mathbb{P}(X = x_k) < \infty & \textit{(diskret)} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2p(t)\ dt < \infty & \textit{(stetig)} \end{array}$$

Satz 2.11
Besitzt X ein 2. Moment, so existiert $\mathbb{E}X$.

Beweis:

$$(a-b)^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{(a^2+b^2)}{2} \geq a \cdot b \quad a,b > 0$$

$$b = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{a^2+1}{2} \geq a \quad \rightarrow \quad |X(\omega)| \leq \frac{1}{2}|X(\omega)|^2 + \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}|X| \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}|X|^2 + \frac{1}{2} < \infty \quad \rightarrow \quad \mathbb{E}|X| = \left\{ \begin{array}{c} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|p(t)\ dt \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|\mathbb{P}(X = x_k) \end{array} \right\} \text{Def. EW. ex.}$$

□

Aufgabe

Man konstruiere X mit $\mathbb{E}X$ aber ohne 2. Moment!

Folgerung

X habe 2. Moment, $\quad a = \mathbb{E}X$

$$\mathbb{E}(X-a)^2 = \mathbb{E}X^2 - 2a\mathbb{E}X + a^2 < \infty$$

Definition 2.9
Sei X eine Zufallsgröße mit 2. Moment. Die Varianz (Streuung, Dispersion)

$$\mathbb{V}X := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$$

ist der mittlere quadratische Abstand von X zum Erwartungswert. Wenn $\mathbb{V}X$ groß: Im Mittle nimmt X Werte weit entfernt von $\mathbb{E}X$ an.

Wichtigste Kenngröße von X ist Erwartungswert, zweitwichtigste ist die Varianz!

Rechenregeln

1) $a = \mathbb{E}X \quad \rightarrow \quad \mathbb{V}X = \mathbb{E}(X-a)^2 = \mathbb{E}[X^2 - 2aX + a^2] \overset{\text{Linearität}}{=} \mathbb{E}X^2 - 2a\mathbb{E}X + a^2$

$$= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{V}X$$

2) Sei X diskret, $\quad a = \mathbb{E}X$

$$\rightarrow \mathbb{V}X = \sum_{K=1}^{\infty} (x_k - a)^2 \mathbb{P}(X = x_k)$$

3) Sei X stetig, p Dichte

$$\rightarrow \mathbb{V}X = \int_{-\infty}^{\infty} (t-a)^2 p(t)\, dt$$

4) $\mathbb{P}(X = c) = 1 \qquad \mathbb{E}X = c$

$$\rightarrow \mathbb{P}(X - c = 0) = 1 \quad \rightarrow \quad \mathbb{V}X = 0 \cdot \mathbb{P}(X = c) = 0$$

5)
$$\mathbb{V}(\alpha X + \beta) = \mathbb{E}((\alpha X + \beta) - \underbrace{\mathbb{E}(\alpha X + \beta)}_{=\alpha\mathbb{E}X+\beta})^2 = \mathbb{E}\alpha^2(X - \mathbb{E}X)^2 = \alpha^2\mathbb{V}X$$

$$\mathbb{V}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \mathbb{V}X$$

6) X,Y sind unabhängig, $\quad a = \mathbb{E}X, b = \mathbb{E}Y$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X+Y) &= \mathbb{E}(X + Y - \underbrace{\mathbb{E}(X+Y)}_{a+b})^2 \\ &= \mathbb{E}(X-a)^2 - 2\mathbb{E}(X-a)(Y-b) + \mathbb{E}(Y-b)^2 \\ &= \mathbb{V}X - (*) + \mathbb{V}Y\end{aligned}$$

da X,Y unabhängig $\quad \rightarrow \quad X - a, Y - a$ sind unabhängig
$\rightarrow \quad \mathbb{E}(X-a)(Y-b) = \mathbb{E}(X-a)\mathbb{E}(Y-b) = 0^2$

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}X + \mathbb{V}Y \qquad \text{für X,Y unabhängig}$$

Beispiel 1
X sei gleichverteilt auf $\{x_1, \dots, x_n\}$

$$a = \mathbb{E}X = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \quad \rightarrow \quad \mathbb{V}X = \frac{1}{N}\sum_{j=1} (x_j - a)^2$$

X sei gleichverteilt auf $\{1,\ldots,6\} \quad \rightarrow \quad a = 3.5$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}X &= \frac{1}{6}[(1-\frac{7}{2})^2 + (2-\frac{7}{2})^2 + \ldots + (6-\frac{7}{2})^2] \\ &= \frac{1}{6}(\frac{25}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{70}{4} = \frac{35}{12} \qquad \text{(Varianz beim Würfeln)} \end{aligned}$$

Beispiel 2
X sei gleichverteilt auf $[a,b]$

$$\mathbb{E}X = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{1}{a-b}\int_a^b t^2\,dt = \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a} = \frac{a^2+ab+b^2}{4}$$

$$\mathbb{V}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12} - \frac{ab}{6} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Beispiel 3
X ist $B_{1,p}$*-verteilt*
$\rightarrow \quad \mathbb{P}(X=1) = p; \quad \mathbb{P}(X=0) = 1-p$

$$\mathbb{E}X = p$$

$$\mathbb{E}X^2 = 0^2(1-p) + 1^2 p = p$$

$$\mathbb{V}X = p - p^2 = p(1-p)$$

$X_1,\ldots,X_n$ *unabhängig* $B_{1,p}$*-verteilt*
$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \rightarrow \quad X \sim B_{n,p}$

$$\mathbb{V}X = \mathbb{V}X_1 + \ldots + \mathbb{V}X_n = n \cdot p(1-p)$$

Varianz wird maximal für $p = \frac{1}{2}$

Beispiel 4
X Poissonverteilt mit $\lambda > 0$

$$\mathbb{E}X = \lambda$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda \left[\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right] \\
&= \lambda \left[\mathbb{E}X + 1 \right] \\
&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad \mathbb{V}X = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Beispiel 5
X sei $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$-verteilt

$$\mathbb{E}X = a$$

$$\mathbb{V}X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{\frac{1}{2}(x-a)^2}{\sigma^2}}\, dx \qquad (*)$$

$$y := \frac{(x-a)}{\sigma} \qquad dx = \sigma dy$$

$$\rightarrow (*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \sigma^2 e^{-\frac{y^2}{\sigma^2}}\, dy$$

$$\overset{\text{2-malige part. Integration}}{=} \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{\sigma^2}}\, dy = \sigma^2 \cdot 1$$

$X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ *a Erwartungswert, σ^2 Varianz*

Kovarianz

Gegeben seien Zufallsgrößen X und Y. Im Allgemeinen sind X und Y nicht unabhängig. Wir suchen ein Maß für die Abhängigkeit

Beispiel 1
X sei Körpergröße einer Person, Y sei Gewicht
„Wie“ abhängig sind X und Y?

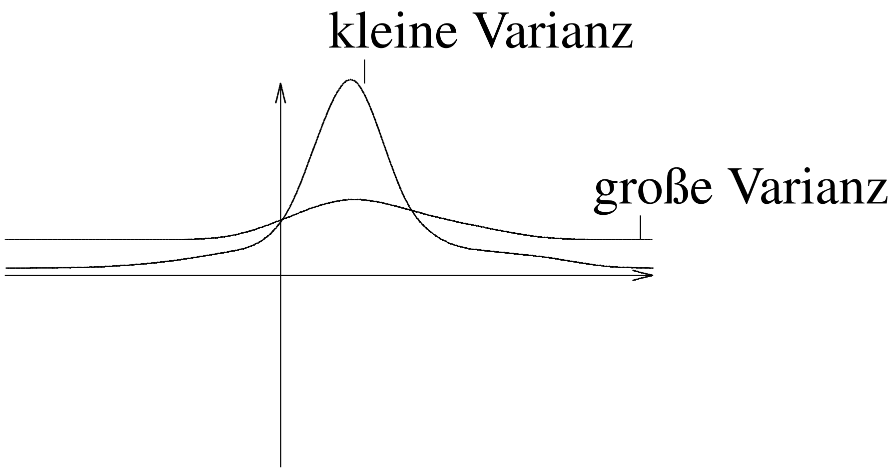


Abbildung 2.10: Verschieden Varianzen der Normalverteilung

Vorbetrachtung

Seien X,Y unabhänig, $a = \mathbb{E}X, b = \mathbb{E}Y$

$$\mathbb{E}(X-a)(Y-b) \overset{\text{unabh.}}{=} \mathbb{E}(X-a)\mathbb{E}(Y-b) = (a-a)(b-b) = 0$$

Definition 2.10
X,Y seien zufällige Größen mit 2. Moment, $a = \mathbb{E}X, b = \mathbb{E}Y$

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}(X-a)(Y-b)$$

die Kovarianz von X und Y

Eigenschaften

1) $cov(X,Y) = cov(Y,X)$
2) X und X heißen unkorrelliert, wenn $cov(X,Y) = 0$
   unabhängig $\Rightarrow$ unkorrelliert $\not\Leftarrow$
3)
$$cov(X,Y) \leq (\mathbb{V}X)(\mathbb{V}Y)$$
$$\varrho(X,Y) := \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}X \cdot \mathbb{V}Y}} \qquad \text{(Korrelationskoeffizient)}$$
$$-1 \leq \varrho(X,Y) \leq 1$$

   $\varrho(X,Y)$ nahe bei 1 oder -1: Starke Korrelation

$$\varrho(X,X) = 1 \qquad \varrho(X,-X) = -1 \qquad \varrho(X,\frac{X}{2}) = 1$$

4) $p_{ij} := \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$ (diskreter Fall)

$$cov(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} p_{ij}(x_i - a)(y_j - b) \qquad \begin{aligned} a &= \mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} p_{i.} \cdot x_i \\ b &= \mathbb{E}Y = \sum_{j=1}^{\infty} p_{.j} \cdot x_j \end{aligned}$$

5) Stetiger Fall:$\mathbb{P}_{(X,Y)}$ hat eine Dichte von $p : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$

$$cov(X,Y) = \iint_{-\infty}^{\infty} p(t,s)(t-a)(s-b)\ dt\ ds$$

$a = \mathbb{E}X; \quad b = \mathbb{E}Y$

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} t \left[\int_{-\infty}^{\infty} tp(t,s)\ ds \right] dt$$

$$b = \int_{-\infty}^{\infty} s \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(t,s)\ ds \right] dt$$

Beispiel 1

Urne mit vier Kugeln $(0,0,1,1)$
Ziehen zwei Kugeln <u>*ohne*</u> *zurücklegen*
X (Y) ist der Wert der ersten (zweiten) Kugel

$X\backslash Y$	0	1	
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$\mathbb{E}X = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$
$\mathbb{E}X = \frac{1}{2}$
$\mathbb{V}X = \frac{1}{2}(0 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$
$\mathbb{V}Y = \frac{1}{4}$

$$cov(X,Y) = \frac{1}{6}(0-\frac{1}{2})(0-\frac{1}{2}) + \frac{1}{3}(0-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2}) + \frac{1}{3}(1-\frac{1}{2})(0-\frac{1}{2}) + \frac{1}{6}(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{12}$$

$$\varrho(X,Y) = \frac{-\frac{1}{12}}{\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}}} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$$

Beispiel 2

Zweimaliges Würfeln, X ist Minimum der beiden Würfe, Y ist das Maximum

$X\backslash Y$	1	2	3	4	5	6	
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$		$\dots$			$\frac{11}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$		$\dots$		$\frac{9}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$		$\dots$	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\dots$	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	

$\mathbb{E}X = 1\frac{11}{36} + 2\frac{9}{36} + \ldots + 6\frac{1}{36} = \frac{91}{36} \approx 2.528$
$\mathbb{E}Y = 1\frac{1}{36} + 2\frac{3}{36} + \ldots + 6\frac{11}{36} = \frac{161}{36} \approx 4.472$
$\mathbb{V}X = \frac{11}{36}(1 - \frac{91}{36})^2 + \ldots + \frac{1}{36}(6 - \frac{91}{36})^2$
$= \frac{2555}{1296} \approx 1.97 = \mathbb{V}Y$

$$
\begin{aligned}
cov(X,Y) &= \mathbb{E}(X-\frac{91}{36})(Y-\frac{161}{36}) \\
&= \frac{1}{36}(1-\frac{91}{36})(1-\frac{161}{36})+\frac{1}{18}(1-\frac{91}{36})(2-\frac{161}{36}) \\
&+\ldots+\frac{1}{36}(6-\frac{91}{36})(6-\frac{161}{36})=\frac{1225}{1296}
\end{aligned}
$$

$$\varrho(X,Y)=\frac{\frac{1225}{1296}}{\frac{2555}{1296}}=\frac{1225}{2555}=\frac{35}{73}\approx 0.479$$

Beispiel 3

Der Vektor (X,Y) sei gleichverteilt auf dem Einheitskreis

$$V:=\left\{(t,s):t^2+s^2\leq 1\right\}$$

$$A\subseteq K,\quad \mathbb{P}((X,Y)\in A)=\frac{Vol_2(A)}{\pi}$$

Wissen: X;Y sind abhängig

$$p(t,s)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & : \quad t^2+s^2\leq 1\\ 0 & : \quad \text{sonst}\end{cases}$$

$$\mathbb{E}X=\mathbb{E}Y=0$$

$$
\begin{aligned}
cov(X,Y) &= \iint\limits_{-\infty}^{\infty}(t-0)(s-0)\ p(t,s)\ dt\ ds \\
&= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{t^2+s^2\leq 1} ts\ dt\ ds \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} t\left[\underbrace{\int\limits_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} s\ ds}_{0}\right]dt=0
\end{aligned}
$$

X,Y abhängig, aber unkorreliert!

3 Grenzwertsätze

Vorbemerkung

Gesetze der Wahrscheinlichkeitstheorie wirken bei einer großen Anzahl unabhängiger Versuche. Zum Beispiel Wahrscheinlichkeit, dass man in einem Spiel gewinnt:
$\rightarrow$ Keinerlei Aussage über Ausgang eines Spiels
$\rightarrow$ Sehr viele Spiele$\rightarrow$ es wirken Gesetze der Wahrscheinlichkeitstheorie

Mathematisches Modell

$X_1, X_2, \ldots$ Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen
$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n \in B_n)$
$\bigwedge_n \mathbb{P}(X_1 \in B_1) = \ldots = \mathbb{P}(X_n \in B_n)$
X_n Ergebnis im n-ten Versuch
$a = \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2 = \ldots = \mathbb{E}X_n$

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \rightarrow_{n\rightarrow\infty} a$$

Satz 3.1 (Tschebyschefsche Ungleichung)
Sei Y Zufallsgröße mit $\mathbb{P}(Y \geq 0) = 1$. *Dann gilt für* $c > 0$ *stets*

$$\mathbb{P}(Y \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}Y}{c}$$

<u>Beweis:</u>
(Y stetig)

$$\mathbb{E}Y = \int\limits_0^\infty tp(t)\ dt \geq \int\limits_c^\infty tp(t)\ dt \geq c \int\limits_c^\infty p(t)\ dt = c\mathbb{P}(Y \geq c) \qquad \square$$

Satz 3.2
Sei X Zufallsgröße mit 2. Moment $(\mathbb{E}|X|^2 < \infty)$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}X}{\varepsilon^2} \quad (\varepsilon > 0)$$

Beweis:

$$Y := (X - \mathbb{E}X)^2; \qquad c := \varepsilon^2$$
$$\mathbb{P}(Y \geq c) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X|)^2 \geq \varepsilon^2) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X|) \geq \varepsilon)$$
$$\mathbb{E}Y = \mathbb{V}X \quad \rightarrow \quad \text{Behauptung nach 3.1}$$

Beispiel 1
$X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$
$$\mathbb{P}(|X - a| \geq 3\sigma) \leq \frac{\mathbb{V}X}{9\sigma^2} = \frac{1}{9}$$
3σ*-Regel, mit großer Wahrscheinlichkeit liegt der beobachtete Wert in* $[a - 3\sigma, a + 3\sigma]$

Folgerung

$X_1, X_2, \ldots$unabhängig, identisch verteilt
$S_n := X_1 + X_2 + \ldots + X_n \qquad a = \mathbb{E}X_1$

$$\mathbb{E}S_n = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2 + \ldots + \mathbb{E}X_n = n \cdot a$$
$$\mathbb{V}S_n = n\mathbb{V}X_1 = n \cdot \sigma^2$$
$$\mathbb{E}(\frac{S_n}{n}) = a; \qquad \mathbb{V}(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n}\mathbb{V}(S_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$
$$\rightarrow \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}S_n}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n}\frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 0$$

Deutung

$\alpha > 0, \varepsilon > 0$ vorgegeben $\rightarrow$ es existiert ein $n_0 = n_0(\alpha, \varepsilon)$ mit $n \geq n_0 \rightarrow$ Wahrscheinlichkeit, ein $\omega \in \Omega$ mit
$$|\frac{S_n}{n} - a| \geq \varepsilon$$
ist $\leq \alpha$.
(Schwache Gesetz der großen Zahlen!)

Beispiel 1
Würfel n mal
$X_1, X_2, \ldots$ *Ergebnisse im 1.,2.,... Wurf*
$a = \mathbb{E}X_1 = \frac{7}{2}; \qquad \sigma^2 = \mathbb{V}X_1 = \frac{35}{12}$

$\rightarrow \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \frac{7}{2}| \geq \varepsilon) \leq \frac{35}{12n\varepsilon}$
$n = 10000; \quad \varepsilon = 0.1 \quad \rightarrow \quad \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \frac{7}{2}| \geq 0.1) \leq \frac{35}{12 \cdot 100} \approx 0.0291$
$\rightarrow \mathbb{P}(3.4 \leq \frac{S_n}{n} \leq 3.6) \geq 1 - \frac{35}{21 \cdot 100} \approx 0.971 \quad \rightarrow \quad \mathbb{P}(34000 \leq \frac{S_n}{n} \leq 36000) \geq 0.971 \ldots$

Anwendung

Führen beliebig viele gleichartige Versuche durch:
$X_1, X_2, \ldots$ Ergebnisse. $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ (Borelmenge)

$$Y_j\omega) := \begin{cases} 1 & : \quad X_j(\omega) \in \mathcal{B} \\ 0 & : \quad X_j(\omega) \notin \mathcal{B} \end{cases}$$

$$Y_j(\omega) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ im j-ten Versuch eingetreten}$$

$$Y_1 + \ldots + Y_n = \sharp \{j \leq n : X_j \in \mathcal{B}\}$$

$$r_n := \frac{Y_1, \ldots, Y_n}{n} \quad \text{rel. Häufigkeit des Eintretens von B beim n-ten Versuch}$$

$\mathbb{E}Y_j \stackrel{?}{=} 0\mathbb{P}(Y_j = 0) + 1\mathbb{P}(Y_j = 1) = \mathbb{P}(X_j \in \mathcal{B}) = \mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{B})$
Wahrscheinlichkeit des Eintretens von B in einem Versuch
$\mathbb{V}Y_j = p(1-p) \qquad p = \mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{B}) \quad \to \quad \mathbb{P}(|r_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \to_{n\to\infty} 0$
Relative Häufigkeiten konvergieren gegen die Wahrscheinlichkeiten des Eintretens

Starkes Gesetz der großen Zahlen

$a = \mathbb{E}X_1, X_1, X_2, \ldots$ unabhängig, identisch verteilte Zufallsgrößen

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j(\omega) = a) = 1$$

$\bigwedge_{\varepsilon > 0}$ existiert ein zufälliges n_0, so dass für $n > n_0$ stets gilt:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j - a \right| \leq \varepsilon$$

Zentraler Grenzwertsatz

$X_1, X_2, \ldots$ unabhängig identisch verteilte Zufallsgrößen,
$a = \mathbb{E}X_1, \quad \sigma^2 = \mathbb{V}X_1, \quad S_n := X_1 + \ldots + X_n$
$\mathbb{E}S_n = n \cdot a \qquad \mathbb{V}S_n = n \cdot \sigma^2$

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma}\right) = 0, \quad \mathbb{V}\left(\frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma}\right) = 1$$

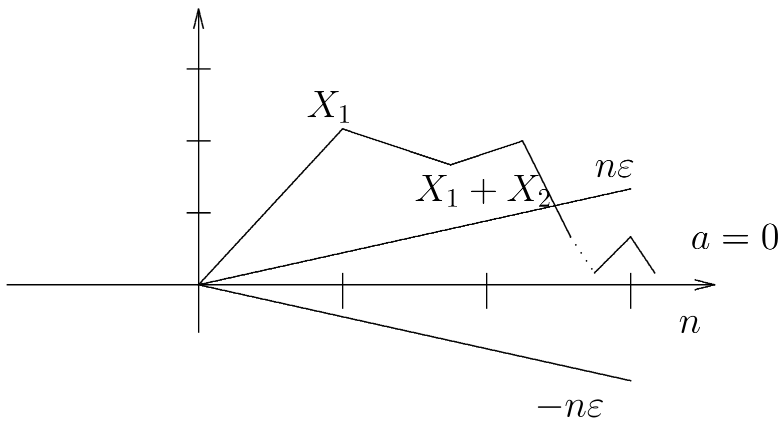
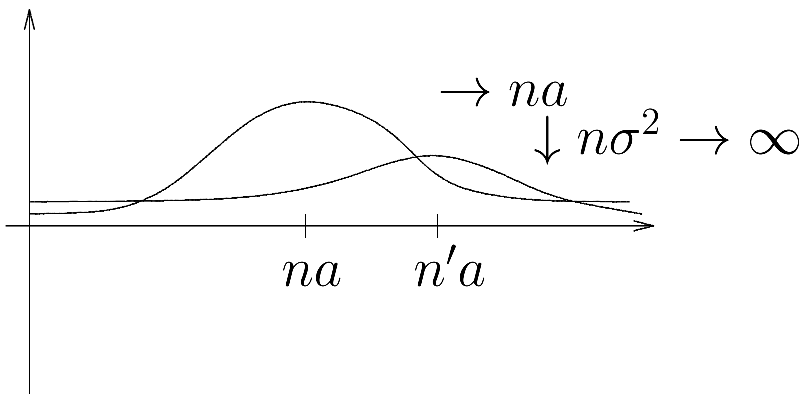


Abbildung 3.1: Gesetz der großen Zahlen



Theorem 3.3 (Zentraler Grenzwertsatz)
$X_1, X_2, \ldots$ *unabhänig, identisch verteilte zufällige Größen*
$a = \mathbb{E}X_1, \quad \sigma^2 = \mathbb{V}X_1;$
$\bigwedge\limits_{-\infty \le \alpha < \beta \le \infty}$ *gilt:*

$$\mathbb{P}(\alpha \le \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \le \beta) \to_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

d.h. $\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$ *ist „fast“* $\mathcal{N}(0,1)$*-verteilt*
S_n *ist „fast“* $\mathcal{N}(na, n\sigma^2)$*-verteilt*

Spezialfall:

$\mathbb{P}(X_j = 0) = 1 - p \qquad \mathbb{P}(X_j = 1) = p$
$a = p, \quad \sigma^2 = 1 - p$

$$\mathbb{P}(\alpha \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \beta) \to_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

$$S_n \sim B_{n,p}$$

$$\sum_{\left\{k \leq n : \alpha \leq \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \beta\right\}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \textit{Moivre-Laplace}\ (1740?)$$

Anwendungsbeispiele

Für „große“ n ersetze man die Verteilung von $\frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma}$ durch die $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung bzw. die Verteilung von S_n durch $\mathcal{N}(na, n\sigma^2)$

1) Würfel n mal,$a = \frac{7}{2}, \quad \sigma^2 = \frac{35}{12}$

$$\mathbb{P}(\alpha \leq \frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} \leq \beta) = \mathbb{P}(\alpha \leq \frac{S_n - na}{\sqrt{\frac{35n}{12}}} \leq \beta) \approx \mathcal{N}(0,1)([\alpha, \beta])$$

$n = 10000, \quad \alpha = -2, \quad \beta = -2$

$$\mathbb{P}(35000 - 200\sqrt{\frac{35}{12}} \leq S_n \leq 35000 + 200\sqrt{\frac{35}{12}}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-2}^{2} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \approx 0.9545$$

2) Rechnungen bei Banken
Gewinn oder Verlust der Banken seien gleichverteilt in $[-0.005, 0.005]$
$a = 0, \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{10^{-4}}{12}$
10^6 Rundungen

$$\mathbb{P}(\alpha \leq \frac{S_n}{\sqrt{\frac{10^6 \cdot 10^{-4}}{12}}} \leq \beta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

$\mathbb{P}(\alpha \frac{10}{\sqrt{12}} \leq S_n \leq \beta \frac{10}{\sqrt{12}})$
$\mathbb{P}(\text{Ein Euro oder mehr Verlust}) \to \beta = -\frac{\sqrt{12}}{10}, \quad \alpha = -\infty$
$\to \approx 0.364517\ldots$
2 Euro ≈ 0.149349
$\vdots$
10 Euro ≈ 0.00026603

3) Zufällige Irrfahrt
S_n - Ort nach n Schritten, d.h. Mögliche Werte: $-n, -n+2, \dots, n-2, n$
$p = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{E}S_n = 0, \quad \mathbb{V}S_n = \frac{n}{4}$

$$\mathbb{P}(\alpha \leq \frac{S_n}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \leq \beta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \mathbb{P}(2\sqrt{n}\alpha \leq S_n \leq 2\sqrt{n}\beta)$$

$$\alpha = -1, \beta = 1 \to \mathbb{P}(-2\sqrt{n} \leq S_n \leq 2\sqrt{n}) \approx 0.6826$$
$$\alpha = -2, \beta = 2 \to \mathbb{P}(-4\sqrt{n} \leq S_n \leq 4\sqrt{n}) \approx 0.9545$$

Index