Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. Dr. Linde

Semester: WS 2009/10

Vorwort

Dieses Dokument wurde als Skript für die auf der Titelseite genannte Vorlesung erstellt und wird jetzt im Rahmen des Projekts „Vorlesungsskripte der Fakultät für Mathematik und Informatik“ weiter betreut. Das Dokument wurde nach bestem Wissen und Gewissen angefertigt. Dennoch garantiert weder der auf der Titelseite genannte Dozent, die Personen, die an dem Dokument mitgewirkt haben, noch die Mitglieder des Projekts für dessen Fehlerfreiheit. Für etwaige Fehler und dessen Folgen wird von keiner der genannten Personen eine Haftung übernommen. Es steht jeder Person frei, dieses Dokument zu lesen, zu verändern oder auf anderen Medien verfügbar zu machen, solange ein Verweis auf die Internetadresse des Projekts `http://uni-skripte.lug-jena.de/` *enthalten ist.*

Diese Ausgabe trägt die Versionsnummer 2352 und ist vom 26. Oktober 2009. Eine neue Ausgabe könnte auf der Webseite des Projekts verfügbar sein.

Jeder ist dazu aufgerufen, Verbesserungen, Erweiterungen und Fehlerkorrekturen für das Skript einzureichen bzw. zu melden oder diese selbst einzupflegen – einfach eine E-Mail an die Mailingliste `<uni-skripte@lug-jena.de>` *senden. Weitere Informationen sind unter der oben genannten Internetadresse verfügbar.*

Hiermit möchten wir allen Personen, die an diesem Skript mitgewirkt haben, vielmals danken:

- *Jens Kubieziel* `<jens@kubieziel.de>` *(2009)*

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **6**

2 Wahrscheinlichkeitsmaße und Zufallsvariablen **7**

2.1 Wahrscheinlichkeitsräume 7
2.2 Verteilungsfunktion und Absolutstetigkeit 8
2.3 Produktmaße 9
2.4 Höhere Momente 10

3 Unabhängigkeit **12**

3.1 Unabhängigkeit von Mengen und Mengensystemen 12

Auflistung der Theoreme

Sätze

Satz 2.2 Satz von Radon-Nikodym 8
Satz 2.5 Ungleichung von Tschebyscheff 11

Definitionen und Festlegungen

Definition 3.1 Unabhängigkeit 12

1 Einleitung

Im Jahr 1900 war in Paris der Mathematikerkongress und David Hilbert hiel einen Vortrag zu den 23 wichtigsten Problemen der Mathematik. Das sechste Problem war, ein Fundament für die Wahrscheinlichkeitstheorie zu finden. Etwa zwei Jahre später entwickelte Henry Lebesgue die Maßtheorie sowie das Lebesgueintegral. In seiner Theorie ging es rein um analystische Fragestellungen. Das Buch „Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie“ von Kolmogorow erschien 1933 und war das Fundament der Theorie. Die Inhalte des Buches sind Grundlage der Vorlesung.

Herr Linde bezeichnet Kapitel mit §

2 Wahrscheinlichkeitsmaße und Zufallsvariablen

2.1 Wahrscheinlichkeitsräume

Ausgangspunkt ist der **Grundraum** $\Omega \neq \emptyset$. Die beobachteten **Ereignis**se liegen alle in Ω. Weiterhin braucht man eine Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$, eine **$\sigma$-Algebra** sowie ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** P mit den Eigenschaften:

- $P\colon \mathfrak{A} \to [0,1]$
- $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
- und P muss σ-additiv sein

Wenn man ein Maß mit den Eigenschaften hat, so ist $P(A)$ die Wahrscheinlichkeit ein Element aus A zu beobachten. Das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist ein **Wahrscheinlichkeitsraum**. Insgesamt ergeben sich die folgenden Eigenschaften:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $A \cap B = \emptyset, P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ und $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. $P(A^c) = 1 - P(A)$
5. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
6. $A_n \nearrow A, A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \Rightarrow P(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} P(A)$
7. $A_n \searrow A, A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A \Rightarrow P(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} P(A)$
8. $A_n \in \mathfrak{A} \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Beispiel 2.1

(1) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots,\}, \mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega), P(A) = \sum_{\{j\colon \omega_j \in A\}} P(\{\omega_j\})$. Dann ist P eindeutig durch die Werte $P(\{\omega_j\})$ für $j = 1,2,\dots$ bestimmt. Es ist $p_j :- P(\{\omega_j\})$ mit $p_j \geq 0, \sum_{j=1}^{\infty} = 1$.

(2) Sei $\Omega = \mathbb{N}_0$. Dann ist $P(\{k\}) :- \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = p_k$ die **Poissonverteilung**.

(3) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt und eine Borelmenge. Dann können wir definieren: $P(A) :- \frac{\lambda_d(\Omega \cap A)}{\lambda_d(\Omega)}$ und das ist die **Gleichverteilung** auf Ω.

2.2 Verteilungsfunktion und Absolutstetigkeit

Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ die σ-Algebra der Borelmengen. Weiter sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ und $F(t) :- P((-\infty, t])$ mit $F\colon \mathbb{R} \to [0{,}1]$. Dann ist F die **Verteilungsfunktion**.

Satz 2.1
Die Verteilungsfunktion F hat folgende Eigenschaften:

(i) $F(-\infty) = 0$ und $F(+\infty) = 1$.

(ii) F ist nicht fallend.

(iii) F ist rechtsseitig stetig.

Umgekehrt gilt: Sei F eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $[0{,}1]$ mit den obigen Eigenschaften. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß P mit

$$P((-\infty, t]) = F(t) \qquad t \in \mathbb{R}$$

Weitere Eigenschaften:

(a) $P((a, b]) = F(b) - F(a)$

(b) $F(t_0) - F(t_0 - 0) = h > 0 \Leftrightarrow P(\{t_0\}) = h$

(c) F ist genau dann stetig, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: P({t})=0.

(d) F hat höchstens abzählbar unendlich viele Sprungstellen.

Man sagt, $P \ll \lambda_1$ genau dann, wenn $\lambda_1(A) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$. Dann ist P **absolutstetig**.

Satz 2.2 (Satz von Radon-Nikodym)
$P \ll \lambda_1 \Leftrightarrow \exists p\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ messbar mit $F(t) = \int_{-\infty}^{t} p(x)\,dx$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Das ist äquivalent zu $P(A) = \int_A p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1_A(x) \cdot p(x)\,dx$. Das p ist λ_1-fast-überall eindeutig bestimmt und heißt **Radon-Nikodym-Dichte** oder **Dichte** von P bezüglich λ_1.

Die Menge $\{P$ Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit $P \ll \lambda_1\} ist äquivalent zu \{p\colon \mathbb{R} \to [0, \infty), p$ messbar und $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1\}$.

Insgesamt haben wir drei Typen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}$:

(a) die diskreten oder atomaren Wahrscheinlichkeitsmaße: $P_d = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \cdot \delta_{x_j}, p_j \geq 0, x_j \in \mathbb{R}, P_d(\{x_j\}) = p_j$.

(b) die absolutstetigen Wahrscheinlichkeitsmaße: $P_a \ll \lambda_1$

(c) die singulärstetigen Wahrscheinlichkeitsmaße: $P_s(\{x\}) = 0$ und P_s ist singulär zu λ_1 ($P_s \perp \lambda_1$), d. h. $\exists B \subseteq \mathbb{R}, \lambda_1(B) = 0, P_s(B) = 1$.

Für ein beliebiges P auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ können wir schreiben:

$$P = \lambda_d \cdot P_d + \lambda_a \cdot P_a + \lambda_s \cdot P_s \qquad \lambda_d + \lambda_a + \lambda_s = 1$$

Die wichtigsten Beispiele von Dichten:

(a) $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x\check{s}/2}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $P = \mathcal{N}(0{,}1)$

(b) $p_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)}{2\sigma^2}}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $P = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

(c) $p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ mit $\lambda > 0$ und $P = E_\lambda$

(d) $p(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{1+x^2}$ mit $x \in \mathbb{R}$ (**Cauchyverteilung**)

(e) **Halbkreisverteilung**

(f) Seien $a, b > 0$ mit $p(x) = \frac{1}{a^b \Gamma(b)} x^{b-1} e^{-\frac{x}{a}}$ mit $x > 0$ und $p(x) = 0$ für $x \leq 0$. (**Gammaverteilung**)

2.3 Produktmaße

Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, P_1), \ldots, (\Omega_n, \mathfrak{A}_n, P_n)$ Wahrscheinlichkeitsräume. Dann ist $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \colon \omega_j \in \Omega_j\}$ und $\mathfrak{A} = \sigma\{A_1 \times \ldots \times A_n \colon A_j \in \mathfrak{A}_j\} :- \mathfrak{A}_1 \odot \ldots \odot \mathfrak{A}_n$.

Satz 2.3
Auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß P mit:

$$P(A_1 \times \ldots \times A_n) = P_1(A_1) \cdot \ldots \cdot P_n(A_n) \qquad A_j \in \mathfrak{A}_j \tag{2.1}$$

Beweis:
Die Existenz eines Maßes P mit der Eigenschaft in Gleichung 2.1 wurde in der Maßtheorie bewiesen. Wir müssen noch zeigen, dass P ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Es gilt, $P(\Omega) = P(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n) = P_1(\Omega_1) \cdot \ldots \cdot P_n(\Omega_n) = 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$. ∎

Man schreibt $P = P_1 \odot \ldots \odot P_n$ ist ein **Produktmaß**.

Beispiel 2.2
Sei $\Omega_1 = \{x_1, x_2, \ldots\}$ und $\Omega_2 = \{y_1, y_2, \ldots\}$. Dann ist $\Omega = \{(x_i, y_j) \colon 1 \leq i, j < \infty\}$ und $P(\{x_i\} \times \{y_j\}) = P_1(\{x_i\}) \cdot P_2(\{y_j\})$.

Nehmen wir an, wir werfen eine Münze mit 0 und 1. Weiterhin würfeln wir mit einem fairen Würfel. Dann ist $\Omega_1 = \{0{,}1\}$ und $\Omega_2 = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6\}$ und $\Omega = \{(0{,}1), (0{,}2), (0{,}3), (0{,}4), (0{,}5), (0{,}$
Insgesamt ergibt sich $P(\{(0{,}1)\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$.

Vorlesung vom 2009-10-20 einbauen

Bemerkung 2.1 (Eigenschaften des Erwartungswertes)

(1) X, Y haben einen Erwartungswert und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann hat $\alpha X + \beta Y$ einen Erwartungswert und $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}X + \beta \mathbb{E}Y$.

(2) Sei $X \leq Y$, d. h. $X(\omega) \leq Y(\omega)$ für fast alle $\omega \in \Omega$. Dann ist $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$.

(3) Es gilt, dass $-|X| \leq X \leq |X|$. Dann ist $-\mathbb{E}|X| \leq X \leq \mathbb{E}|E|$, d. h. $\boxed{|\mathbb{E}X| \leq \mathbb{E}|X|}$.

(4) Sei c eine Konstante. Dann gilt, $\mathbb{E}c = c$ und $\mathbb{E}1_A = P(A)$.

(5) Sei $\mathbb{E}|X| < \infty$. Dann gilt, $\mathbb{E}(X 1_A) = \int_A X \, dP$. Es exiistiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft $P(A) < \delta$, dann folgt, $|\mathbb{E}(X 1_A)| < \varepsilon$. Das ist die Absolutstetigkeit des Integrals.

(6) Konvergiere $X_n \to X$ fast überall und $|X_n| \leq Y$ mit $\mathbb{E}Y < \infty$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X$ (Satz von Lebesgue).

    Sei $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \cdots$. Dann gilt, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E} \lim_{n\to\infty} X_n$.

Beispiel 2.3

(1) Sei X cauchyverteilt, d. h. $P(X \leq t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t} \frac{dt}{1+x^2}$. Dann ist $\mathbb{E}|X| = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x}{1+xš} = \infty$. Also existiert der Erwartungswert nicht.

(2) Sei X gleichverteilt auf $\{x_1, \ldots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}$. Der Erwartungswert ist $\mathbb{E}X = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j$.

(3) Sei X normalverteilt mit den Parametern μ und σ^2. Dann ist $\mathbb{E}X = \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-\mu)š/2\sigmaš} \, dx = \mu$.

2.4 Höhere Momente

Sei $n \geq 1$. Dann sagen wir, X hat ein n-tes Moment, wenn $\mathbb{E}|X|^n < \infty$ ist. Wenn p die Dichte von X ist, dann heißt das, dass $\mathbb{E}|X|^n = \int_{-\infty}^{\infty} |t|^n p(t) \, dt < \infty$. Der Erwartungswert existiert dann und heißt ***n*-tes Moment** von X.

Satz 2.4
Sei $1 \leq m \leq n < \infty$ und hat X ein n-tes Moment, so hat auch X ein m-tes Moment.

Beweis:
Den Satz kann man auf verschiedene Weisen zeigen. Wir verwenden die höldersche Ungleichung. Für ${}^1\!/_p + {}^1\!/_q = 1$ ist $\mathbb{E}|XY| \leq (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}(\mathbb{E}|Y|^p)^{1/q}$. Da $p = {}^n\!/_m >$ gilt, $\mathbb{E}|X|^m = \mathbb{E}|X|^m \cdot 1 \leq (\mathbb{E}|X|^n)^{m/n} \cdot \mathbb{E}1^{1-m/n}$. Somit ist $(\mathbb{E}|X|^m)^{1/m} \leq (\mathbb{E}|X|^n)^{1/n}$. ■

Bemerkung 2.2
In den 20er Jahren des vorigen Jahrhunderts gab es das **Momentenproblem**. Es wurde auch das Hamburger Momentenproblem genannt. Sei X, Y mit $\mathbb{E}|X|^n, \mathbb{E}|Y|^n < \infty$ für alle $n \geq 1$ und $\mathbb{E}X^n = \mathbb{E}Y^n$. Die Frage ist, ob $X =^d Y$ ist. Im Allgemeinen ist das nicht der Fall.

Beispiel 2.4
Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Dann ist $\mathbb{E}|X|^n = \int_0^\infty \sqrt{2/\pi}\, t^n e^{-t\text{š}/2}\, dt < \infty$ für alle $n \geq 1$. Also hat X Momente höherer Ordnung und es gilt, $\mathbb{E}X^n = 0$ für ungerade n und $\mathbb{E}X^{2m} = 2m - 1$.

Varianz und Kovarianz Es habe X ein zweites Moment und wir setzen $\mathbb{V}X :- \mathbb{E}(X-a)$š $= \mathbb{E}X$š $- (\mathbb{E}X)$š mit $a :- \mathbb{E}X$. Sei p die Dichte von X. Dann ist $\mathbb{V}X = \int_{-\infty}^{\infty} (t-a)^2 p(t)\, dt$.

Haben X und Y zweite Momente und $a = \mathbb{E}X$ sowie $b = \mathbb{E}Y$. Dann ist $\operatorname{cov}(X,Y) :- \mathbb{E}(X-a)(Y-b)$. Diese existiert, da $\mathbb{E}|X-a||Y-b| \leq (\mathbb{E}|X-a|^2)^{1/2}(\mathbb{E}|Y-b|^2)^{1/2} < \infty$. Weiter können wir berechnen: $\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - a\mathbb{E}X - b\mathbb{E}Y + ab = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$.

Bemerkung 2.3
Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(s,t) = (t-a)(s-b)$ und wenden den Übertragungssatz an. Dann ist $\operatorname{cov}(X,Y) = \int_\Omega f(X,Y)\, dP = \int_{\mathbb{R}^2} f(t,s)\, dP_{(X,Y)}(t,s)$. Link einfügen
Es folgt, dass die Kovarianz nur vom Verteilungsgesetz des Vektors (X,Y) abhängt.

Satz 2.5 (Ungleichung von Tschebyscheff)
Sie $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ eine nicht fallende Funktion mit der Eigenschaft $\varphi(-u) = \varphi(u)$. Es gelte, $\mathbb{E}\varphi(X) < \infty$. Dann folgt für $c > 0$:

$$P(|X| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}\varphi(X)}{\varphi(c)}$$

Beweis:
Aus $|X| \geq c$ folgt entweder $X \geq c$ oder $X \leq -c$. Damit folgt entweder $\varphi(X) \geq \varphi(c)$ oder $\varphi(X) \geq \varphi(-c) = \varphi(c)$. Also ist $\mathbb{E}\varphi(X) = \int_\Omega \varphi(X)\, dP \geq \int_{\{|X| \geq c\}} \varphi(X)\, dP \geq \int_{\{|X| \geq c\}} \varphi(x)\, dP = \varphi(c)P(|X| \geq c)$. ■

Beispiel 2.5
Sei $\varphi(t) = |t|^p$ für ein $p > 0$. Dann ist $P(|X| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}|X|^p}{c^p}$ mit $c > 0$. Für $p = 2$ und $a = \mathbb{E}X$ ist $P(|X - \mathbb{E}X| \geq c) \leq \frac{\mathbb{V}X}{c^2}$.

3 Unabhängigkeit

3.1 Unabhängigkeit von Mengen und Mengensystemen

Der Ausgangspunkt ist immer ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Sind $A, B \in \mathfrak{A}$, dann sind A und B genau dann unabhängig, wenn gilt, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Definition 3.1 (Unabhängigkeit)
Seien $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathfrak{A}$. Dann heißen die $(A_i)_{i \in I}$ genau dann **unabhängig**, wenn gilt, $\forall I_0 \subseteq I, I_0$ endlich und $P(\bigcap_{i \in I_0} A_i) = \prod_{i \in I_0} P(A_i)$.

Die (A_i) sind genau dann unabhängig, wenn alle endlichen Teilmengen der (A_i) unabhängig sind.

Die (A_i) heißen **paarweise unabhängig**, wenn $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ für alle $i \neq j$ und $i, j \in I$.

Bemerkung 3.1
Aus der Unabhängigkeit folgt die paarweise Unabhängigkeit. Die Umkehrung ist im Allgemeinen nicht richtig.

Definition 3.2
Seien $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ Teilmengen der σ-Algebra $\mathfrak{A}$. Die $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ sind genau dann unabhängig, wenn für alle $E_1 \in \mathfrak{E}_1, E_2 \in \mathfrak{E}_2$ gilt, $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$.

Bemerkung 3.2
Die obige Definition heißt *nicht*, dass die Mengen innerhalb von $\mathfrak{E}_1$ oder $\mathfrak{E}_2$ unabhängig sind.

Beispiel 3.1
Sei $\Omega = [0,1]^2$ und P die Gleichverteilung. Es ist $\mathfrak{E}_1 = \{A \times [0,1] \colon A \in \mathfrak{B}[0,1]\}$ und $\mathfrak{E}_2$ äquivalent.

Fehlende Abbildung

Grafik mit den Mengen zeichnen

Allgemein ist, $\mathfrak{E}_j \subseteq \mathfrak{A}$ mit $j \in J$. Dann heißen $(\mathfrak{E}_j)_{j\in J}$ genau dann **unabhängig**, wenn für alle endlichen $J_0 \in J$ die $(\mathfrak{E}_j)_{j\in J_0}$ unabhängig sind, d. h. für alle $E_j \in \mathfrak{E}_j$ und $j \in J_0$ gilt, dass $P(\bigcap_{j\in J_0} E_j) = \prod_{j\in J_0} P(E_j)$.

Satz 3.1
Es liege $\Omega \in \mathfrak{E}_1, \ldots, \Omega \in \mathfrak{E}_n$. Dann sind $\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_n$ genau dann unabhängig, wenn für alle $E_j \in \mathfrak{E}_j$ gilt, dass $P(\bigcap_{j=1}^n E_j) = \prod_{j=1}^n P(E_j)$.

Beweis:
Sei $I_0 \subseteq \{1, \ldots, n\}$ und man setze $E_i :- \Omega$ für $i \notin I_0$. ■

Literaturverzeichnis

[1] Math mode von Herbert Voss,
http://www.dante.de/CTAN//info/math/voss/mathmode/Mathmode.pdf

Index

A
absolutstetig, 8
σ-Algebra, 7

C
Cauchyverteilung, 9

D
Dichte, 8

E
Ereignis, 7

G
Gammaverteilung, 9
Gleichverteilung, 8
Grundraum, 7

H
Halbkreisverteilung, 9

L
Lebesgue
    Satz von, 10

M
Moment
    n tes, 10
Momentenproblem, 11

P
paarweise unabhängig, 12
Poissonverteilung, 7
Produktmaß, 10

R
Radon=Nikodym=Dichte, 8

S
Satz
    Lebesgue, 10

U
unabhängig, 12, 13

V
Verteilungsfunktion, 8

W
Wahrscheinlichkeitsmaß, 7
Wahrscheinlichkeitsraum, 7