Mengenlehre als Fundament für Mathematik und Informatik

HDoz Dr. Gerhard Lischke

Semester: SS 2008

Vorwort

Dieses Dokument wurde als Skript für die auf der Titelseite genannte Vorlesung erstellt und wird jetzt im Rahmen des Projekts „Vorlesungsskripte der Fakultät für Mathematik und Informatik“ weiter betreut. Das Dokument wurde nach bestem Wissen und Gewissen angefertigt. Dennoch garantiert weder der auf der Titelseite genannte Dozent, die Personen, die an dem Dokument mitgewirkt haben, noch die Mitglieder des Projekts für dessen Fehlerfreiheit. Für etwaige Fehler und dessen Folgen wird von keiner der genannten Personen eine Haftung übernommen. Es steht jeder Person frei, dieses Dokument zu lesen, zu verändern oder auf anderen Medien verfügbar zu machen, solange ein Verweis auf die Internetadresse des Projekts `http://www.minet.uni-jena.de/~joergs/skripte/` *enthalten ist.*

Diese Ausgabe trägt die Versionsnummer 1493 und ist vom 29. April 2008. Eine neue Ausgabe könnte auf der Webseite des Projekts verfügbar sein.

Jeder ist dazu aufgerufen, Verbesserungen, Erweiterungen und Fehlerkorrekturen für das Skript einzureichen bzw. zu melden oder diese selbst einzupflegen – einfach eine E-Mail an die Mailingliste <`skripte@listserv.uni-jena.de`> *senden. Weitere Informationen sind unter der oben genannten Internetadresse verfügbar.*

Hiermit möchten wir allen Personen, die an diesem Skript mitgewirkt haben, vielmals danken:

- *Jens Kubieziel* <`jens@kubieziel.de`> *(2008)*

Inhaltsverzeichnis

Auflistung der Theoreme

Sätze

Definitionen und Festlegungen

1 Einführung

Die Mengenlehre ist die Grundlage der Mathematik. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts fand man den Begriff der Punktmengen. Diese Theorie entwickelte sich in Zusammenhang mit anderen Gebieten. Auch die Informatik lässt sich präzise mengentheoretisch fassen. Beispielsweise kann man **Turingmaschinen** betrachten.

Es gilt, $[X, Z, f, g, h, z_0, z_1]$ ist eine Turingmaschine, falls X eine nichtleere endliche Menge (Alphabet), Z nichtleere endliche Menge (Zustandsmenge), f eindeutige Abbildung von $Z \times X$ in Z (Überführungsfunktion), g eindeutige Abbildung von $Z \times X$ in X (Schreibfunktion), h eindeutige Abbildung von $Z \times X$ in $\{-1, 0, 1\}$ (Transportfunktion) und $z_0, z_1 \in Z$ (Anfangs- und Endzustand) sind.

2 Kritik der naiven Mengenlehre

Als Begründer der Mengenlehre gilt der deutsche Mathematiker GEORG CANTOR (* 1845, † 1918). In seinem Werk „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“ im Jahr 1895 schrieb er:

> Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Nach dieser Definition richtete sich eine lange Zeit die Mathematik aus. Heute bezeichnet man diese CANTORsche Definition der Menge als naiv.

Einer der Hauptpersonen bei der Formalisierung war FRIEDRICH LUDWIG GOTTLOB FREGE (* 1848, † 1925). Er lebte und arbeitete den größten Teil seines Lebens in Jena. FREGE wird als der bedeutstende Logiker weltweit bezeichnet. In verschiedenen Arbeiten versuchte der Wissenschaftler die Mathematik aus der Mengenlehre heraus zu entwickeln. Die wesentliche Veröffentlichung war die „Begriffsschrift“[1]. In ihr formalisierte FREGE die Prädikatenlogik. Später kam das Werk „Die Grundlagen der Arithmetik“ hinzu. Dort wurde der Gedanke, die Mathematik aus der Logik aufzubauen, weiter fortgeschrieben. Jedoch entdeckte BETRAND RUSSELL im Jahr 1901 Widersprüche in dem Ansatz. Diese sind unter der Bezeichnung **Russellsche Antinomie** bekannt und setzten der naiven Mengenlehre ein Ende.

Sei dazu beispielsweise $\mathfrak{E}$ eine Eigenschaft. Dann existiert eine Menge $M_{\mathfrak{E}} = \{x\colon \mathfrak{E}(x)\}$. Dann ist die Russellsche Klasse $R := \{X\colon X \notin X\}$. Nun ist die Frage, ob gilt, $R \in R$. Bei genauer Betrachtung ergibt sich: $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$. Der Ausweg ist ein axiomatischer Aufbau der Mengenlehre.

Heutzutage gibt es sehr viele Axiomensysteme. Einige seien hier genannt.

Stufentheoretischer Aufbau, Typentheorie Dies wurde von WHITEHEAD[2] und RUSSELL entwickelt. Es gibt dabei nur einfache Mengen, die Urelemente enthalten und selbst keine Mengen enthalten können. Weiterhin werden Mengen n-ten Typs definiert. Darin können Mengen bis zum $n-1$-ten Typ enthalten sein. Diese Definition vermeidet die Antinomie und hat sich aufgrund der eingeschränkten Leistungsfähigkeit sowie der Kompliziertheit nicht durchgesetzt.

[1]Genauer: Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens
[2]Alfred North Whitehead, * 1861, † 1947, britischer Philosoph, Mathematiker und anglikanischer Bischof

Stufenfreier Aufbau Dieser geht zurück auf Zermelo[3], Fränkel[4] und Skolem[5] und ist ein axiomatischer Aufbau der Mengenlehre.

Klassenkalkül nach John von Neumann[6], Bernays[7], Gödel[8] und Quine[9]. Im Verlauf der Vorlesung wird eine modifizierte Variante hiervon vorgestellt.

[3] Ernst Zermelo, * 1871, † 1953, deutscher Mathematiker
[4] Adolf Abraham Halevi Fraenkel, * 1891, † 1965, deutsch-israelischer Mathematiker
[5] Albert Thoralf Skolem, * 1887, † 1963, norwegischer Mathematiker, Logiker und Philosoph
[6] János von Neumann zu Margitta, * 1903, † 1957, deutsch-ungarischer Mathematiker
[7] Paul Bernays, * 1888, † 1977, englischer Mathematiker
[8] Kurt Friedrich Gödel, * 1906, † 1978, deutscher Mathematiker
[9] Willard Van Orman Quine, * 1908, † 2000, amerikanischer Philosoph und Logiker

3 Eine Formalisierung der Mengenlehre

In diesem Kapitel sollen die Grundlagen der Logik gelegt werden. Für tiefgreifendere Erkenntnisse soll hier auf die Vorlesung „Logik“ verwiesen werden.

3.1 Logische Grundlagen

Grundsymbole und deren Benennung

$\tilde{}, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ aussagenlogische Funktoren. Anstelle von $\tilde{}$ nimmt man auch $\neg$.

$\forall$ **Generalisator**

$\exists$ **Partikularisator**

$(,)$ **technische Zeichen**

$=$ **Gleichheitszeichen**

$x, y, z, \ldots$ **Individuenvariablen**

$\in$ **zweistelliges Relationssymbol**

$\varnothing$ **Konstantensymbol**

Die Menge der erlaubten Ausdrücke wird mit $\mathfrak{ausd}$ bezeicnet.

Terme und Ausdrücke Als **Terme** kommen nur die Individuenvariablen und das Konstantensymbol in Frage. Man sagt, die Individuenvariable x kommt in der Zeichenreihe Z **vollfrei** vor, wenn x in Z vorkommt und an keiner Stelle des Vorkommens von x in Z ein Quantor (Symbol $\forall$ oder $\exists$) vor der Individuenvariable steht. Induktiv definieren wir die Menge $\mathfrak{ausd}$ aller Ausdrücke:

1. Sind t_1 und t_2 Terme, so sind die Zeichenreihen $t_1 \in t_2$ und $t_1 = t_2$ Ausdrücke.
2. a) Ist Z ein Ausdruck, dann ist $\neg Z$ ein Ausdruck.
   b) Mit Z_1 und Z_2 sind auch die Zeichenreihen $(Z_1 \vee Z_2), (Z_1 \wedge Z_2), (Z_1 \rightarrow Z_2), (Z_1 \leftrightarrow Z_2)$ Ausdrücke.
   c) Ist Z ein Ausdruck in dem die Variable x vollfrei vorkommt, so sind auch die Zeichenreihen $\forall x\, Z, \exists x\, Z$ Ausdrücke.
3. Weitere Ausdrücke gibt es nicht.

Logisches Schließen Sei X eine Menge (im üblichen, naiven Sinne) von Ausdrücken und H ein spezieller Ausdruck. Dann heißt H **Folgerung** aus X, wenn bei *jeder* Interpretation, bei der jeder Ausdruck aus X wahr wird, auch H wahr wird.

Wir bezeichnen $Fl(X)$ die Gesamtheit aller Folgerungen aus X. Man nennt X ein **Axiomensystem** und $Fl(X)$ die durch X erzeugte **elementare Theorie**.

Definitionen und Spracherweiterungen Sei H ein Ausdruck der die Variablen $x_1, \dots, x_n$ vollfrei enthält und keine weitere Variable frei[1] enthält und R ein bisher in der Sprache nicht vorkommendes Symbol. Dann kann man folgendes schreiben: $R(x_1, \dots, x_n) =: H$. Dies ist eine korrekte Definition und die Sprache wird um R erweitert.

Sei $H(y)$ ein Ausdruck der die Variablen $x_1, \dots, x_n, y$ vollfrei enthält und keine weitere Variable frei enthält. Der Wert von y sei im Falle des Wahrwerdens von $H(y)$ durch die Werte von $x_1, \dots, x_n$ eindeutig bestimmt. Weiter sei F ein neues Symbol. Man kann schreiben: $F(x_1, \dots, x_n) =: \iota y H(y)$ und bezeichnet ι als **bestimmten Artikel**.

Definition 3.1 (Term)

1. Jede Individuenvariable und jedes Konstantensymbol ist ein **Term**.
2. Sind F ein n-stelliges Funktionssymbol $t_1, \dots, t_n$ Terme, so ist die Zeichenreihe $F(t_1, \dots, t_n)$ ein **Term**.
3. Weitere Terme gibt es nicht.

3.2 Urelemente und Klassen

Zeichnung: großes viereck unterteilt in drei bereiche „Urlemente“, „Mengen“ und „Unmengen“. Geschweifte Klammer um alles „Dinge“ Urelemente und Mengen sind „Elemente“ und Mengen und Unmengen sind „Klassen“.

Definition 3.2
x Element $=: \exists y\ x \in y$ x Klasse $=: x = \emptyset \vee \exists y\ y \in x$ x Menge $=:$ x Klasse und x Element x Urelement $=:$ x Element und $\neg x$ Klasse x Unmenge $=: \neg x$ Element

Bemerkung 3.1
In der Mengenlehre von Zermelo-Fränkel wie auch im Klassenkalkül gibt es keine Urelemente.

Definition 3.3

a) $x \cap y =_{\text{Df}} \iota z(z \text{ Klasse } \wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow u \text{ Element } \wedge u \in x \wedge u \in y))$ **Durchschnitt** von x und y, gelesen: x geschnitten y

b) $x \cup y =_{\text{Df}} \iota z(z \text{ Klasse } \wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow u \text{ Element } \wedge (u \in x \vee u \in z)))$ **Vereinigung** von x und y, gelesen x vereinigt x

[1] Wenn sie nicht im Wirkungsbereich eines Quantors steht.

c) $x \setminus y =_{\mathrm{Df}} \iota z(z$ Klasse $\wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow u$ Element $\wedge u \in x \wedge \neg u \in y))$ **Differenz** von x und y, gelesen x minus y

d) $\overline{x} =_{\mathrm{Df}} \iota z(z$ Klasse $\wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow u$ Element $\wedge \neg u \in x))$ **Komplement** von x, gelesen x quer

e) $\mathbf{A} =_{\mathrm{Df}} \iota z(z$ Klasse $\wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow u$ Element $\wedge u = u))$ **Allklasse**

f) $\bigcap x =_{\mathrm{Df}} \iota z(z$ Klasse $\wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow u$ Element $\wedge \forall y(y \in x \rightarrow u \in y)))$ **Durchschnitt** über x

g) $\bigcup x =_{\mathrm{Df}} \iota z(z$ Klasse $\wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow u$ Element $\wedge \exists y(y \in x \wedge u \in y)))$ **Vereinigung** über x

h) $\{x, y\} =_{\mathrm{Df}} \iota z(z$ Klasse $\wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow u$ Element $\wedge (u = x \vee u = y)))$ **Paarklasse** oder **Zweierklasse** $x\ y$

i) $\{x\} =_{\mathrm{Df}} \{x, x\}$ **Einerklasse** x

j) $[x, y] =_{\mathrm{Df}} \{\{x\}, \{x, y\}\}$ **geordnetes Paar** $x\ y$

k) $x \times y =_{\mathrm{Df}} \iota z(z$ Klasse $\wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow u$ Element $\wedge \exists a \exists b(u = [a, b] \wedge a \in x \wedge b \in y)))$ **Kreuzprodukt** oder **kartesisches Produkt** von x und y

l) $\mathbf{R} =_{\mathrm{Df}} \iota z(z$ Klasse $\wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow u$ Element $\wedge \neg u \in u))$ **Russellsche Klasse**

m) $\mathbf{I} =_{\mathrm{Df}} \iota z(z$ Klasse $\wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow u$ Element $\wedge \neg u$ Klasse **Individuenbereich** oder **Urelementebereich**

3.3 Axiom der leeren Klasse

Axiom 3.1 (Axiom der leeren Klasse)

$$\neg \exists x\ x \in \emptyset$$

3.4 Klassenbildungsaxiome

Axiom 3.2 (Klassenbildungsaxiome oder Komprehensionsaxiome)

$$\exists z(z \text{ Klasse } \wedge \forall z(x \in z \leftrightarrow x \text{ Element } \wedge H(x)))$$

Dabei ist $H(x)$ ein Ausdruck, der x vollfrei und z nicht enthält.

3.5 Extensionalitätsaxiom

Axiom 3.3

$$\forall x \forall y(x \text{ Klasse } \wedge y \text{ Klasse } \wedge \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

Zwei Klassen, die die gleichen Elemente enthalten sind identisch.

Satz 3.1
Ist $H(x)$ ein Ausdruck, der x vollfrei und z nicht enthält, so wird durch $H(x)$ genau eine Klasse z bestimmt, d. h. es gilt:

$\exists z(z \text{ Klasse } \wedge \forall z(x \in z \leftrightarrow x \text{ Element } \wedge H(x)) \wedge (\forall z'(z' \text{ Klasse } \wedge \forall x(x \in z' \leftrightarrow x \text{ Element } \wedge H(x)) \rightarrow z = z'))$

Man bezeichnet diese eindeutig bestimmte Klasse mit $\iota z(z \text{ Klasse } \wedge \forall x(x \in z \leftrightarrow x \text{ Element } \wedge H(x)))$.

Beweis:
Der angegebene Ausdruck ist in der Folgerungshülle $Fl(\{II, III\})$. ∎

Definition 3.4

Satz 3.2

$$[a, b] = [c, d] \leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Bemerkung 3.2
- $[x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$
- $x_1 \times \ldots \times x_n = (x_1 \times \ldots \times x_{n-1}) \times c_n$ für $n > 2$

Bemerkung 3.3
Führt die Definition der Russellsche Klasse nicht zur gleichnamigen Antinomie? Wir haben $\forall u(u \in R \leftrightarrow u \text{ Element } \wedge \neg u \in u)$ und können schreiben $R \in R \leftrightarrow R \text{ Element } \wedge \neg R \in R$. Sei nun R eine Menge oder ein Element. Dann folgt, $R \in R \leftrightarrow \neg R \in R$ und somit ist R eine Unmenge.

Satz 3.3
R und A (Allklasse) sind Unmengen.

Beweis:
siehe oben. für A später. ∎

3.6 Mengenabbildungsaxiome

Definition 3.5

$$x \subseteq y =_{\text{Df}} x \text{ Klasse } \wedge y \text{ Klasse } \wedge \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$$
$$\mathfrak{P}(x) =_{\text{Df}} \iota z(z \text{ Klasse } \wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow u \text{ Element } \wedge u \subseteq x))$$

Man bezeichnet $\mathfrak{P}$ als **Potenzklasse** von x.

Definition 3.6
f **Abbildung** $=_{\mathrm{Df}} \exists x \exists y(x$ Klasse $\wedge\, y$ Klasse $\wedge\, f \subseteq x \times y)$
$D_f =_{\mathrm{Df}} \iota z(z$ Klasse $\wedge\, \forall u(u \in z \leftrightarrow u$ Element $\wedge\, \exists x[u,x] \in f))$
$R_f =_{\mathrm{Df}} \iota z(z$ Klasse $\wedge\, \forall u(u \in z \leftrightarrow u$ Element $\wedge\, \exists x[x,u] \in f))$
$f^{-1} =_{\mathrm{Df}} \iota z(z$ Klasse $\wedge\, \forall u(u \in z \leftrightarrow e$ Element $\wedge\, \exists x \exists y(u = [x,y] \wedge [y,x] \in f)))$
f **Funktion** $=_{\mathrm{Df}} f$ Abbildung $\wedge \forall x \forall y \forall z([x,y] \in f \wedge [x,z] \in f \rightarrow y = z)$
$x^y =_{\mathrm{Df}} \iota z(z$ Klasse $\wedge\, \forall f(f \in z \leftrightarrow f$ Element $\wedge\, f$ Funktion $\wedge\, D_f = y \wedge R_f \subseteq x))$ Dies ist die Klasse aller Funktionen von y in x. todo: align

Bemerkung 3.4
f **Relation** $=_{\mathrm{Df}} f$ Abbildung und f **Operation** $=_{\mathrm{Df}} f$ Funktion.

Axiom 3.4 (Mengenbildungsaxiome)

1. $\emptyset$ Menge
2. x Menge $\wedge y \subseteq x \rightarrow y$ Menge
3. x Element $\wedge y$ Element $\rightarrow \{x,y\}$ Menge
4. x Menge $\rightarrow \mathfrak{P}(x)$ Menge
5. x Menge $\rightarrow \bigcup x$ Menge
6. f Funktion $\wedge D_f$ Menge $\rightarrow R_f$ Menge

Satz 3.4

1. x Element $\rightarrow \{x\}$ Menge
2. x Element $\wedge y$ Element $\rightarrow [x,y]$ Menge
3. Ist $H(u)$ ein Ausdruck, der u vollfrei und z nicht enthält, so gilt: y Menge $\rightarrow \iota z(z$ Klasse $\wedge$ $\forall u(u \in z \leftrightarrow u \in y \wedge H(u)))$ Menge
4. x Menge und y Menge $\rightarrow x \cup y$ Menge
5. x Klasse und $\neg x = \emptyset \rightarrow \bigcap x$ Menge
6. x Menge und y Menge $\rightarrow x \times y$ Menge
7. x Menge und y Menge $\rightarrow x^y$ Menge

BEWEIS:

1. Nach Mengenbildungsaxiom (3) und $\{x\} = \{x,x\}$
2. Nach Mengenbildungsaxiom (3), dem obigen Punkt und der Definition $[x,y] = \{\{x\},\{x,y\}\}$.
3. $\iota z(z$ Klasse $\wedge\, \forall u(u \in z \leftrightarrow u \in y \wedge H(u)))$ Klasse nach dem Klassenbildungsaxiom. Weiter ist $\iota z(z$ Klasse $\wedge\, \forall u(u \in z \leftrightarrow u \in y \wedge H(u))) \subseteq y$ nach D3todo: link einfügen und nach (2) ist es auch eine Menge.
4. Nach Axiom (3) und (5) sowie $x \cup y = \bigcup\{x,y\}$.
5. x Klasse und $\neg x = \emptyset$. Dann folgt $\forall y\, y \in x$ und weiter y Element.
   a) y Urelement. Dann $\neg \exists u\, u \in y$ und $\neg \forall y(y \in x \rightarrow u \in y)$. Das heißt also $\neg \exists u\, u \in \bigcap x = \emptyset$. Da der Durchschnitt über x wegen des Axioms 2 eine Klasse ist und das ist nach Mengenbildungsaxiom (1) eine Menge.

b) y Menge

α) $\exists u\, u \in y$. Es folgt, $\bigcap x \subseteq y$ und weiter $\bigcap x$ Menge nach (2).

α) $y = \emptyset$. Es folgt, $\neg \exists u\, u \in y$ nach I und wie oben ist $\bigcap x$ Menge.

6. Wir wissen $[a, b] \in x \times y \leftrightarrow a \in x \wedge b \in y$. Daraus ziehen wir $a \in x \wedge b \in y$ und es folgt, a Element und b Element. Weiter folgt, $[a, b]$ Menge. Außerdem folgt, $\{a\} \subseteq x \cup y \wedge \{a, b\} \subseteq x \cup y$ und $\{a\} \in \mathfrak{P}(x \cup y) \wedge \{a, b\} \in \mathfrak{P}(x \cup y)$. Hieraus folgt nun, $\{\{a, \}, \{a, b\}\} \subseteq \mathfrak{P}(x \cup y)$. Anders geschrieben: $[a, b] \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(x \cup y))$. Also haben wir gezeigt: $\forall z(z \in x \times y \rightarrow z \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(x \cup y)))$. Nach der Definition heißt das, $x \times y \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(x \cup y))$. Also ist $x \times y$ Menge nach 4., (4) und (2).
7. Sei $f \in x^y$. Dann heißt das, $f \subseteq y \times x$. Damit ist $f \in \mathfrak{P}(y \times x)$ und $x^y \subseteq \mathfrak{P}(y \times x)$. Also ist x^y Menge nach 6., (4) und (2). ■

Folgerung 3.1
Alle bekannten mengentheoretischen Operationen ergeben wieder Mengen. Ausnahmen sind der Durchschnitt über die leere Menge und das volle Komplement (Punkt d) der Definition.

Bemerkung 3.5
1. Wenn $x \setminus I$ Unmenge $\rightarrow \bigcap x$ Unmenge
2. Wenn x Unmenge und y Klasse $\rightarrow x \cup y$ Unmenge
3. Wenn x Unmenge und y Klasse und $\neg y = \emptyset \rightarrow x \times y$ Unmenge
4. Wenn x Unmenge $\rightarrow \mathfrak{P}(x)$ Unmenge

Diese Angaben sind als Übung zu beweisen.

3.7 Fundierungsaxiom

Axiom 3.5 (Fundierungsaxiom)
$\forall x(x \text{ Klasse } \wedge \neg x = \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$

Satz 3.5
$\forall x\, \neg x \in x$

Beweis:

Fall a x Urelement oder x Unmenge oder $x = \emptyset \rightarrow \neg x \in x$ nach der Definition 1 und Axiom I todo: Link einfügen

Fall b x Menge$\rightarrow \{x\}$ Menge und damit ist $\neg\{x\} = \emptyset$. Also existiert ein y mit $y \in \{x\} \wedge y \cap \{x\} = \emptyset \rightarrow x \cap \{x\} = \emptyset$.

Nehmen wir nun an, dass gilt: $x \in x \rightarrow x \in x \cap \{x\} \rightarrow \neg x \cap \{x\} = \emptyset$ ↯ ■

Folgerung 3.2 (Beweis aus Satz 1.2todo: Link einfügen)
A ist eine Unmenge.

Beweis:
Sei $\neg A$ Unmenge $\rightarrow A$ Element $\rightarrow A \in A$. ■

3.8 Unendlichkeitsaxiom

Es gibt viele verschiedene, z. T. auch nicht äquivalente Definitionen. Im folgenden wird eine davon verwendet.

Definition 3.7
$x \sim y =_{\mathrm{Df}} \exists f(f \text{ Funktion } \wedge f^{-1} \text{ Funktion } \wedge D_f = x \wedge R_f = y)$. Man sagt, x ist gleichmächtig zu y.

x unendlich $=_{\mathrm{Df}} \exists y(y \subseteq x \wedge \neg y = x \wedge x \sim y)$

y endlich $=_{\mathrm{Df}} \neg x$ unendlich

Axiom 3.6 (Unendlichkeitsaxiom)
$\exists x(x \text{ Menge } \wedge x \text{ unendlich } \wedge \forall y(y \in x \to y \text{ Urelement}))$

Folgerung 3.3
Es gilt unendlich viele Urelemente. Denn mit dem Axiom IV (6) folgt, $x \sim y \wedge x$ Menge $\to$ y Menge.

3.9 Auswahlaxiom

Definition 3.8
x **Mengensystem** $=_{\mathrm{Df}} x \text{ Klasse } \wedge \forall y(y \in x \to y \text{ Menge})$

x **disjunkt** $=_{\mathrm{Df}} x \text{ Mengensystem } \wedge \forall y \forall z(y \in x \wedge z \in x \wedge \neg y = z \to y \cap z = \emptyset)$

a **Auswahlklasse** von $x =_{\mathrm{Df}} a \subseteq \bigcup x \wedge \forall y(y \in x \to \exists z\, a \cap y = \{z\})$

f **Auswahlfunktion** von $x =_{\mathrm{Df}} f \text{ Funktion } \wedge D_f = x \wedge R_f \subseteq \bigcup x \wedge \forall y \forall z([y, z] \in f \to z \in y)$

Axiom 3.7 (Auswahlaxiom)
1. Fassung $\forall x(x \text{ disjunkt } \wedge \neg \emptyset \in x \to \exists a \text{ Auswahlklasse von } x)$

2. Fassung $\forall x(x \text{ Mengensystem } \wedge \neg \emptyset \in x \to \exists f\, f \text{ Auswahlfunktion von } x)$

Bemerkung 3.6

1. Veranschaulichung einer Auswahlklasse:
2. $I_n =_{\mathrm{Df}} \{z \colon z \in \mathbb{R} \wedge n < z < n+1\} = (n, n+1)$ für $n \in \mathbb{Z}$, $x = \{I_n \colon n \in \mathbb{Z}\} \to \bigcup x = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Setzen $a = \{n + 1/2 \colon n \in \mathbb{Z}\}$. Eine Auswahlfunktion von x ist beispielsweise f mit $f = \{[I_n, n + 1/2] \colon n \in \mathbb{Z}\}$ oder $f(I_n) = n + 1/2$.
3. $I'_n =_{\mathrm{Df}} \{z \colon z \in \mathbb{R} \wedge n \leq z \leq n+1\} = [n, n+1]$ für $n \in \mathbb{Z}$, $x = \{I'_n \colon n \in \mathbb{Z}\} \to \bigcup x = \mathbb{R}$. Setzen $a = \{n + 1/2 \colon n \in \mathbb{Z}\}$. Eine Auswahlfunktion von x ist beispielsweise f mit $f = \{[I'_n, n + 1/2] \colon n \in \mathbb{Z}\}$ oder $f(I'_n) = n + 1/2$.
4. Das obige Beispiel kommt ohne die Disjunkheit aus. Im Allgemeinen ist das jedoch nicht der Fall.

5. Sei $x = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Dann besitzt x *keine* Auswahlklasse. Aber es existieren Auswahlfunktionen, z. B. $\{[\{a\}, a], [\{b\}, b], [\{a, b\}, a]\}$.
6. Wenn x Menge und a Auswahlklasse von x, so a Menge. Denn $a \subseteq \bigcup x$ und Axiom 3.4 (5) und (2).
7. Sei $x = \{T\}$ mit T nichtleere Menge transzendenter Zahlen.
8. von Betrand Russell: Sei x eine abzählbar unendliche Menge von Stiefeln. Dann sind die Menge der linken Stiefel eine Auswahlklasse. Wenn nun ebenso eine Menge von Socken gegeben ist, kann man die Auswahlklasse nicht in ähnlicher Weise definieren.
9. Es seien f eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen und $x_0 \in \mathbb{R}$.

   Definition 3.9
   Die Funktion f ist stetig an der Stelle $x_0 =_{\mathrm{Df}} \forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \to \forall\delta(\delta > 0 \land \forall x(|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)))$

   Definition 3.10
   Die Funktion f ist stetig an der Stelle $x_0 =_{\mathrm{Df}}$ für jede Folge $(x_1, x_2, \ldots,)$ reeller Zahlen gilt: wenn $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, so $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

   Sei nun f im Sinne der Punkt 3.10 stetig. Wir nehmen an, dass f nicht stetig im Sinne der Punkt 3.9 ist, d. h. $\exists\varepsilon(\varepsilon > 0 \land \forall\delta(\delta > 0 \to \exists x(|x - x_0| < \delta \land |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)))$. Für jedes δ sei $U_\delta =_{\mathrm{Df}} \{x : |x - x_0| < \delta \land |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\}$. Somit ist $U_\delta \neq \emptyset$ für jedes $\delta > 0$. Wir definieren $\mathfrak{M} =_{\mathrm{Df}} \{U_{1/n} : n = 1, 2, \ldots\}$. Nach Axiom 3.7 existiert eine Auswahlfunktion φ von $\mathfrak{M}$. Der Wertebereich von φ ist $R_\varphi = \{x_1, x_2, \ldots, \}$ mit $x_n \in U_{1/n}$ für jedes $n \geq 1$, d. h. $|x_n - x_0| < 1/n \land |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ für jedes $n \geq 1$. Damit folgt, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$. Dies ist ein Widerspruch zu Punkt 3.10.
10. Wir zeigen hier, dass die beiden Definitionen von Axiom 3.7 äquivalent sind:

    (1)→(2) Sei $\mathfrak{M}$ ein Mengensystem mit $\emptyset \notin \mathfrak{M}$. Wir definieren $\mathfrak{M}' =_{\mathrm{Df}} \{\{[M, m] : m \in M\} : M \in \mathfrak{M}\}$. Somit folgt, dass dieses Mengensystem disjunkt ist und $\emptyset \notin \mathfrak{M}'$. Nach der ersten Fassung existiert eine Auswahlklasse A von $\mathfrak{M}'$. Wir wissen, $A \subseteq \mathfrak{M} \times \bigcup \mathfrak{M}$, $D_A = \mathfrak{M}$ und somit ist A eine Abbildung von $\mathfrak{M}$ in $\bigcup \mathfrak{M}$. Nehmen wir nun an, $[M, m], [M, m'] \in A \to m = m' \land m \in M$ Also ist A Auswahlfunktion von $\mathfrak{M}$.

    (2)→(1) Sei $\mathfrak{M}$ ein disjunktes Mengensystem mit $\emptyset \notin \mathfrak{M}$. Nach der zweiten Fassung existiert eine Auswahlfunktion f von $\mathfrak{M}$. Der Wertebereich R_f ist Auswahlklasse von $\mathfrak{M}$. Nach Definition der Auswahlfunktion ist $R_f \subseteq \bigcup \mathfrak{M}, \forall M(M \in \mathfrak{M} \to M \cap R_f = \{f(M)\})$

3.10 Verallgemeinerte Kontinuumshypothese

Definition 3.11
$x \lesssim y =_{\mathrm{Df}} \exists z(x \sim z \land z \subseteq y)$

$x < y =_{\mathrm{Df}} x \lesssim y \land \neg x \sim y$

Satz 3.6 (Cantor)
$\forall x(x \text{ Menge } \rightarrow x < \mathfrak{P}(x))$

Beweis:
Sei x eine Menge. Es ist zunächst zu zeigen, dass $x \lesssim \mathfrak{P}(x)$ ist. Sei $f =_{\mathrm{Df}} \{[y,\{y\}] \colon y \in x\}$ ist eineindeutige Abbildung von x in $\mathfrak{P}(x)$. Das f existiert nach dem Klassenbildungsaxiom (Axiom 3.2), $f =_{\mathrm{Df}} \iota z(z \text{ Klasse } \wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow u \text{ Element } \wedge \exists y(y \in x \wedge u = [y,\{y\}])))$.

Weiter müssen wir zeigen, dass $x < \mathfrak{P}(x)$. Wir nehmen an, dass $x \sim \mathfrak{P}(x)$. Dann existiert eine eineindeutige Abbildung f von x auf $\mathfrak{P}(x)$ und wir definieren, $a =_{\mathrm{Df}} \{u \colon u \in x \wedge u \notin f(u)\}$. Damit ist $a \in \mathfrak{P}(x)$. Folglich ist $a \in R_f$ und damit existiert ein b mit $[b,a] \in f$. Also ist $b \in a \leftrightarrow \neg b \in a$. Denn wenn $b \in a \leftrightarrow b \notin f(b) = a$. Damit haben wir einen Widerspruch und die Annahme war falsch. Also ist x nicht gleichmächtig zu $\mathfrak{P}(x)$. ∎

Satz 3.7
$\forall x(x \text{ Menge } \wedge x \text{ endlich } \wedge \neg x = \emptyset \wedge \neg \exists y\, x = \{y\} \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < \mathfrak{P}(x)))$

Axiom 3.8 (Verallgemeinerte Kontinuumshypothese)
$\forall x(x \text{ unendlich } \rightarrow \neg \exists z(x < z \wedge z < \mathfrak{P}(x)))$

Im Jahr 1938 bewies Kurt Gödel das die Negation der obigen Hypothese nicht aus den bewiesenen Sachverhalten gefolgert werden kann.todo: besser formulieren

Literaturverzeichnis

Index