

Geometrische Zerlegungen

PD Dr. Christian Richter

Semester: SS 2011

Vorwort

*Dieses Dokument wurde als Skript für die auf der Titelseite genannte Vorlesung erstellt und wird jetzt im Rahmen des Projekts „**Vorlesungsskripte der Fakultät für Mathematik und Informatik**“ weiter betreut. Das Dokument wurde nach bestem Wissen und Gewissen angefertigt. Dennoch garantiert weder der auf der Titelseite genannte Dozent, die Personen, die an dem Dokument mitgewirkt haben, noch die Mitglieder des Projekts für dessen Fehlerfreiheit. Für etwaige Fehler und dessen Folgen wird von keiner der genannten Personen eine Haftung übernommen. Es steht jeder Person frei, dieses Dokument zu lesen, zu verändern oder auf anderen Medien verfügbar zu machen, solange ein Verweis auf die Internetadresse des Projekts <http://uni-skripte.lug-jena.de/> enthalten ist.*

Diese Ausgabe trägt die Versionsnummer 3515 und ist vom 5. August 2011. Eine neue Ausgabe könnte auf der Webseite des Projekts verfügbar sein.

*Jeder ist dazu aufgerufen, Verbesserungen, Erweiterungen und Fehlerkorrekturen für das Skript einzureichen bzw. zu melden oder diese selbst einzupflegen – einfach eine E-Mail an die **Mailingliste** [<uni-skripte@lug-jena.de>](mailto:uni-skripte@lug-jena.de) senden. Weitere Informationen sind unter der oben genannten Internetadresse verfügbar.*

Hiermit möchten wir allen Personen, die an diesem Skript mitgewirkt haben, vielmals danken:

- *Jens Kubieziel [<jens@kubieziel.de>](mailto:jens@kubieziel.de) (2011)*

Inhaltsverzeichnis

1	Begriffe und Definitionen	8
2	Teilbarkeit konvexer Mengen (disjunkte Pflasterungen)	10
2.1	Konvexität und m-Teilbarkeit	10
2.1.1	Konvexe Mengen und affine Abbildungen	10
2.1.2	m-Teilbarkeit	11
2.2	Eine hinreichende Bedingung für m-Teilbarkeit	12
2.2.1	Die Fixpunkteigenschaft	12
2.2.2	Bedingung für m-Teilbarkeit	13
2.3	Translative m-Teilbarkeit	16
2.3.1	Die finite Topologie	16
2.3.2	Charakterisierung translativer m-Teilbarkeit	16
2.4	Isometrische (Un-)Teilbarkeit	20
2.4.1	Begriffe	20
2.4.2	Isometrische Unteilbarkeit streng konvexer Kugeln	25
2.4.3	Isometrische Unteilbarkeit des typischen konvexen Körpers	27
2.4.4	Positive Aussagen zur isometrischen Teilbarkeit spezieller konvexer Kompakta in euklidischen Räumen	30
2.5	Die affine Nichtzweiteilbarkeit konvexer Kompakta	31
2.5.1	Vorbereitungen	31
2.5.2	Die Unteilbarkeitsaussage	33
2.6	Homöomorphe Teilbarkeit topologischer Zellen	35
2.6.1	Homöomorphismen und topologische Zellen	35
2.6.2	Homöomorphe Teilbarkeit topologischer Zellen	36
2.6.3	Zerlegungen in paarweise homöomorphe Teilmengen	37
3	Das Paradoxon von Banach-Tarski	39
3.1	Die Verdopplung von Kugeln	39
3.1.1	Einführende Begriffe	39
3.1.2	Spezielle freie Untergruppen der Gruppe der orthogonalen Abbildungen des euklidischen Raumes	40
3.1.3	Die spezielle Form des Paradoxons von Banach-Tarski	43
3.2	Weitere Zerlegungsgleichheiten	52
3.2.1	Das Banach-Schröder-Bernstein-Theorem	52
3.2.2	Das Banach-Tarski-Paradoxon in der starken Form	54

4	Elementare Zerlegungsgleichheit topologischer Scheiben	57
4.1	Einführung	57
4.1.1	Tarskis Frage nach der Quadratur des Kreises	57
4.1.2	Topologische Scheiben und elementare Zerlegungsgleichheit	57
4.1.3	Das dritte Hilbertsche Problem	60
4.2	Bedingungen an die Ränder zerlegungsgleicher Scheiben	61
4.2.1	Die Notwendigkeit spezieller Zerlegungsgleichheiten von Rändern zerlegungsgleicher Scheiben	61
4.2.2	Charakterisierung von Zerlegungsgleichheit bezüglich der Gruppe der Isometrien der Ebene, der äquiaffinen Abbildungen und der Ähnlichkeitsabbildungen	65
4.3	Geeignete Gruppen für die Quadratur des Kreises	66
4.3.1	Notwendige Bedingungen für die Quadratur des Kreises	66
4.3.2	Zerlegungsgleichheit mit zwei Zerlegungsteilen	68
4.3.3	Charakterisierung der Gruppen für die Quadratur des Kreises	71
4.3.4	Zur optimalen Teileanzahl	72
4.3.5	Zerlegungen in Teile mit glattem Rand	73
5	Das Zerlegungsproblem von Borsuk	75
5.1	Die Dimensionen 1 bis 3	75
5.2	Höhere Dimensionen	77
5.3	Das Borsuk-Ulam-Theorem	80

Auflistung der Theoreme

Sätze

Satz 2.11 Spezialfall eines Satzes von MARKOV-KAKUTANI	33
Satz 2.13 Satz von EDELSTEIN	35
Satz 3.10 Banach-Schröder-Bernstein-Theorem	53
Satz 4.2 Max Dehn	60
Satz 5.3 A. Nill, Noga Alon	78
Satz 5.5 Borsuk-Ulam-Theorem	81

Definitionen und Festlegungen

Definition 1.1 Gruppe	8
Definition 1.2 Kommutativität	8
Definition 1.3 Körper	8
Definition 1.4 Vektorraum	8
Definition 1.5 Norm, Normierter Raum	8
Definition 1.6 Lineare Abbildung	9
Definition 1.7 Topologie, topologischer Raum	9
Definition 1.8 Spurtopologie	9
Definition 1.9 Cauchyfolge	9
Definition 1.10 Vollständiger Raum, Banachraum	9
Definition 1.11 Dichtheit	9
Definition 2.1 Konvexe Menge	10
Definition 2.2 Affine Abbildung	11

Definition 2.3	teilbar, Pflasterung	11
Definition 2.4	Isometrie	11
Definition 2.5	Fixpunkt	12
Definition 2.6	Offene Menge	16
Definition 2.7	Inneres, Abschluss, Rand	20
Definition 2.8	Homöomorphismus	21
Definition 2.9	Strenge Konvexität	23
Definition 2.10	Parallelmenge, Hausdorff-Abstand	27
Definition 2.11	Nirgends dichte, magere Menge, Bairescher Raum	27
Definition 2.12	Typischer n -dimensionaler Körper	28
Definition 2.13	Volumen, Hausdorff-Maß	28
Definition 2.14	Kompakte, folgenkompakte Menge	31
Definition 2.15	Topologische Zelle	35
Definition 2.16	Homöomorphismus	37
Definition 3.1	Kongruente, zerlegungsgleiche Mengen, Grad der Zerlegungsgleichheit	39
Definition 3.2	Gruppe der orthogonalen Abbildungen	40
Definition 3.3	Freie Gruppe	40
Definition 3.4	Unabhängige Elemente	41
Definition 3.5	Orbit	45
Definition 3.6	Stabilisator, lokal kommutative Gruppe	46
Definition 3.7	Zerlegungstheoretisch kleinere Summe	52
Definition 3.8	Kolmogorowsche Entropiefunktion	54
Definition 4.1	Topologische Scheibe, Elementare Zerlegungsgleichheit	57
Definition 4.2	Dehn-Invariante	60
Definition 4.3	Elementare Zerlegungsgleichheit nach Hinwegnahme endlich vieler Bögen	61
Definition 4.4	Wesentlicher Jordanbogen	62
Definition 4.5	Kontraktion	66
Definition 5.1	Antipodische Punkte, antipodentreue Abbildung	80

1 Begriffe und Definitionen

In diesem Kapitel sollen einige grundlegende Begriffe geklärt werden. Üblicherweise sollten diese aus vorigen Veranstaltungen bekannt sein und dienen hier nur der Auffrischung.

Definition 1.1 (Gruppe)

Sei G eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $+$. Dann ist G genau dann eine **Gruppe**, wenn es ein $e \in G$ gibt, so dass für alle $g \in G$ gilt, $e + g = g + e = g$ und wenn es weiterhin zu jedem $g \in G$ ein $g^{-1} \in G$ gibt, mit $g + g^{-1} = g^{-1} + g = e$.

Definition 1.2 (Kommutativität)

Sei G eine Gruppe und $g_1, g_2 \in G$. Dann heißen g_1 und g_2 **vertauschbar**, wenn $g_1 g_2 = g_2 g_1$. Sind alle Elemente aus G vertauschbar, so bezeichnet man G als **kommutativ**.

Definition 1.3 (Körper)

Sei $(K, +, \cdot)$ eine Menge mit zwei assoziativen Verknüpfungen. Dann ist K genau dann ein **Körper**, wenn K mit der Verknüpfung $+$ eine kommutative Gruppe und $K \setminus \{0\}$ mit der Verknüpfung \cdot eine kommutative Gruppe ist sowie wenn die Distributivität $a \cdot (b + c) = ab + ac$ für alle $a, b, c \in K$ gilt.

Definition 1.4 (Vektorraum)

Ein **Vektorraum** V über einem Körper $(K, +, \cdot)$ ist ein abelsche Gruppe $(V, +)$ mit einer skalaren Multiplikation $\cdot : K \times V \rightarrow V$. Dabei gilt für alle $u, v \in V$ und $a, b \in K$:

a) $a \cdot (b \cdot u) = (a \cdot b) \cdot u$

b) $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$

c) $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$

d) $1 \cdot v = v$

Definition 1.5 (Norm, Normierter Raum)

Sei X ein Vektorraum über einem Körper K . Eine Funktion $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ heißt **Norm** auf X , wenn für beliebige $x, y \in X$ und $\alpha \in K$ gilt:

a) $\|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ **Homogenität**

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Dreiecksungleichung

Das Paar $(X, \|\cdot\|)$ heißt **normierter Raum**.

Definition 1.6 (Lineare Abbildung)

Seien V und W Vektorräume über einem Körper K . Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ heißt **lineare Abbildung**, wenn für alle $x, y \in V$ und $a \in K$ folgt:

$$f(ax + y) = af(x) + f(y)$$

Definition 1.7 (Topologie, topologischer Raum)

Eine **Topologie** \mathcal{T} auf einer nichtleeren Menge X ist ein System von Teilmengen von X mit:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- (ii) $O_i \in \mathcal{T}, i \in I \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$ (beliebige Vereinigungen offener Mengen sind wieder offen.)
- (iii) $O_i \in \mathcal{T}, i = 1, \dots, n \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$ (endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen.)

Die Elemente von \mathcal{T} heißen **offene Mengen** und (X, \mathcal{T}) heißt **topologischer Raum**.

Definition 1.8 (Spurtopologie)

Sei $A \subseteq X$ und \mathcal{T} eine Topologie auf X . Dann bildet $\mathcal{T}|_A := \{G \cap A : G \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie auf A . Man bezeichnet $\mathcal{T}|_A$ als die von \mathcal{T} auf A **reduzierte** oder auch **Spurtopologie**.

Definition 1.9 (Cauchyfolge)

Eine Folge $(x_n) \subset X$ heißt genau dann **Cauchyfolge**, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_\varepsilon : \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$.

Definition 1.10 (Vollständiger Raum, Banachraum)

Ein normierter Raum heißt **vollständig**, falls jede Cauchyfolge in X konvergiert. Ein vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**.

Definition 1.11 (Dichtheit)

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **dicht**, falls $\text{cl}(A) = X$ bezüglich der Topologie \mathcal{T} .

2 Teilbarkeit konvexer Mengen (disjunkte Pflasterungen)

2.1 Konvexität und m-Teilbarkeit

2.1.1 Konvexe Mengen und affine Abbildungen

Definition 2.1 (Konvexe Menge)

- a) Eine Teilmenge K eines reellen Vektorraums X heißt **konvex**, wenn für alle $x, y \in K$ und für alle $\lambda \in (0, 1)$ gilt:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$$

- b) Ist $M \subseteq X$, so heißt $\text{conv}(M) = \bigcap_{K \text{ konvex}, M \subseteq K} K$ die **konvexe Hülle** von M .

Beispiel 2.1

- a) Jede **Kugel** $B(x, r) = \{y \in X \mid \|y - x\| \leq r\}$ eines normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$ mit $x \in X$ und $r \geq 0$ ist konvex. Denn seien $y, z \in B(x, r)$ und $\lambda \in (0, 1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|(\lambda y + (1 - \lambda)z) - x\| &= \|\lambda y + z - \lambda z - x\| = \|\lambda y + z - \lambda z - x + (\lambda x - \lambda x)\| \\ &= \|\lambda y - \lambda x + (z - x) + (\lambda x - \lambda z)\| \\ &= \|\lambda(y - x) + (1 - \lambda)(z - x)\| \leq \lambda\|y - x\| + (1 - \lambda)\|z - x\| \\ &\leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r \end{aligned}$$

- b) Jeder Durchschnitt konvexer Mengen ist wieder konvex. Insbesondere ist die konvexe Hülle konvex.
- c) K ist genau dann konvex, wenn für alle $n \geq 2$, $x_1, \dots, x_n \in K$ und für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ aus $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ folgt, dass $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in K$. Man bezeichnet die Summe $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ als **Konvexkombination** von x_1, \dots, x_n .
- d) Damit lässt sich die konvexe Hülle explizit schreiben durch:

$$\text{conv}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \mid m \geq 1, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, x_1, \dots, x_m \in M \right\}$$

Definition 2.2 (Affine Abbildung)

Eine Abbildung $\varphi: X \rightarrow Y$ zwischen linearen Räumen X und Y über \mathbb{R} heißt **affin**, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \lambda\varphi(x_1) + (1 - \lambda)\varphi(x_2)$$

Bemerkung 2.1

- Die Abbildung φ ist genau dann affin, wenn für alle $m \geq 2$, $x_1, \dots, x_m \in M$ und für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ aus $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ folgt, dass $\varphi(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi(x_i)$
- Affine Bilder und Urbilder konvexer Mengen sind konvex.
- Die Abbildung $\varphi: X \rightarrow Y$ ist genau dann affin, wenn ein $y_0 \in Y$ und eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\Phi: X \rightarrow Y$ existieren, so dass gilt, $\varphi(x) = \Phi(x) + y_0$ für alle $x \in X$. Die Beweisidee dazu ist, dass $y_0 = \varphi(0)$ und $\Phi(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$ ist.
- Inverse Abbildungen affiner Bijektionen sind wieder affin.
- Sind $\varphi_1, \varphi_2: X \rightarrow Y$ affin, so auch $\varphi_1 + \varphi_2: X \rightarrow Y$. Sind $\varphi_1: X \rightarrow Y$ und $\varphi_2: Y \rightarrow Z$ affin, so auch $\varphi_2 \circ \varphi_1: X \rightarrow Z$.

2.1.2 m-Teilbarkeit**Definition 2.3 (teilbar, Pflasterung)**

Seien $R \neq \emptyset$ eine Menge, G eine Gruppe von Transformationen auf R , $M \subseteq R$ eine Teilmenge von R und $m \geq 2$ eine natürliche Zahl. Dann bezeichnet man M genau dann als **m-teilbar** bezüglich G oder sagt, M hat eine **m-elementige disjunkte G-Pflasterung**, wenn M disjunkte Zerlegungen $M = M_1 \cup \dots \cup M_m$ hat, so dass es für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ ein $\gamma_i \in G$ mit $M_i = \gamma_i(M_1)$ gibt.

Definition 2.4 (Isometrie)

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so heißt $\varphi: X \rightarrow X$ genau dann **Isometrie**, wenn gilt, $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

Bemerkung 2.2

- Isometrien sind stetig (sogar LIPSCHITZ-stetig) und injektiv ($x \neq y \Rightarrow d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y) > 0$, also $\varphi(x) \neq \varphi(y)$), aber im Allgemeinen *nicht* surjektiv. Denn sei $X = [0, \infty)$ und $d(x, y) = |x - y|$. Die Isometrie ist definiert durch $\varphi: X \rightarrow X$ mit $x \mapsto x + 1$. Dabei ist $x = 0$ ohne Urbild.
- Die bijektiven Isometrien bilden eine Gruppe. Man nennt diese die **Isometriegruppe** von (X, d) .
- Ist $\varphi: X \rightarrow X$ eine bijektive Isometrie, so gilt für beliebige $x_0 \in X$ und $r > 0$, dass $\varphi(B(x_0, r)) = B(\varphi(x_0), r)$. Denn $x \in B(x_0, r)$ gilt genau dann, wenn $d(x, x_0) \leq r$ und wegen der Isometrie gilt das genau dann, wenn $d(\varphi(x), \varphi(x_0)) \leq r \Leftrightarrow \varphi(x) \in B(\varphi(x_0), r)$.

2 Teilbarkeit konvexer Mengen (disjunkte Pflasterungen)

$B(\varphi(x_0), r)$. Für die Rückrichtung genügt es zu zeigen, dass φ^{-1} eine Isometrie ist. Sei dazu $x, y \in X$. Dann folgt, $d(x, y) = d(\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi(\varphi^{-1}(y))) = d(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y))$.

Ist $\varphi: X \rightarrow X$ eine nicht bijektive Isometrie, so gilt im Allgemeinen *nicht* die Gleichheit $\varphi(B(x_0, r)) = B(\varphi(x_0), r)$. Beispielsweise sei $X = [0, \infty)$ mit dem Abstand $d(x, y) = |x - y|$ und der Abbildung $\varphi: X \rightarrow X$ mit $x \mapsto x + 1$. Dann ist $\varphi(B(0, 1)) = \varphi([0, 1]) = [1, 2] \neq [0, 2] = B(\varphi(0), 1)$.

- d) Eine Drehung um 45° ist genau dann eine Isometrie in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ mit $n \geq 2$ und $1 \leq p \leq \infty$, wenn $p = 2$ gilt.

Beispiel 2.2

- Sei $R = \mathbb{R}$ und G die Gruppe der Translationen, $m \geq 2$

a) $[0, 1)$ translativ m -teilbar: $[0, 1) = [0, 1/m) \cup [1/m, 2/m) \cup \dots \cup [m-1/m, 1)$

b) \mathbb{R} ist translativ m -teilbar: $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^m M_i$ mit $M_i = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [k + \frac{i-1}{m}, k + \frac{i}{m})$

- Die Kreisscheibe der EUKLIDischen Ebene ist bezüglich der Isometriender Ebene nicht 2-teilbar.

BEWEIS:

Wir nehmen an, $B(0, 1) = M_1 \cup M_2 = M_1 \cup \gamma(M_1)$. Sei o. B. d. A. $0 \in M_1 \Rightarrow \gamma(0) \neq 0$. Sonst wäre $0 \in M_1 \cap M_2$. Weiter ist $M_2 = M_2 \cap \gamma(M_1) \subseteq B(0, 1) \cap \gamma(B(0, 1)) = B(0, 1) \cap B(\gamma(0), 1)$. Also ist $M_2 \subseteq B(x_2, r)$ mit $x_2 = \frac{\gamma(0)}{2}$ und $r \leq 1$. Dann ist $M_1 = \gamma^{-1}(M_2) \subseteq B(x_1, r) \Rightarrow B(0, 1) = M_1 \cup M_2 \subseteq B(x_1, r) \cap B(x_2, r)$. Aber $B(0, 1)$ liegt in einem Streifen der Breite $2r < 2$. ζ ■

Müssen die nicht bijektiv sein?

2.2 Eine hinreichende Bedingung für m-Teilbarkeit

2.2.1 Die Fixpunkteigenschaft

Definition 2.5 (Fixpunkt)

- a) Sei R eine Menge. Dann heißt x_0 genau dann **Fixpunkt** einer Abbildung $\varphi: R \rightarrow R$, falls $\varphi(x_0) = x_0$ gilt.
- b) Eine Teilmenge $M \subseteq R$ hat bezüglich einer Gruppe G von Transformationen von R genau dann die **Fixpunkteigenschaft**, wenn aus $\gamma(M) \subseteq M$ folgt, dass γ einen Fixpunkt in M für alle $\gamma \in G$ hat.

Beispiel 2.3

- a) Sei $R = \mathbb{R}$ und $G = \mathfrak{T}_1$ die Bijektionen von \mathbb{R} auf \mathbb{R} , die in beiden Richtungen stetig sind. Dann hat $M_1 = [0, 1]$ die Fixpunkteigenschaft bezüglich \mathfrak{T}_1 .

BEWEIS:

Sei $\gamma \in \mathfrak{T}_1$ mit $\gamma([0, 1]) \subseteq [0, 1]$.

2.2 Eine hinreichende Bedingung für m -Teilbarkeit

1. Fall $\gamma(0) = 0$ oder $\gamma(1) = 1$. Dann sind wir fertig, denn $x_0 = 0$ oder $x_0 = 1$.
 2. Fall $\gamma(0) > 0$ und $\gamma(1) < 1$: Wir betrachten die Funktion $\varphi(x) = x$. Dies definiert eine stetige Abbildung $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) > 0$ und $\varphi(1) < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $x_0 \in (0, 1)$ mit $\varphi(x_0) = 0$, also $\gamma(x_0) = x_0$. ■
- b) Die Menge $M_2 = [0, \infty)$ hat *nicht* die Fixpunkteigenschaft bezüglich \mathfrak{T}_1 . Denn z. B. können wir eine Verschiebung betrachten: $\gamma(x) = x + 1$. Dies hat keinen Fixpunkt, obwohl $\gamma(M_2) \subseteq M_2$.
- c) Sei $R = \mathbb{R}^n$ mit einer Norm und $G = \mathfrak{V}_n$ die Gruppe der Translationen. Jede beschränkte nichtleere Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ hat die Fixpunkteigenschaft bezüglich \mathfrak{V}_n .

BEWEIS:

Sei $\gamma \in \mathfrak{V}_n$ mit $\gamma(M) \subseteq M$ und $\gamma(x) = x + t$. Für beschränktes M erhält man $\sup_{x \in M} \langle x, t \rangle < \infty$ und kann abschätzen: $\sup_{x \in M} \langle x, t \rangle \geq \sup_{y \in \gamma(M)} \langle y, t \rangle = \sup_{x \in M} \langle \gamma(x), t \rangle = \sup_{x \in M} \langle x + t, t \rangle = (\sup_{x \in M} \langle x, t \rangle) + \langle t, t \rangle$. Damit folgt, $\langle t, t \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle t, t \rangle = 0 \Rightarrow t = 0$. Somit ist γ die identische Abbildung und alle Punkte aus M sind Fixpunkte. ■

2.2.2 Bedingung für m -Teilbarkeit

Satz 2.1

Seien K eine konvexe Teilmenge eines linearen Raumes X , G eine Gruppe affiner Transformationen von X auf X und $m \geq 2$ mit $m \in \mathbb{N}$. Erfüllt K *nicht* die Fixpunkteigenschaft bezüglich G , so ist K bezüglich G m -teilbar.

BEWEIS:

Die Negierung der Fixpunkteigenschaft heißt, dass ein $\varphi \in G$ mit $\varphi(K) \subseteq K$ existiert und φ ohne Fixpunkt ist.

Sei $x \in X$. Dann ist $\mathcal{O}(x) := \{ \varphi^k(x) \mid k \in \mathbb{Z} \}$ der **Orbit** von x bezüglich der von φ erzeugten Gruppe $\{ \varphi^k \mid k \in \mathbb{Z} \}$. Also ist $X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}(x)$ eine disjunkte Zerlegung.¹ Denn für $\mathcal{O}(x_1) \cap \mathcal{O}(x_2) \neq \emptyset$ existieren k_1 und k_2 mit $\varphi^{k_1}(x_1) = \varphi^{k_2}(x_2)$. Eine Umformung ergibt, $\varphi^{k_1}(x_1) = \varphi^{k_2}(x_2) \Rightarrow x_1 = \varphi^{-k_1}(\varphi^{k_2}(x_2)) \Rightarrow \varphi^k(x_1) = \varphi^k(\varphi^{-k_1}(\varphi^{k_2}(x_2)))$. Insgesamt haben wir also, $\varphi^k(x_1) = \varphi^{k+k_2-k_1}(x_2)$ und $\varphi^k(x_2) = \varphi^{k+k_1-k_2}(x_1)$ für alle k . Das heißt aber, $\mathcal{O}(x_1) = \mathcal{O}(x_2)$. Damit lässt sich K darstellen als $K = \bigcup_{x \in X} (\mathcal{O}(x) \cap K) = \bigcup_{x \in K} (\mathcal{O}(x) \cap K)$.

Für $\varphi(K) \subseteq K$ folgt, $\varphi^k(x) \in K$ und damit auch $\varphi^{k+1}(x) \in K$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Also können wir zwei Fälle unterscheiden:

$$(2.1) \quad \mathcal{O}(x) \cap K = \{ \varphi^k(x), \varphi^{k+1}(x), \varphi^{k+2}(x), \dots \} \quad k = k(x) \leq 0$$

¹Der Orbit ist die Äquivalenzklasse von x bezüglich der Äquivalenzrelation φ^k .

2 Teilbarkeit konvexer Mengen (disjunkte Pflasterungen)

oder

$$(2.2) \quad \mathcal{O}(x) \cap K = \mathcal{O}(x) = \left\{ \varphi^k(x) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Aus $\varphi^{k_1}(x) = \varphi^{k_2}(x) \in K$ folgt, $k_1 = k_2$ für alle $x \in K$ und $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Denn nehmen wir an, dass $k_1 \neq k_2$ und o. B. d. A. $k_1 < k_2$. Für konvexes K ist $x_0 = \frac{1}{k_2 - k_1}(\varphi^{k_1}(x) + \varphi^{k_1+1}(x) + \dots + \varphi^{k_2-1}(x)) \in K$ eine Konvexkombination. Da φ eine affine Abbildung ist, folgt:

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= \varphi \left(\frac{1}{k_2 - k_1} \left(\varphi^{k_1}(x) + \varphi^{k_1+1}(x) + \dots + \varphi^{k_2-1}(x) \right) \right) \\ &= \frac{1}{k_2 - k_1} \varphi \left(\varphi^{k_1}(x) + \varphi^{k_1+1}(x) + \dots + \varphi^{k_2-1}(x) \right) \\ &= \frac{1}{k_2 - k_1} \left(\varphi^{k_1+1}(x) + \varphi^{k_1+2}(x) + \dots + \varphi^{k_2-1}(x) + \underbrace{\varphi^{k_2}(x)}_{=\varphi^{k_1}(x)} \right) \\ &= \frac{1}{k_2 - k_1} \left(\varphi^{k_1+1}(x) + \varphi^{k_1+2}(x) + \dots + \varphi^{k_2-1}(x) + \varphi^{k_1}(x) \right) \\ &= x_0 \end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass K nicht die Fixpunkteigenschaft erfüllt.

Sei nun $x \in K$. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

Gleichung 2.1: $\mathcal{O}(x) \cap K = \{ \varphi^k(x), \varphi^{k+1}(x), \varphi^{k+2}(x), \dots \} = \{ x_0, \varphi(x_0), \varphi^2(x_0), \dots \} = M_1(\mathcal{O}(x)) \cup M_2(\mathcal{O}(x)) \cup \dots \cup M_m(\mathcal{O}(x))$. Disjunkte Zerlegungen in $M_i(\mathcal{O}(x)) = \{ \varphi^{i-1}(x_0), \varphi^{m+i-1}(x_0), \varphi^{2m+i-1}(x_0), \dots \}$, wobei $M_i(\mathcal{O}(x)) = \varphi^{i-1}(M_1(\mathcal{O}(x)))$.

Gleichung 2.2: Man fixiert ein $x_0 \in \mathcal{O}(x)$ nur abhängig von $\mathcal{O}(x)$ und unabhängig von x . Jetzt wird das Auswahlaxiom benutzt, da man evtl. „viele“ Orbits hat. Nun können wir schreiben $\mathcal{O}(x) \cap K = M_1(\mathcal{O}(x)) \cup \dots \cup M_m(\mathcal{O}(x))$ disjunkte Zerlegungen in $M_i(\mathcal{O}(x)) = \{ \varphi^{km+i-1}(x_0) \mid k \in \mathbb{Z} \}$. Insbesondere hat man $M_i(\mathcal{O}(x)) = \varphi^{i-1}(M_1(\mathcal{O}(x)))$.

Fazit: $K = \bigcup_{x \in K} (\mathcal{O}(x) \cap K) = \bigcup_{x \in K} (M_1(\mathcal{O}(x)) \cup \dots \cup M_m(\mathcal{O}(x))) = M_1 \cup \dots \cup M_m$ disjunkte Zerlegungen mit $M_i = \bigcup_{x \in K} M_i(\mathcal{O}(x))$, wobei $M_i = \varphi^{i-1}(M_1)$. ■

Beispiel 2.4

(1) Sei X ein reeller Vektorraum mit einer Dimension größer oder gleich 1. Dann hat $K = X$ nicht die Fixpunkteigenschaft bezüglich der Translationen \mathfrak{A}_X . Wähle $t \neq 0$. Dann ist $\varphi: X \rightarrow X$ mit $x \mapsto x + t$ eine Abbildung ohne Fixpunkt. Also ist X bezüglich der Translationen m -teilbar.

(2) $\ell_1(\mathbb{Z}) = \{ (\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mid \xi_k \in \mathbb{R}, \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\xi_k| < \infty \}$ ist ein reeller normierter Raum mit der Norm $\|(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}}\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\xi_k|$. Das ist sogar ein Banachraum. Weiterhin ist $K = \{ (\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mid \xi_k \geq 0, \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k = 1 \}$ ein **Simplex**. Die Menge K ist eine beschränkte,

2.2 Eine hinreichende Bedingung für m -Teilbarkeit

abgeschlossene und konvexe Menge von $\ell_1(\mathbb{Z})$. Zur Konvexität: Für $(\xi_k), (\eta_k) \in K$ und $\lambda \in (0, 1)$ erhalten wir $\lambda(\xi_k)_k + (1 - \lambda)(\eta_k)_k \in K$, denn $\lambda\xi_k + (1 - \lambda)\eta_k \geq 0$ und $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda\xi_k + (1 - \lambda)\eta_k = \lambda \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k + (1 - \lambda) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_k = \lambda + (1 - \lambda) = 1$.

- (3) Die **Shift-Abbildung** $\sigma: \ell_1(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell_1(\mathbb{Z})$ mit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (\xi_{k-1})_{k \in \mathbb{Z}}$ ist bijektiv und affin. Sie erfüllt weiter $\sigma(K) = K$ und hat keinen Fixpunkt in K .

Denn nehmen wir an, dass $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in K$ und $\sigma((\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}}) = (\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Also $\dots = \xi_{-2} = \xi_{-1} = \xi_0 = \xi_1 = \dots = c$. Falls $c \neq 0$ wäre die Summe $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\xi_k|$ nicht mehr endlich und damit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} \notin \ell_1(\mathbb{Z})$. Sei nun $c = 0$. Dann ist $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k = 0$ und $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} \notin K$.

Ist G eine Gruppe affiner Transformationen von $\ell_1(\mathbb{Z})$ mit $\sigma \in G$ (z.B. $G = \{\sigma^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$), so ist K nach [Satz 2.1](#) m -teilbar bezüglich G für jedes $m \geq 2$.

- (4) $c_0(\mathbb{Z}) = \{(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mid \xi_k \in \mathbb{R}, \lim_{k \rightarrow +\infty} \xi_k = \lim_{k \rightarrow -\infty} \xi_k = 0\}$ ist ein reeller normierter Raum mit der Norm $\|(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}}\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\xi_k|$. Dies ist sogar ein Banachraum. Weiter ist $L = \{(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z}) \mid \xi_k = 0, k \leq 0, \|(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}}\|_\infty \leq 1\}$ eine beschränkte, abgeschlossene und konvexe Teilmenge von $c_0(\mathbb{Z})$. Zur Konvexität: Für $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (\eta_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in L$ und $\lambda \in (0, 1)$, ist $\lambda(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} + (1 - \lambda)(\eta_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in L$. Denn $\lambda\xi_k + (1 - \lambda)\eta_k = 0$ für $k \leq 0$ und $\|\lambda(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} + (1 - \lambda)(\eta_k)_{k \in \mathbb{Z}}\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\lambda\xi_k + (1 - \lambda)\eta_k| \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \lambda|\xi_k| + (1 - \lambda)|\eta_k| \leq \lambda \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\xi_k| + (1 - \lambda) \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\eta_k| \leq 1$.

Die Abbildung $\tau: c_0(\mathbb{Z}) \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$ mit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{k-1})_{k \in \mathbb{Z}} + (\dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ ist affin, bijektiv und erfüllt $\tau(L) \subseteq L$. Weiterhin hat τ keinen Fixpunkt in L und nicht einmal in $c_0(\mathbb{Z})$.

Dazu nehmen wir an, dass es einen Fixpunkt $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} = \tau((\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}})$ gibt. Wir schreiben, $(\dots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots) = (\dots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_0 + 1, \xi_1, \xi_2, \dots)$ und es ist $\dots = \xi_{-2} = \xi_{-1} = \xi_0$ sowie $\xi_0 + 1 = \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \dots$. Damit ist $\xi_k = c$ für alle $k \leq 0$ und $\xi_k = c + 1$ für alle $k \geq 1$. Also $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} \notin c_0(\mathbb{Z})$, denn $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k \neq 0$ und $\lim_{k \rightarrow -\infty} \xi_k \neq 0$.

Ist G eine Gruppe affiner Transformationen von $c_0(\mathbb{Z})$ mit $\tau \in G$ (z.B. $G = \{\tau^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$), so ist L nach [Satz 2.1](#) m -teilbar bezüglich G für alle $m \geq 2$.

Bemerkung 2.3

Die Abbildungen σ und τ sind Isometrien, also abstandstreue Abbildungen in den metrischen Räumen $\ell_1(\mathbb{Z})$ bzw. $c_0(\mathbb{Z})$. Die Abstandstreue bei σ sieht man wegen $\|\sigma((\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}}) - \sigma((\eta_k)_{k \in \mathbb{Z}})\|_1 = \|(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} - (\eta_k)_{k \in \mathbb{Z}}\|_1$. Analog für τ . Somit sind K und L isometrisch m -teilbare, beschränkte, abgeschlossene und konvexe Teilmengen von $\ell_1(\mathbb{Z})$ bzw. $c_0(\mathbb{Z})$.

Der [Abschnitt 2.4](#) geht weiter auf den Begriff der isometrischen Teilbarkeit ein.

Bemerkung 2.4 (Problem)

- Die Umkehrung von [Satz 2.1](#) geht i. A. nicht: $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ist translativ m -teilbar, hat aber die Fixpunkteigenschaft bezüglich \mathfrak{A}_1 .

2 Teilbarkeit konvexer Mengen (disjunkte Pflasterungen)

- Eine offene Frage ist, ob eine Umkehrung in dem Sinne gilt, dass aus m -Teilbarkeit für alle $m \geq 2$ keine Fixpunkteigenschaft für alle abgeschlossenen bzw. offenen K folgt.

2.3 Translative m -Teilbarkeit

2.3.1 Die finite Topologie

Definition 2.6 (Offene Menge)

Sei X ein reeller Vektorraum. Eine Menge $M \subseteq X$ heißt genau dann **offen** in der finiten Topologie auf X , wenn der Schnitt $M \cap Y$ mit jedem endlich-dimensionalen Unterraum $Y \subseteq X$ in der natürlichen Topologie (von Y als \mathbb{R}^n) offen ist.

Bemerkung 2.5

- (1) Mit dem System \mathcal{O} der finit offenen Mengen wird der Raum (X, \mathcal{O}) zu einem topologischen Raum. Wie üblich sind die **abgeschlossenen Mengen** gerade die Komplemente der offenen Mengen. Falls X endlich-dimensional ist, so ist die finite Topologie die natürliche Topologie.
- (2) Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist jede bezüglich $\|\cdot\|$ offene (abgeschlossene) Menge auch finit offen (abgeschlossen). Die Idee ist: Spurtopologie nutzen. Damit ist die finite Topologie eine Verfeinerung jeder Normtopologie auf X .
- (3) Im Allgemeinen ist die finite Topologie echt feiner als die Normtopologie.

Beispiel 2.5

Für normierte Räume $\ell_1 = \{ (\xi_k)_{k \geq 1} \mid \xi_k \in \mathbb{R}, \sum |\xi_k| < \infty \}$ mit der Norm $\|(\xi_k)_k\|_1 = \sum_k |\xi_k|$ und $\ell_2 = \{ (\xi_k)_{k \geq 1} \mid \xi_k \in \mathbb{R}, \sum \xi_k^2 < \infty \}$ mit der Norm $\|(\xi_k)_k\|_2 = \sqrt{\sum \xi_k^2}$ gilt, $\ell_1 \subseteq \ell_2$. Die Sphäre $S_{\ell_1} = \{ (\xi_k)_k \in \ell_1 \mid \|(\xi_k)_k\|_1 = 1 \}$ ist in ℓ_1 abgeschlossen, also auch finit abgeschlossen in ℓ_1 und damit auch in ℓ_2 .

Aber die Sphäre S_{ℓ_1} ist in ℓ_2 nicht abgeschlossen in der $\|\cdot\|_2$ -Norm. Denn für ein Element $(1/n, \dots, 1/n, 0, 0, \dots) \in S_{\ell_1}$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(1/n, 1/n, 0, 0, \dots)\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = 0$. Also ist der $\|\cdot\|_2$ -Limes $(0, 0, 0, \dots) \notin S_{\ell_1}$ für $n \rightarrow \infty$.

2.3.2 Charakterisierung translativer m -Teilbarkeit

Satz 2.2

Es seien X ein reeller linearer Raum mit einer konvexen Teilmenge $\emptyset \neq K \subseteq X$, die finit abgeschlossen oder finit offen ist und $m \leq 2$. Dann sind äquivalent:

- (i) K ist translativ m -teilbar bezüglich der Gruppe der Translationen \mathfrak{A}_X von X .

(ii) K enthält eine Halbgerade $\{x + \lambda y \mid \lambda \geq 0\}$ mit $x \in K$ und $y \in X \setminus \{0\}$.

BEWEIS:

(i) \Rightarrow (ii) Wir nehmen an, dass die erste Aussage gilt, aber K keine Halbgerade enthält.

Damit lässt sich $K = M_1 \cup \dots \cup M_m$ mit $M_i = M_1 + t_i$ für $i = 1, \dots, m$ disjunkt zerlegen. Die $t_i \in X$ sind Translationsvektoren und $t_1 = 0$. Weiterhin nehmen wir o. B. d. A. an, $0 \in M_1 \subseteq K$. Falls das nicht der Fall wäre, machen wir eine Verschiebung. Zweitens ist o. B. d. A. $X = \text{span}\{t_1, \dots, t_m\} = \text{span}\{t_2, \dots, t_m\}$. Sonst ersetzen wir X durch $\bar{X} = \{t_1, \dots, t_m\}$ und K durch $\bar{K} = K \cap \bar{X}$. Die Menge \bar{K} ist konvex, abgeschlossen oder offen (da die Dimension von \bar{X} kleiner als ∞ war), hat keine Halbgerade, $\bar{K} \neq \emptyset$, da $0 \in \bar{K}$ und $\bar{K} = \bar{M}_1 \cup \dots \cup \bar{M}_m$ (Zerlegung) mit $\bar{M}_i = M_i \cap \bar{X}$ und $\bar{M}_i = M_i \cap \bar{X} = (M_1 + t_i) \cap \bar{X} = (M_1 + t_i) \cap (\bar{X} \cap t_i) = (M_1 \cap \bar{X}) + t_i = \bar{M}_1 + t_i$.

Weiter ist $\dim X \geq 1$, da $t_2 \neq 0$ und $t_i \in X$.

1. Fall $\dim X = 1$: Wir identifizieren den Fall mit der reellen Achse $X = \mathbb{R}$. Wir wissen, dass K beschränkt und finit abgeschlossen oder finit offen ist, also $K = [a, b]$ oder $K = (a, b)$. Wir setzen o. B. d. A. voraus, dass $t_1 < t_2 < \dots < t_m$. Sonst findet eine Umgruppierung statt.

Erster Fakt: Die Mengen M_i haben nur endlich viele Zusammenhangskomponenten. Das sind maximale Teilmengen der Form $\{x\}$, $[y, z]$, $[y, z)$, $(y, z]$ oder (y, z) . Dazu nehmen wir an, die M_i haben unendlich viele Zusammenhangskomponenten. In der Menge H_i werden alle $x \in \mathbb{R}$ aufgesammelt, wobei in jeder Umgebung von x unendlich viele Zusammenhangskomponenten von M_i liegen. Da die M_i beschränkt sind, ist H_i nichtleer, beschränkt, abgeschlossen und $H_i = H_1 + t_i$ (da $M_i = M_1 + t_i$). Somit existiert ein Minimum $h_i = \min H_i$ mit $h_i = h_1 + t_i$. Wegen der Ordnung der Verschiebungsvektoren ist $h_1 < h_2 < \dots < h_m$. Also existiert eine Umgebung $U = (h_1 - \varepsilon, h_1 + \varepsilon)$ von h_1 in der unendlich viele Zusammenhangskomponenten von M_1 liegen, aber nur endlich viele Zusammenhangskomponenten der Mengen M_i mit $i \geq 2$. Da K ein Intervall ist, werden die unendlich vielen Zusammenhangskomponenten von M_1 in U nur durch endlich viele Zusammenhangskomponenten der Mengen M_i mit $2 \leq i \leq m$ berührt. Damit ist der erste Fakt bewiesen.

Es existieren $k, l \geq 0$ so, dass jedes M_i eine disjunkte Vereinigung von k offenen Intervallen (α, β) ist und einer l -punktigen Restmenge. Damit ist K eine disjunkte Vereinigung von $k \cdot m$ offenen Intervallen I_j und einer $l \cdot m$ -punktigen Restmenge $\{y_1, \dots, y_{l \cdot m}\}$.

1. 1. Fall $K = [a, b]$: Wenn wir die Intervalle zählen, so haben wir $k \cdot m = l \cdot m - 1 \Rightarrow (l - k)m = 1$ für $m \geq 2$.

2 Teilbarkeit konvexer Mengen (disjunkte Pflasterungen)

1. 2. Fall $K = (a, b)$: Wir haben die Teilintervalle $I_1, \dots, I_{k \cdot m}$ und dazwischen die Anstosspunkte $y_1, \dots, y_{l \cdot m}$. Also ist $k \cdot m = l \cdot m + 1 \Rightarrow (k - l)m = 1 \nexists$

Damit ist der erste Fall zu Ende.

2. Fall $n = \dim X \geq 2$: Wir identifizieren $X = \mathbb{R}^n$.

Zweiter Fakt: K ist beschränkt (z. B. in der EUKLIDISCHEN Norm $\|\cdot\|$ auf $X = \mathbb{R}^n$). Dazu nehmen wir an, dass es Punkte $(x_l)_{l \geq 1} \subseteq K$ gibt und für alle $l \geq 1$ gilt $\|x_l\| \geq l$. Wir betrachten $y_l := \frac{x_l}{\|x_l\|}$, also $\|y_l\| = \|\frac{x_l}{\|x_l\|}\| = \frac{\|x_l\|}{\|x_l\|} = 1$. Es liegen $(y_l)_{l \geq 1}$ in der beschränkten und abgeschlossenen Einheitskugel $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS existiert eine Teilfolge $(y_{l_k})_{k \geq 1}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{l_k} = y_0 \in S$. Es genügt zu zeigen, dass $\{\lambda y_0 \mid \lambda \geq 0\} \subseteq K$ (Halbgerade in K). Wir fixieren das $\lambda > 0$. Der Fall $\lambda = 0$ ist nach Voraussetzung trivial.

1. 1. Fall K ist abgeschlossen: $w_k := \lambda y_{l_k} = \frac{\lambda}{\|x_{l_k}\|} \cdot x_{l_k} + (1 - \frac{\lambda}{\|x_{l_k}\|}) \cdot 0 \in K$ gilt, wenn $\frac{\lambda}{\|x_{l_k}\|} \leq 1$, also $k \geq k_0$. Somit können wir schreiben: $\lambda y_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda y_{l_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} w_k \in K$.

1. 2. Fall K offen: Wir betrachten $u_k := \frac{\lambda}{\|x_{l_k}\| - \lambda} (\|x_{l_k}\| y_0 - x_{l_k})$ für $\|x_{l_k}\| > \lambda$, also für $k \geq k_0$. Es ist $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$. Denn $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda x_{l_k}}{\|x_{l_k}\| - \lambda} = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{l_k}}{\|x_{l_k}\| - \lambda} = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{l_k}}{\|x_{l_k}\|} = \lambda y_0 = \lambda y_0 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{l_k}\|}{\|x_{l_k}\| - \lambda} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\|x_{l_k}\| - \lambda} \|x_{l_k}\| y_0$. Da K offen und $0 \in K$ ist $u_k \in K$ für $k \geq k_1 \geq k_0$. Wegen der letzten Bedingung ist $K \ni \frac{\lambda}{\|x_{l_k}\|} \cdot x_{l_k} + (1 - \frac{\lambda}{\|x_{l_k}\|}) \cdot u_k = \frac{\lambda}{\|x_{l_k}\|} \cdot x_{l_k} + \frac{\lambda}{\|x_{l_k}\|} (\|x_{l_k}\| y_0 - x_{l_k}) = \lambda y_0$.

Somit wissen wir, dass K beschränkt ist und fahren im Beweis des zweiten Falles fort. Es ist $P = \text{conv}\{t_1, \dots, t_m\}$ ein konvexes Polyeder mit inneren Punkten (volldimensional), denn $X = \text{span}\{t_1, \dots, t_m\}$. Ein Polyeder hat mindestens eine Kante $L = \overline{t_1 t_2} = \text{conv}\{t_1, t_2\}$.

Sei H eine Stützhyperbene an P , die P nur genau in L schneidet. Wir beschreiben H durch ein lineares Funktional: $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Weiterhin existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(H) = \{c\} = f(L)$. Andererseits weiß man $f(P \setminus L) \subseteq (-\infty, c)$. Dazu betrachten wir $I := \{1, \dots, m\}$, $J = \{j \in I \mid t_j \in L\}$. Also hat das Funktional die Eigenschaft:

$$f(t_i) = \begin{cases} c & i \in J \\ < c & i \notin J \end{cases}$$

Ist das $f(t_i)$ OK?

Da K beschränkt ist, ist das Supremum $\sup f(M_i) \leq \sup f(K) < \infty$ und $\sup f(M_i) = \sup f(M_1 + t_i) = \sup f(M_1) + f(t_i)$. Damit ergibt sich:

$$\sup f(M_i) = \begin{cases} d := \sup f(K) & i \in J \\ < d & i \notin J \end{cases}$$

Wir wählen ein $x_0 \in K$ mit $\max \sup f(M_i) < f(x_0) \leq \sup f(K)$ und definieren die Gerade $g := \{x_0 + \lambda(t_{i_1} - t_{i_2}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ durch x_0 und parallel zu L . Da $f(t_{i_1}) = f(t_{i_2}) = c$ ist, folgt $f(g) = f(x_0)$. Nun betrachten wir die disjunkte Vereinigung $\bar{K} = K \cap g = (M_1 \cap g) \cup \dots \cup (M_m \cap g)$.

Sei nun $i \in I \setminus J$. Dann ist $\sup f(M_i) < f(x_0)$. Da $f(g) = f(x_0)$ ist, ist $M_i \cap g = \emptyset$. Also ergibt sich für $\bar{K} = \bigcup_{j \in J} (M_j \cap g) = \bigcup_{j \in J} \bar{M}_j$ disjunkte Vereinigung.

Wir betrachten $j_1, j_2 \in J$ und erhalten $\bar{M}_{j_2} = M_{j_2} \cap g = (M_{j_1} - t_{j_1} + t_{j_2}) \cap g \stackrel{t_{j_2} - t_{j_1} \parallel g}{=} (M_{j_1} \cap g) - t_{j_1} + t_{j_2} = \bar{M}_{j_1} - t_{j_1} + t_{j_2}$. Somit ist \bar{K} translativ \bar{m} -teilbar mit $\bar{m} = \text{card}(J) \geq 2$. Die Menge \bar{K} ist ein offenes oder abgeschlossenes Intervall und damit haben wir einen Widerspruch zum ersten Fall, da $\dim \bar{K} = 1$.

(ii) \Rightarrow (i) Wir wissen, dass $\{x + \lambda y \mid \lambda \geq 0\}$. Es genügt zu zeigen, dass $z + y \in K$ für alle $z \in K$ gilt. Mit dieser Aussage folgt dann, dass $\tau(K) \subseteq K$ für die Translation $\tau(z) = z + y$ und K erfüllt nicht die Fixpunkteigenschaft bezüglich dieser Translationsgruppe \mathfrak{W}_X . Also ist K nach [Satz 2.1](#) translativ m -teilbar.

Sei dazu $z \in K$ fixiert und wir wählen $Y = \text{span}\{x, y, z\} \subseteq X$.

1. Fall $K \cap Y$ abgeschlossen bezüglich der natürlichen Topologie von Y : Dazu definieren wir den Punkt $w_k := \frac{k-1}{k}z + \frac{1}{k}(x + ky) \in K \cap Y$ und $w_k = z + y + \frac{1}{k}(x - z) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z + y$. Also ist $z + y = \lim_{k \rightarrow \infty} w_k \in K \cap Y \Rightarrow z + y \in K$.

2. Fall $K \cap Y$ offen in natürlichen Topologie von Y : Insbesondere gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq K \cap Y$ von z bezüglich der natürlichen Topologie von Y . Wir definieren $u_k := z + \frac{z-x}{k-1}$. Für $k > k_0$ haben wir $u_k \in U \subseteq K \cap Y$. Also $\frac{k-1}{k}u_k + \frac{1}{k}(x + ky) \in K \cap Y$ und wir können das u_k einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{k-1}{k}u_k + \frac{1}{k}(x + ky) &= \frac{k-1}{k} \left(z + \frac{z-x}{k-1} \right) + \frac{x}{k} + y \\ &= \frac{z(k-1)}{k} + \frac{z-x}{k} + \frac{x}{k} + y \\ &= z - \frac{z}{k} + \frac{z}{k} - \frac{x}{k} + \frac{x}{k} + y = z + y \in K \cap Y \end{aligned}$$

Also auch $z + y \in K$. ■

Hier stand ein +, aber damit funktioniert der Beweis nicht. Ist – korrekt?

2 Teilbarkeit konvexer Mengen (disjunkte Pflasterungen)

Bemerkung 2.6

- a) Unbeschränkte abgeschlossene konvexe Mengen im unendlich-dimensionalen normierten Räumen enthalten nicht notwendig Halbgeraden.

Dazu nehmen wir als Beispiel den Raum $X = \ell_1$ mit der unbeschränkten Menge $K = \{ (\xi_k)_{k \geq 1} \in \ell_1 \mid 1 \geq \xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots \geq 0 \}$. Denn $\lim_{l \rightarrow \infty} \|(1, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)\|_1 = \lim_{l \rightarrow \infty} l = \infty$. Aber K enthält keine Halbgerade, denn alle Koordinaten aller Vektoren aus K sind gleichmäßig beschränkt.

- b) Die topologischen Forderungen an K (endlich abgeschlossen bzw. offen) sind in beiden Richtungen der Äquivalenz nötig:

(a) $K = [0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ ist m -teilbar, aber ohne Halbgerade.

(b) $K = (\mathbb{R} \times [-1, 0)) \cup \{(0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ enthält eine Halbgerade, ist aber nicht 2-teilbar. Denn nehmen wir an, dass $K = M_1 \cup M_2 = M_1 \cup (M_1 + t_2)$ eine disjunkte Zerlegung ist. Sei o. B. d. A. $(0, 0) \in M_1$. Damit ist $t_2 = (0, 0) + t_2 \in M_2 \subseteq K \setminus \{(0, 0)\}$. Dann wäre $\bar{K} := K \cap \{(0, 0) + \lambda t_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ auch 2-teilbar. Das ist aber topologisch vom Typ $[a, b]$ und damit ein Widerspruch zu [Satz 2.2](#).

2.4 Isometrische (Un-)Teilbarkeit

2.4.1 Begriffe

Definition 2.7 (Inneres, Abschluss, Rand)

Sei (R, \mathcal{O}) ein topologischer Raum mit $M \subseteq R$.

- a) $\text{int}(M) := \bigcup_{G \subseteq M, G \in \mathcal{O}} G = \{x \in M \mid \exists G \in \mathcal{O} (x \in G \subseteq M)\}$ **Inneres** von M .
- b) $\text{cl}(M) := \bigcap_{M \subseteq A, A \in \mathcal{O}} A = \{x \in R \mid \forall G \in \mathcal{O} (x \in G \Rightarrow G \cap M \neq \emptyset)\}$ **Abschluss** von M .
- c) Der **Rand** von M ist:

$$\begin{aligned} \text{bd}(M) &:= \text{cl}(M) \setminus \text{int}(M) \\ &= \{x \in R \mid \forall G \in \mathcal{O} (x \in G \Rightarrow G \cap M \neq \emptyset \wedge G \setminus M \neq \emptyset)\} \end{aligned}$$

Bemerkung 2.7

- a) Das Innere $\text{int}(M) \in \mathcal{O}$ ist offen und der Abschluss $\text{cl}(M)$ sowie der Rand $\text{bd}(R) \in \{F \subseteq R \mid R \setminus F \in \mathcal{O}\}$ sind abgeschlossen.
- b) $\text{bd}(M) = \text{cl}(M) \cap \text{cl}(R \setminus M)$
- c) $\text{int}(M_1) \cap \text{int}(M_2) = \text{int}(M_1 \cap M_2)$
- d) Es gilt, $\bigcap_{i \in I} \text{int}(M_i) \supseteq \text{int}(\bigcap_{i \in I} M_i)$. Aber im Allgemeinen gilt die Umkehrung nicht: Denn $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} \text{int}([-1/i, 1/i]) = \{0\} \neq \emptyset = \text{int}(\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} [-1/i, 1/i])$.

- e) Weiter ist $\text{int}(M_1) \cup \text{int}(M_2) \subseteq \text{int}(M_1 \cup M_2)$. Im Allgemeinen gilt nicht die Gleichheit, denn $\text{int}([-1, 0]) \cup \text{int}([0, 1]) = (-1, 0) \cup (0, 1) \neq (-1, 1) = \text{int}([-1, 0] \cup [0, 1])$.
- f) Analog haben wir $\text{cl}(M_1) \cup \text{cl}(M_2) = \text{cl}(M_1 \cup M_2)$ und $\bigcup_{i \in I} \text{cl}(M_i) \subseteq \text{cl}(\bigcup_{i \in I} M_i)$. Im Allgemeinen gilt nicht die Gleichheit, denn $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \text{cl}([1/i+1, 1/i]) = (0, 1] \neq [0, 1] = \text{cl}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} [1/i+1, 1/i])$. Schließlich ist auch $\text{cl}(M_1) \cap \text{cl}(M_2) \supseteq \text{cl}(M_1 \cap M_2)$. Im Allgemeinen gilt auch hier keine Gleichheit, denn $\text{cl}((-1, 0)) \cap \text{cl}((0, 1)) = \{0\} \neq \emptyset = \text{cl}((-1, 0) \cap (0, 1))$.
- g) Sei (X, d) ein metrischer Raum mit $x_0 \in X$ und $r > 0$. Dann ist mit $\mathring{B}(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$ die **offene Kugel** definiert. Es gilt, $\text{cl}(\mathring{B}(x_0, r)) \subseteq B(x_0, r)$. Im Allgemeinen haben wir keine Gleichheit. Diese gilt nur, falls $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist. Weiterhin ist $\text{int}(B(x_0, r)) \supseteq \mathring{B}(x_0, r)$. Die Gleichheit hat man wieder im normierten Fall.

Beispiel 2.6

- früher: ℓ_1 und c_0

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ mit $\|(\xi_1, \dots, \xi_n)\|_p = \begin{cases} (|\xi_1|^p + \dots + |\xi_n|^p)^{1/p} & p < \infty \\ \max\{|\xi_1|, \dots, |\xi_n|\} & p = \infty \end{cases}$

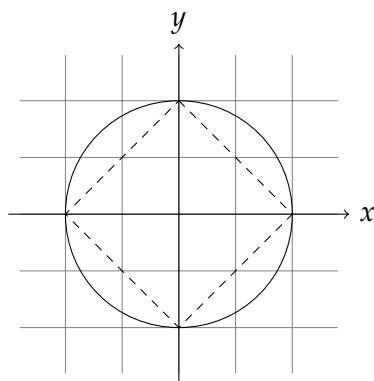


Abbildung 2.1: Kugeln der Eins- und Zwei-Norm

Bemerkung 2.8

Dem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist der metrische Raum (X, d) mit $d(x, y) := \|x - y\|$ zugeordnet.

Definition 2.8 (Homöomorphismus)

Eine Bijektion $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$ zwischen topologischen Räumen (R_1, \mathcal{O}_1) und (R_2, \mathcal{O}_2) heißt **Homöomorphismus**, wenn φ und φ^{-1} stetig sind.

Satz 2.3

Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so bilden die Isometrien von X auf Keine Untergrup-

Einmal zwei NR und dann nur einer. Was ist korrekt?

2 Teilbarkeit konvexer Mengen (disjunkte Pflasterungen)

pe der Gruppe aller affinen Homöomorphismen von X . Genauer: Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und ist $\varphi: X \rightarrow Y$ eine Bijektion mit

$$(2.3) \quad \forall x, y \in X: (\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_Y = \|x - y\|_X)$$

so ist φ eine affine Abbildung.

BEWEIS:

Sei $\bar{\varphi}: X \rightarrow Y$ mit $\bar{\varphi}(x) := \varphi(x) - \varphi(0)$ eine Abbildung. Dann folgt, $\bar{\varphi}(0) = 0$ und $\bar{\varphi}$ ist eine Isometrie im Sinne von [Gleichung 2.3](#). Nach dem dritten Punkt der [Bemerkung 2.1](#) genügt es zu zeigen, dass $\bar{\varphi}$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung ist.

Dabei gehen wir schrittweise vor und versuchen, den Nachweis allein aus den metrischen Eigenschaften zu führen

- (1) Für alle x_1 und x_2 aus X zeigen wir, dass $\bar{\varphi}(1/2(x_1 + x_2)) = 1/2(\bar{\varphi}(x_1) + \bar{\varphi}(x_2))$ gilt. Dazu betrachten wir X als metrischen Raum (X, d) und definieren Hilfsmengen:

$$(2.4) \quad H_1 := \{x \in X \mid d(x, x_1) = d(x, x_2) = 1/2d(x_1, x_2)\}$$

$$(2.5) \quad H_n := \{x \in H_{n-1} \mid \forall y \in H_{n-1}: d(x, y) \leq 1/2 \text{diam}(H_{n-1})\} \quad n \geq 2$$

Dabei ist

$$\text{diam}(H_{n-1}) := \begin{cases} \sup \{d(x, y) \mid x, y \in H_{n-1}\} & H_{n-1} \neq \emptyset \\ 0 & H_{n-1} = \emptyset \end{cases}$$

Damit strebt $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(H_n)$ gegen 0, denn $\text{diam}(H_1) \leq d(x_1, x_2) < \infty$, denn $x, y \in H_1 \Rightarrow d(x, y) \leq d(x, x_1) + d(x_1, y) \leq d(x_1, x_2)$. Weiter ist $\text{diam}(H_n) \leq 1/2 \text{diam}(H_{n-1})$ für $n \geq 2$. Denn für $x, y \in H_n \Rightarrow x \in H_{n-1}, y \in H_{n-1} \Rightarrow d(x, y) \leq 1/2 \text{diam}(H_{n-1})$. Außerdem $\text{diam}(H_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}} d(x_1, x_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Wegen der Teilmengenbeziehung folgt,

$$(2.6) \quad \bigcap_{n \geq 1} H_n = \emptyset \vee \bigcap_{n \geq 1} H_n = \{x_0\}$$

Der letzte Fall wird als das **metrische Zentrum** bezeichnet.

Im normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ sei für $x \in X$ erklärt: $\bar{x} := x_1 + x_2 - x$. Nun zeigen wir:

$$(2.7) \quad \forall n \geq 1: x \in H_n \Rightarrow \bar{x} \in H_n$$

Für $n = 1$ sei $x \in H_1$ folgt nach Definition: $\|x - x_1\| = \|x - x_2\| = 1/2d(x_1, x_2) = \|\bar{x} - x_2\| = \|\bar{x} - x_1\|$. Also ist $\bar{x} \in H_1$.

Im Induktionsschritt sei $x \in H_n$ und wir wollen zeigen, dass $\bar{x} \in H_n$. Nach der Induktionsvoraussetzung ist $\bar{x} \in H_{n-1}$, da $x \in H_{n-1}$ und für alle $y \in H_{n-1}$ mit $\|\bar{x} - y\| \leq 1/2 \text{diam}(H_{n-1})$ gilt, $\|\bar{x} - y\| = \|x_1 + x_2 - y - x\| = \|\bar{y} - x\|$, aber

Eventuell in Definition packen

$\bar{y} \in H_{n-1}$ und $x \in H_n$. Nach der Definition ist das kleiner oder gleich $1/2 \operatorname{diam}(H_{n-1})$. Also ist $\bar{x} \in H_n$.

Nun ist noch zu zeigen, dass

$$(2.8) \quad x_0 := \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in \bigcap_{n \geq 1} H_n$$

ist. Dazu gehen wir wieder induktiv vor. Für $n = 1$ ist $\|1/2(x_1 + x_2) - x_1\| = \|1/2(x_1 + x_2) - x_2\| = 1/2\|x_1 - x_2\|$. Also ist x_0 nach [Gleichung 2.3](#) in H_1 . Im Induktionsschritt sei $1/2(x_1 + x_2) \in H_{n-1}$. Wenn wir nun ein $y \in H_{n-1}$ haben, dann ist $\bar{y} = x_1 + x_2 - y \in H_{n-1}$. Also ist $\|1/2(x_1 + x_2) - y\| = 1/2\|(x_1 + x_2 - y) - y\| = \|\bar{y} - y\| \leq 1/2 \operatorname{diam}(H_{n-1})$. Nach [Gleichung 2.3](#) gilt, $1/2(x_1 + x_2) \in H_n$.

Da die Konstruktion von x_0 aus x_1 und x_2 nur metrische Eigenschaften benutzt, entsteht das isometrische Bild $\bar{\varphi}(x_0)$ im Bildraum Y analog aus $\bar{\varphi}(x_1)$ und $\bar{\varphi}(x_2)$. Analoge Betrachtung zu [Gleichung 2.8](#) in $(Y, \|\cdot\|)$ liefert $\bar{\varphi}(x_0) = 1/2(\bar{\varphi}(x_1) + \bar{\varphi}(x_2))$. Wegen [Gleichung 2.8](#) folgt damit: $\bar{\varphi}(1/2(x_1 + x_2)) = 1/2(\bar{\varphi}(x_1) + \bar{\varphi}(x_2))$.

- (2) Nun setzen wir $x_1 := x$ und $x_2 := 0$ in die eben bewiesene Gleichung und erhalten für alle $x \in X$ die Aussage: $\bar{\varphi}(1/2x) = 1/2\bar{\varphi}(x)$.
- (3) Für alle x_1 und x_2 aus X erhalten wir die Aussage: $\bar{\varphi}(x_1 + x_2) = \bar{\varphi}(x_1) + \bar{\varphi}(x_2)$. Denn $\bar{\varphi}(x_1 + x_2) = \bar{\varphi}(2(1/2(x_1 + x_2))) = 2\bar{\varphi}(1/2(x_1 + x_2)) = 2(1/2(\bar{\varphi}(x_1) + \bar{\varphi}(x_2))) = \bar{\varphi}(x_1) + \bar{\varphi}(x_2)$.
- (4) Schließlich folgt für alle $x \in X$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$. Denn für $\lambda \in \mathbb{Q}$ ergibt sich dies aus der obigen Aussage. Weiter wissen wir, dass mit der Stetigkeit von φ die Aussage auch für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. ■

Bemerkung 2.9

In [Satz 2.3](#) ist die Surjektivität von φ wesentlich: Seien $(X, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $(Y, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Dann ist $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $x \mapsto (x, |x|)$ keine affine Isometrie im Sinne von [Satz 2.1](#).

Definition 2.9 (Strenge Konvexität)

- (a) Eine abgeschlossene konvexe Teilmenge K eines normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$ heißt **streng konvex**, wenn keine Strecke $\{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ mit $x_1 \neq x_2$ in $\operatorname{bd}(K)$ enthalten ist.
- (b) Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt **streng konvex**, wenn die Einheitskugel $B(0, 1)$ und damit jede abgeschlossene Kugel streng konvex ist.

Satz 2.4

Für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ sind äquivalent:

- (i) $(X, \|\cdot\|)$ streng konvex.
- (ii) $\forall x_1, x_2 \in B(0, 1): \|\frac{x_1 + x_2}{2}\| = 1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

2 Teilbarkeit konvexer Mengen (disjunkte Pflasterungen)

Muss das
 $B(x_0, r)$ l

(iii) $\forall x_1, x_2 \in X \forall x_0 \in X \forall r > 0: x_1, x_2 \in B(x_0, r) \wedge \|x_1 - x_2\| = 2r \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = x_0$

BEWEIS:

(i) \Rightarrow (ii) Wir betrachten einen streng konvexen Raum $(X, \|\cdot\|)$ und $x_1, x_2 \in B(0, 1)$ mit $\|\frac{x_1 + x_2}{2}\| = 1$ und es ist zu zeigen, dass $x_1 = x_2$. Wir wissen $1 = \|\frac{x_1 + x_2}{2}\| \leq \frac{1}{2}\|x_1\| + \frac{1}{2}\|x_2\| \leq 1/2 + 1/2 = 1$. Also ist $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, d. h. $x_1, x_2 \in \text{bd}(B(0, 1))$. Nun betrachten wir die Strecke $\overline{x_1 x_2} = \{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ und nehmen an, dass $x_1 \neq x_2$. Es ist $\|\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2\| \leq \lambda\|x_1\| + (1 - \lambda)\|x_2\| = 1$. Wir wissen, $1 = \|\frac{x_1 + x_2}{2}\|$ und wir unterscheiden zwei Fälle:

$$- 0 \leq \lambda \leq 1/2: 1 = \|\frac{x_1 + x_2}{2}\| = \|\frac{1}{2(1-\lambda)}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + (1 - \frac{1}{2(1-\lambda)})x_1\| \leq \frac{1}{2(1-\lambda)}\|\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2\| + 1 - \frac{1}{2(1-\lambda)}\|x_1\| \leq 1$$

$$- 1/2 \leq \lambda \leq 1: \|\frac{1}{2\lambda}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + (1 - \frac{1}{2\lambda})x_2\| \leq \frac{1}{2\lambda}\|\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2\| + (1 - \frac{1}{2\lambda})\|x_2\| \leq 1$$

Somit ist also: $\|\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2\| = 1$ und es folgt, $\overline{x_1 x_2} \subseteq \text{bd}(B(0, 1))$ ζ zu dem Punkt (i).

(ii) \Rightarrow (i) Wir nehmen an, die Voraussetzung gilt nicht. Dann haben wir eine Strecke $\overline{x_1 x_2}$ mit $x_1 \neq x_2$, die in $\text{bd}(B(0, 1))$ liegt. Dann ist $\|\frac{x_1 + x_2}{2}\| = 1$ für $x_1, x_2 \in B(0, 1)$, denn $\frac{x_1 + x_2}{2} \in \overline{x_1 x_2} \subseteq \text{bd}(B(0, 1))$. Aus (ii) folgt aber $x_1 = x_2$. ζ

(ii) \Rightarrow (iii) Seien $x_0, x_1, x_2 \in X, r > 0, x_1, x_2 \in B(x_0, r)$ und $\|x_1 - x_2\| = 2r$. Damit liegen $y_1 := \frac{x_1 - x_0}{r}$ und $y_2 := -\frac{x_2 - x_0}{r}$ in der Kugel $B(x_0, r)$. Weiter ist $\|\frac{y_1 + y_2}{2}\| = \|\frac{x_1 - x_2}{2r}\| = 1$. Wegen des zweiten Punktes ergibt sich $y_1 = y_2$. Also ist $\frac{x_1 - x_0}{r} = -\frac{x_2 - x_0}{r}$ und damit $\frac{x_1 + x_2}{2} = x_0$.

(iii) \Rightarrow (ii) Wir betrachten $x_1, x_2 \in B(0, 1)$ mit $\|\frac{x_1 + x_2}{2}\| = 1$. Wir setzen $y_1 := x_1, y_2 := -x_2, y_0 := 0$ und $r := 1$. Diese erfüllen $y_1, y_2 \in B(0, 1) = B(y_0, r)$ und $\|y_1 - y_2\| = \|x_1 + x_2\| = 2\|\frac{x_1 + x_2}{2}\| = 2r$. Nach dem Punkt (iii) folgt, dass $0 = y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Also ist $x_1 = x_2$. ■

Beispiel 2.7

(a) nicht streng konvexe Räume:

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, denn die Strecke $\overline{(1, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots)} \subseteq \text{bd}(B(0, 1))$.
- $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$, denn die Strecke $\overline{(1, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots)} \subseteq \text{bd}(B(0, 1))$.
- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ und analog $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, die Strecke $\overline{(1, 1, 0, 0, \dots), (1, \dots, 1, 0, 0, \dots)} \subseteq \text{bd}(B(0, 1))$

(b) streng konvexe Räume: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ mit $1 < p < \infty$ und analog $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ mit $1 < p < \infty$.

BEWEIS:

Für $1 < p < \infty$ hat man die Funktion $f_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_p(x) := |x|^p$. Diese erfüllt die Ungleichung $f_p(\frac{x+y}{2}) \leq 1/2(f_p(x) + f_p(y))$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $x = y$.

Nun ist $x, y \in B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ und $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$. Weiter ist $\|\frac{x+y}{2}\|_p = 1$. Es ist zu zeigen, dass $x = y$. Es gilt: $1 = \|\frac{x+y}{2}\|_p \leq 1/2\|x\|_p + 1/2\|y\|_p \leq 1/2 + 1/2 = 1$. Damit haben wir $\|x\|_p^{(p)} = \|y\|_p^{(p)} = \|\frac{x+y}{2}\|_p^{(p)} = 1$ und weiter $|\xi_1|^p + \dots + |\xi_n|^p = |\eta_1|^p + \dots + |\eta_n|^p = |\frac{\xi_1+\eta_1}{2}|^p + \dots + |\frac{\xi_n+\eta_n}{2}|^p = 1$. Es folgt, $\frac{|\xi_1^p + |\eta_1|^p}{2} + \dots + \frac{|\xi_n^p + |\eta_n|^p}{2} = |\frac{\xi_1+\eta_1}{2}|^p + \dots + |\frac{\xi_n+\eta_n}{2}|^p \Rightarrow \frac{f_p(\xi_1) + f_p(\eta_1)}{2} + \dots + \frac{f_p(\xi_n) + f_p(\eta_n)}{2} = f_p(\frac{\xi_1+\eta_1}{2}) + \dots + f_p(\frac{\xi_n+\eta_n}{2}) \Rightarrow \xi_1 = \eta_1, \dots, \xi_n = \eta_n$. Also $x = y$. ■

2.4.2 Isometrische Unteilbarkeit streng konvexer Kugeln

Satz 2.5

Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein streng konvexer normierter Raum und $Y \subsetneq X$ ein endlich-dimensionaler echter Unterraum von X . Dann gilt, $\exists x_0 \in \text{bd}(B(0, 1)) \forall y \in Y \setminus \{0\}: x_0, -x_0 \notin B(y, 1)$.

BEWEIS:

Wir wählen $x_1 \in X \setminus Y$ und betrachten die Funktion $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(y) := \|x_1 - y\|$. Diese ist stetig. Es existiert ein $y_1 \in Y$, so dass $f(y_1) = \min_{y \in Y} f(y)$. Das ist insbesondere auch das Infimum $\inf_{y \in Y} \|x_1 - y\| =: d(x_1, Y)$. Denn $d(x_1, Y) \leq \|x_1 - 0\| = \|x_1\|$. Also ist $d(x_1, Y) = \inf_{y \in Y, y \in B(x_1, \|x_1\|)} (\|x_1 - y\|) = \inf_{y \in B(x_1, \|x_1\|) \cap Y} f(y)$. Dabei ist $B(x_1, \|x_1\|) \cap Y$ beschränkt und abgeschlossen, also auch kompakt. Jede stetige Funktion f auf einer kompakten Menge mit Werten in \mathbb{R} nimmt ihre Extrema als Funktionswerte an. Also gibt es ein $y_1 \in Y$ mit $f(y_1) = \min_{y \in B(x_1, \|x_1\|) \cap Y} f(y) = \min_{y \in Y} f(y)$.

Per Definition ist $x_0 := \frac{x_1 - y_1}{\|x_1 - y_1\|}$. Damit ist $\|x_0\| = 1$ und $x_0 \in \text{bd}(B(0, 1))$. Also:

$$\begin{aligned} d(x_0, Y) &= \inf_{y \in Y} \left\| \frac{x_1 - y_1}{\|x_1 - y_1\|} - y \right\| = \frac{1}{\|x_1 - y_1\|} \inf_{\tilde{y} \in Y} \|x_1 - y_1 - \tilde{y}\| \\ &= \frac{1}{\|x_1 - y_1\|} \inf_{\tilde{y} \in Y} \|x_1 - \tilde{y}\| = \frac{1}{\|x_1 - y_1\|} \|x_1 - y_1\| = 1 = \|x_0\| \end{aligned}$$

mit $\tilde{y} = \|x_1 - y_1\| - y$ und $\tilde{\tilde{y}} = y_1 + \tilde{y}$.

Wir nehmen an, dass ein $y_0 \in Y$ mit $x_0 \in B(y_0, 1)$ existiert. Analog kann man auch $-x_0$ betrachten. Nun ist zu zeigen, dass $y_0 = 0$. Aus der Annahme folgt, $\|x_0 - y_0\| \leq 1$. Außerdem $1 = d(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - \frac{y_0}{2}\| = \|\frac{x_0 + (x_0 - y_0)}{2}\| \leq 1/2\|x_0\| + 1/2\|x_0 - y_0\| \leq 1$. Damit folgt, $x_0, x_0 - y_0 \in B(0, 1)$ und $\|\frac{x_0 + (x_0 - y_0)}{2}\| = 1$. Nach dem obigen Satz 2.4 folgt, $x_0 = x_0 - y_0$, also $y_0 = 0$. ■

2 Teilbarkeit konvexer Mengen (disjunkte Pflasterungen)

Satz 2.6

Es seien $(X, \|\cdot\|)$ ein streng konvexer normierter Raum, $2 \leq m \leq \dim X$ und $M \subseteq B(0, 1)$ mit $0 \in M$ und $\text{bd}(B(0, 1)) \subseteq \text{cl}(M)$. Dann ist M nicht isometrisch m -teilbar.

BEWEIS:

Wir nehmen an, dass M doch m -teilbar ist. Damit können wir M als disjunkte Zerlegung $M = M_1 \cup \dots \cup M_m$ schreiben. Dabei ist $M_i = \varphi_i(M_1)$ mit φ_i aus der Isometriegruppe. Sei o. B. d. A. $0 \in M_1$. Dann ist:

$$(2.9) \quad \varphi_2(0), \dots, \varphi_m(0) \neq 0$$

und

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \text{bd}(B(0, 1)) \subseteq \text{cl}(M) &= \text{cl}(M_1) \cup \dots \cup \text{cl}(M_m) \\ &\subseteq \text{cl}(M_1) \cup B(\varphi_2(0), 1) \cup \dots \cup B(\varphi_m(0), 1) \end{aligned}$$

Die letzte Beziehung sieht man durch: $\text{cl}(M_i) = \text{cl}(\varphi_i(M_1)) \subseteq \varphi_i(B(0, 1)) = B(\varphi_i(0), 1)$.

Wir betrachten den [Satz 2.5](#) mit $Y = \text{span}\{\varphi_2(0), \dots, \varphi_m(0)\} \subsetneq X$, da $\dim X > \dim Y$. Somit existiert wegen [Satz 2.5](#) ein $x_0 \in \text{bd}(B(0, 1))$ mit $x_0, -x_0 \notin B(\varphi_2(0), 1) \cup \dots \cup B(\varphi_m(0), 1)$. Nach [Gleichung 2.10](#) liegen $x_0, -x_0 \in \text{cl}(M_1)$ und aufgrund der Isometrien liegen dann $\varphi_2(x_0), -\varphi_2(x_0) \in \varphi_2(\text{cl}(M_1)) = \text{cl}(M_2) \subseteq B(0, 1) \cap B(\varphi_2(0), 1)$ mit $\|\varphi_2(x_0) - \varphi_2(-x_0)\| = \|x_0 - (-x_0)\| = 2$. Somit haben wir zwei Punkte gefunden für die gilt: $0 = \frac{\varphi_2(x_0) + \varphi_2(-x_0)}{2} = \varphi_2(0)$. Also ist $\varphi_2(0) = 0$. Das ist aber ein Widerspruch zu [Gleichung 2.9](#). ■

Bemerkung 2.10

(a) $B(0, 1)$ ist durch jedes $B(x, r)$ mit $x \in X$ und $r > 0$ ersetzbar.

(b) Wichtige Beispiele: $M = B(0, 1)$ oder $M = \overset{\circ}{B}(0, 1)$.

Bemerkung 2.11

GUSTIN und HERTEL haben gezeigt, dass Intervalle der Form $[a, b]$ oder $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$ sind für kein $m \geq 2$ isometrisch m -teilbar sind. Isometrien von \mathbb{R} sind Verschiebungen oder Spiegelungen.

Offene Fragen sind:

(a) Falls $m > \dim X \geq 2$. Speziell: Ist die EUKLIDISCHE Einheitskreisscheibe isometrisch 3-teilbar.

(b) Nicht streng konvexe Räume X ?

(c) Isometrische m -Teilbarkeit weiterer beschränkter und abgeschlossener (evtl. kompakter) (streng) konvexer Mengen? Exaktere Abgrenzung zwischen Beispielen in [Abschnitt 2.2](#) und Unteilbarkeitsaussage ähnlich zu [Satz 2.6](#).

2.4.3 Isometrische Unteilbarkeit des typischen konvexen Körpers

Definition 2.10 (Parallelmenge, Hausdorff-Abstand)

(a) Die Menge der n -dimensionalen konvexen Körper:

$$\mathcal{K}_0^n := \{ K \subseteq \mathbb{R}^n \mid K \text{ konvex, kompakt, } \text{int}(K) \neq \emptyset \}$$

(b) ε -Parallelmenge von $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\varepsilon > 0$: $M_\varepsilon := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in M (\|x - y\|_2 \leq \varepsilon) \}$

(c) HAUSDORFF-ABSTAND zwischen Körpern $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_0^n$:

$$d_H(K_1, K_2) := \inf \{ \delta > 0 \mid K_1 \subseteq (K_2)_\delta \wedge K_2 \subseteq (K_1)_\delta \}$$

Dabei ist $(K_1)_\delta$ und $(K_2)_\delta$ die δ -Parallelmenge.

Beispiel 2.8

Wir betrachten die ε -Parallelmengen eines Quadrats Q mit Q_{ε_1} sowie eines Kreises K mit K_{ε_2} . Diese sind in [Abbildung 2.2](#) jeweils durch gestrichelte Linien markiert.

In der Abbildung lässt sich des Weiteren der HAUSDORFF-ABSTAND $d_H(K, Q)$ erkennen. Der beträgt hier ε_2 .

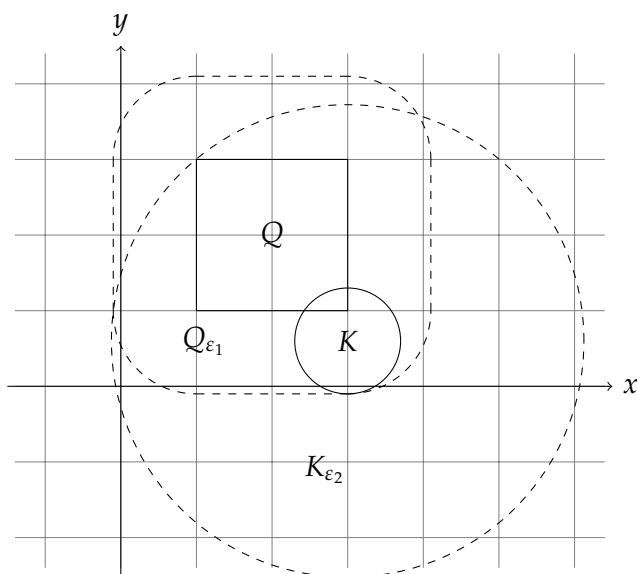


Abbildung 2.2: ε -Parallelmengen eines Quadrats und eines Kreises

Lemma 2.1

(\mathcal{K}_0^n, d_H) ist ein metrischer Raum für alle $n \geq 1$.

Definition 2.11 (Nirgend dichte, magere Menge, Bairescher Raum)

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

2 Teilbarkeit konvexer Mengen (disjunkte Pflasterungen)

- (a) Eine Teilmenge $N \subseteq X$ heißt genau dann **nirgends dicht**, wenn $\text{int}(\text{cl } N) = \emptyset$.
- (b) Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt genau dann von **1. Kategorie** oder **mager**, wenn es nirgends dichte Teilmengen N_1, N_2, \dots von X mit der Eigenschaft $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ gibt.
- (c) Ein metrischer Raum (X, d) heißt genau dann **Bairesch**, wenn für alle mageren Teilmengen $M \subseteq X$ gilt, dass $X \setminus M$ dicht in X liegt.

Bemerkung 2.12

- (a) Seien M_1, M_2, \dots von erster Kategorie, dann ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ auch von erster Kategorie.
- (b) $X \setminus M$ dicht in $X \Leftrightarrow \text{cl}(X \setminus M) = X$. Aber es gilt, $\text{cl}(X \setminus M) = X \setminus \text{int}(M)$ und damit $\text{int } M = \emptyset$.
- (c) Mengen von erster Kategorie in Baireschen Räumen sind „klein“.

Beispiel 2.9

- Man sieht, dass $\mathbb{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{q_i\}$ ist mager in \mathbb{R} , aber dicht.
- $\{k + 1/i \mid k \in \mathbb{Z}, i = 2, 3, 4, \dots\}$ ist nirgends dicht in \mathbb{R} .

Lemma 2.2 (Bairescher Kategoriensatz)

Jeder vollständige metrische Raum ist Bairesch.

Beispiel 2.10

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist Bairesch.
- $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ist *nicht* Bairesch, denn $\mathbb{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{q_i\}$ mager in $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, aber $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}$ ist *nicht* dicht.

Lemma 2.3

(\mathcal{K}_o^n, d_H) ist Bairesch für $n \geq 1$.

Definition 2.12 (Typischer n -dimensionaler Körper)

Man sagt, eine Aussage (A) gilt für den typischen n -dimensionalen Körper, wenn die Ausnahmemenge $\{K \in \mathcal{K}_o^n \mid K \text{ erfüllt (A) nicht}\}$ von erster Kategorie in (\mathcal{K}_o^n, d_H) ist.

Definition 2.13 (Volumen, Hausdorff-Maß)

Für eine Borelmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ seien $\text{vol}_n(B)$ das (n -dimensionale) **Volumen** (Lebesgue-Maß, n -dimensionales HAUSDORFF-Maß) und $\mathcal{H}^{n-1}(B)$ das $(n-1)$ -dimensionale HAUSDORFF-Maß („Oberflächenmaß“) von B .

Lemma 2.4

Für $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_o^n$ und $n \geq 2$ mit $K_1 \subseteq K_2$ gelten die folgenden Aussagen:

- (a) $\text{vol}_n(K_1) \leq \text{vol}_n(K_2)$ (Gleichheit gilt genau dann, wenn $K_1 = K_2$)
- (b) $\mathcal{H}^{n-1}(\text{bd}(K_1)) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\text{bd}(K_2))$ (Gleichheit gilt genau dann, wenn $K_1 = K_2$)

BEWEIS:

Beweis wird hier nicht geführt. Die erste Aussage ist leicht zu beweisen und gilt auch für den Fall $n = 1$. Während dies bei der zweiten Aussage nicht mehr so ist. ■

Satz 2.7

Der typische n -dimensionale konvexe Körper mit $n \geq 1$ ist für *kein* $m \in \{2, 3, 4, \dots\}$ bezüglich der euklidischen Isometrien m -teilbar.

BEWEIS:

Hier wird eine Beweisidee skizziert: Der Fall $n = 1$ ergibt sich aus [Bemerkung 2.11](#). Die Fälle für $n \geq 2$ ergeben sich aus [Lemma 2.5](#) und [Lemma 2.6](#) sowie seinen Folgerungen. ■

Lemma 2.5

Ein Körper $K \in \mathcal{K}_o^n$ mit $n \geq 2$ besitze eine Vereinigungsdarstellung $K = \bigcup_{i=1}^m \varphi_i(M)$ mit einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $m \geq 2$ euklidischen Isometrien $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. Dann existieren $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq m$ mit $\mathcal{H}^{n-1}(\varphi_{i_2} \varphi_{i_1}^{-1}(\text{bd}(K)) \cap \text{bd}(K)) > 0$.

BEWEIS:

Sei o. B. d. A. $M \in \mathcal{K}_o^n$. Sonst ersetzt man das M durch $\text{cl}(\text{conv}(M))$.

1. Fall $\varphi_1(M) = K$: Dann ist $\text{vol}_n(\varphi_2(M)) = \text{vol}_n(\varphi_1(M)) = \text{vol}_n(K)$ mit $\varphi_2(M) \subseteq K$. Nach dem [Lemma 2.4](#) ist dann $\varphi_2(M) = K$. Also haben wir $\mathcal{H}^{n-1}(\varphi_2 \varphi_1^{-1}(\text{bd}(K)) \cap \text{bd}(K)) = \mathcal{H}^{n-1}(\underbrace{\varphi_1^{-1}(\text{bd}(K))}_{\text{bd}(M)} \cap \underbrace{\varphi_2^{-1}(\text{bd}(K))}_{\text{bd}(M)}) = \mathcal{H}^{n-1}(\text{bd}(M)) > 0$.

2. Fall $\varphi_1(M) \neq K$: Somit folgt, $\varphi_1(M) \subsetneq K$ und wir schätzen ab:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{n-1}(\text{bd}(M)) &= \mathcal{H}^{n-1}(\text{bd}(\varphi_1(M))) \stackrel{\text{Lemma 2.4}}{<} \mathcal{H}^{n-1}(\text{bd}(K)) \\ &= \mathcal{H}^{n-1}\left(\text{bd}(K) \cap \bigcup_{i=1}^m \text{bd}(\varphi_i(M))\right) \quad \text{da } \text{bd}(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^m \text{bd}(\varphi_i(M)) \\ &\leq \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^{n-1}(\text{bd}(K) \cap \text{bd}(\varphi_i(M))) \\ &= \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^{n-1}(\varphi_i^{-1}(\text{bd}(K)) \cap \text{bd}(M)) \end{aligned}$$

Damit überlappen sich notwendigerweise zwei Mengen. Also existieren zwei Indices $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq m$ mit $\mathcal{H}^{n-1}((\varphi_{i_1}^{-1}(\text{bd}(K)) \cap \text{bd}(K)) \cap (\varphi_{i_2}^{-1}(\text{bd}(K)) \cap \text{bd}(M))) > 0$. Damit ist $\mathcal{H}^{n-1}(\varphi_{i_1}^{-1}(\text{bd}(K)) \cap \varphi_{i_2}^{-1}(\text{bd}(K))) > 0$ und es ergibt sich die Behauptung. ■

Folgerung 2.1

Ist der konvexe Körper $K \in \mathcal{K}_o^n$ mit $n \geq 2$ bezüglich der euklidischen Isometrien m -teilbar für $m \geq 2$, so existiert eine Isometrie $\varphi \neq \text{id}$ mit $\mathcal{H}^{n-1}(\varphi(\text{bd}(K)) \cap \text{bd}(K)) > 0$.

2 Teilbarkeit konvexer Mengen (disjunkte Pflasterungen)

Lemma 2.6

Sei $n \geq 2$. Dann ist die Menge der $K \in \mathcal{K}_o^n$ für die eine euklidische Isometrie $\varphi \neq \text{id}$ mit [Folgerung 2.1](#) existiert, von erster Kategorie in (\mathcal{K}_o^n, d_H) .

Bemerkung 2.13

Die mit der [Folgerung 2.1](#) gegebene notwendige Bedingung ist für viele $K \in \mathcal{K}_o^n$ erfüllt:

- K symmetrisch ($\exists \varphi \neq \text{id}$ euklidische Isometrie: $\varphi(K) = K$), z. B. Kugeln
- K mit Hyperebenenstück in $\text{bd}(K)$, z. B. Polyeder

2.4.4 Positive Aussagen zur isometrischen Teilbarkeit spezieller konvexer Kompakta in euklidischen Räumen

Satz 2.8

Für jede Dimension n mit $n \mid 3$ gibt es eine natürliche Zahl $m_n \geq 2$ derart, dass jede abgeschlossene oder offene Kugel im euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ für alle $m \geq m_n$ isometrisch m -teilbar ist.

Beispiel 2.11

Für $n = 3$ ist $m_n = 22$ eine solche Zahl.

Bemerkung 2.14

- a) Im Vergleich mit anderen Normen, z. B. $\|\cdot\|_p$ mit $1 \leq p \leq \infty$ und $p \neq 2$, liegt eine besonders reichhaltige Isometriegruppe vor. Weiterhin sind Kugeln besonders symmetrische Mengen, d. h. sie werden von vielen Isometrien auf sich abgebildet. In diesem Sinne nutzt der Satz besonders flexible Voraussetzungen.
- b) Zur Methodik des Beweises:
 - $n = 3$ ist zentraler Fall, betrachte o. B. d. A. $B(0, 1)$ bzw. $\mathring{B}(0, 1)$.
 - Die Gruppe der orientierungserhaltenden Deckbewegungen von $B(0, 1)$ bzw. $\mathring{B}(0, 1)$ ist relativ reichhaltig. Sie besitzt im Gegensatz zum zweidimensionalen Fall freie Untergruppen mit mehr als zwei Erzeugern. Aber sie sind nicht zu groß und ist lokal kommutativ. Die Begriffe werden im nächsten Kapitel genauer definiert.
 - Zum Nachweis der m -Teilbarkeit von $B(0, 1)$ bzw. $\mathring{B}(0, 1)$ werden $n - 1$ geeignete Drehungen (im algebraischen Sinne) $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ gewählt, wobei $\delta_{n-1}, \dots, \delta_{n-2}$ Deckbewegungen der Kugel sind. Dann wird die Kugel in Teile von Orbits unter der Gruppe $\langle \delta_1, \dots, \delta_{n-1} \rangle$ zerlegt und in jedem Orbit nach dem Zornschen Lemma eine Zerlegung gefunden.

Folgerung 2.2

Im Raum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ mit $n \geq 3$ gibt es konvexe Körper $K_n \subseteq \mathbb{R}^n$, die für alle $m \geq 22$ isometrisch m -teilbar sind.

2.5 Die affine Nichtzweiteilbarkeit konvexer Kompakta

BEWEIS:

Es ist bekannt, dass bei $n = 3$ gilt: $K_3 = B(0, 1)$. Dies ist in isometrisch kongruente Teile M_1, \dots, M_m zerlegbar mit $M_i = \varphi_i(M_1)$. Für $n > 3$ erfolgt „Zylinderbildung“: $K_n := K_3 \times [0, 1]^{n-3} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist konvex, kompakt und in isometrisch kongruente Teile $M_1 \times [0, 1]^{n-3}, \dots, M_m \times [0, 1]^{n-3}$ zerlegbar mit $M_i \times [0, 1]^{n-3} = \varphi_i \times \text{id}_{\mathbb{R}^{n-3}}(M_i \times [0, 1]^{n-3})$. ■

Bemerkung 2.15

Weitere offene Fragen:

- Gibt es in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ isometrisch m -teilbare konvexe Körper für ein $m \geq 2$?
- Sind Kugeln in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ für $n \nmid 3$ und $n > 3$ teilbar?
- Bestimmung der optimalen (d. h. minimaler) Teileanzahlen bei teilbaren Körpern.

2.5 Die affine Nichtzweiteilbarkeit konvexer Kompakta

2.5.1 Vorbereitungen

Definition 2.14 (Kompakte, folgenkompakte Menge)

Sei M eine Teilmenge eines topologischen Raumes (R, \mathcal{O}) .

- M heißt genau dann **kompakt**, wenn für alle $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{O}$ gilt, dass \mathfrak{M} eine Überdeckung von M ist und für $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$ mit $|\mathfrak{M}'| < \infty$ folgt, \mathfrak{M}' ist Überdeckung von M .
- M heißt genau dann **folgenkompakt**, wenn jede Folge $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq M$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in M$ besitzt.

Satz 2.9

- Das stetige Bild einer kompakten Menge ist kompakt.
- Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist wieder kompakt.
- Eine Teilmenge eines metrischen Raumes ist genau dann kompakt, wenn sie folgenkompakt ist. Insbesondere sind kompakte Teilmengen metrischer Räume beschränkt und abgeschlossen.
- (Satz von HEINE-BOREL) Ist \mathcal{K} eine nichtleere Familie kompakter Teilmengen eines metrischen Raumes derart, dass jede endliche Teilfamilie $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$ einen nichtleeren Durchschnitt hat, so ist auch $\bigcap \mathcal{K}$ nichtleer und kompakt.
- (Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS) Eine Teilmenge eines endlich-dimensionalen normierten Raumes \mathbb{R}^n ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

2 Teilbarkeit konvexer Mengen (disjunkte Pflasterungen)

Bemerkung 2.16

- (a) Die Aussage e im [Satz 2.9](#) gilt nicht in voller Allgemeinheit. Denn eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge eines vollständigen normierten Raumes ist im Allgemeinen *nicht* kompakt. Der Raum $\ell_\infty = \{ (\xi_1, \xi_2, \dots) \mid \xi_i \in \mathbb{R}, \sup \{ |\xi_i| \mid i \geq 1 \} < \infty \}$ mit der Norm $\|(\xi_1, \xi_2, \dots)\|_\infty = \sup \{ |\xi_i| \mid i \geq 1 \}$ ist beispielsweise vollständig. Die Einheitskugel $B(0, 1) = \{ (\xi_1, \xi_2, \dots) \mid |\xi_i| \leq 1 \}$ ist nicht (folgen-)kompakt, denn die Folge $((1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), (0, 0, 1, 0, \dots), \dots)$ hat keine konvergente Teilfolge.
- (b) Die Menge $M = \{ (\xi_1, \xi_2, \dots) \mid |\xi_i| \leq 2^{-i} \}$ ist kompakt. Denn man kann eine Folge $(x_i)_{i=1}^\infty \subseteq M$ betrachten.



Im ersten Schritt wird M in zwei Teile der Kantenlänge $\leq 2^{-1}$ senkrecht zur ersten Koordinaten geteilt. Ein Teil enthält eine unendliche Teilfolge $(x_i^{(1)})$ von (x_i) . Im zweiten Schritt wird der Teil aus dem ersten Schritt in vier Teile von Kantenlänge $\leq 2^{-2}$ senkrecht zu e_1 - und e_2 -Richtung. Ein Teil enthält wieder eine unendliche Teilfolge $(x_i^{(2)})$ von $(x_i^{(1)})$. Wenn man das fortsetzt, ist die Diagonalfolge $(x_i^{(i)})$ die gesuchte konvergente Teilfolge.

Satz 2.10

Die abgeschlossene Einheitskugel eines unendlich-dimensionalen normierten Raumes X ist *nicht* kompakt. Insbesondere (mit [Satz 2.9](#) Punkt (e)) ist ein normierter Raum genau dann endlich-dimensional, wenn seine abgeschlossene Einheitskugel $B(0, 1)$ kompakt ist.

BEWEIS:

Wir nehmen an, dass $B(0, 1)$ kompakt ist und betrachten eine Überdeckung durch das System $\{ \mathring{B}(x, 1/2) \mid x \in B(0, 1) \}$ offener Kugeln. Also existieren $x_1, \dots, x_k \in B(0, 1)$ mit $B(0, 1) \subseteq \bigcup_{i=1}^k \mathring{B}(x_i, 1/2)$. Dazu betrachten wir eine Basis y_1, \dots, y_l von $\text{span}\{x_1, \dots, x_k\}$ und wählen ein $n \geq l$ so, dass $2^n > k$ gilt. Wir fixieren $y_{l+1}, \dots, y_n \in X$ so, dass y_1, \dots, y_n linear unabhängig sind. Setze $X_1 = \text{span}\{y_1, \dots, y_n\}$. Im n -dimensionalen Raum X_1 gilt, $B_{(x_1)}(0, 1) \subseteq \bigcup_{i=1}^k \mathring{B}_{(x_1)}(x_i, 1/2)$. Damit ist $\text{vol}(B_{(x_1)}(0, 1)) \leq \sum_{i=1}^k \text{vol}(\mathring{B}_{(x_1)}(x_i, 1/2)) = \sum_{i=1}^k (1/2)^n \text{vol}(B_{(x_1)}(0, 1))$. Wenn wir beide Seiten dividieren, ergibt sich $1 \leq k(1/2)^n$ und damit wäre $2^n \leq k$ ■

Ein Fixpunktsatz

Satz 2.11 (Spezialfall eines Satzes von MARKOV-KAKUTANI)

Es seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $K \subseteq X$ nichtleer, konvex und kompakt und $\varphi: X \rightarrow X$ eine stetige affine Abbildung mit $\varphi(K) \subseteq K$. Dann besitzt φ einen Fixpunkt x_0 in K .

BEWEIS:

- Für $n \geq 1$ sei $\varphi_n := 1/n(I + \varphi + \varphi^2 + \dots + \varphi^{n-1}): X \rightarrow X$ eine affine und stetige Abbildung. Außerdem betrachten wir eine Menge $M := \bigcap_{n \geq 1} \varphi_n(K)$.
 - a) $\varphi_n(K)$ ist kompakt nach Satz 2.9.
 - b) Der Durchschnitt von endlich vielen der Mengen $\varphi_n(K)$ mit $n \geq 1$ ist nichtleer. Es gilt nämlich, $\varphi_{n_1}(K) \cap \varphi_{n_2}(K) \cap \dots \cap \varphi_{n_l}(K) \supseteq \varphi_{n_1} \circ \dots \circ \varphi_{n_l}(K) \neq \emptyset$. Denn: Für $x \in K$ und $i \in \{1, \dots, l\}$ gilt, $\varphi_{n_i}(x) = 1/n_i x + 1/n_i \varphi(x) + \dots + 1/n_i \varphi^{n_i-1}(x) \in K$, da das eine Konvexkombination ist. Deshalb $\varphi_{n_1} \circ \dots \circ \varphi_{n_l}(K) = \varphi_{n_l} \circ \varphi_{n_{l-1}} \circ \dots \circ \varphi_{n_1}(K) \subseteq \varphi_{n_l}(K)$. Die Umgruppierung geht, da φ affin ist. Also $\varphi_{n_1} \circ \dots \circ \varphi_{n_l}(K) \subseteq \varphi_{n_1}(K) \cap \dots \cap \varphi_{n_l}(K)$.
- Wähle $x_0 \in M \subseteq \varphi_1(K) \subseteq K$. Für jedes $n \geq 1$ existiert ein $x_n \in K$ mit $x_0 = \varphi_n(x_n)$. Es gilt, $\|x_0 - \varphi(x_0)\| = \|\varphi_n(x_n) - \varphi(\varphi_n(x_n))\| = \|1/n x_n - 1/n \varphi^n(x_n)\| \leq 1/n (\|x_n\| + \|\varphi^n(x_n)\|) \leq 2/n \max_{x \in K} \|x\|$, da K beschränkt nach Satz 2.9. Für $n \rightarrow \infty$ geht das gegen 0, also ist $\|x_0 - \varphi(x_0)\| = 0$, d. h. $x_0 = \varphi(x_0)$. ■

2.5.2 Die Unteilbarkeitsaussage

Satz 2.12

Es seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $K \subseteq X$ nichtleer, konvex und kompakt und $\varphi: K \rightarrow K$ ein konvexitätserhaltender Homöomorphismus. Schließlich sei K zerlegbar in $K = A \cup B$ mit $\varphi(A) = B$. Dann existiert ein $\tilde{K} \subseteq K$ mit $\tilde{K} \neq \emptyset$, konvex, kompakt mit $\varphi(\tilde{K}) = \tilde{K}$.

BEWEIS:

Setze $K_k := \bigcap_{i=0}^{2k} \varphi^i(K)$ für $k \in \mathbb{N}$. Wir beweisen im folgenden drei Eigenschaften der Mengen K_k :

(α_k) K_k ist kompakte konvexe Teilmenge von K .

(β_k) Es ist $K_k \neq \emptyset$.

(γ_k) $\varphi(K_k \cap A) = K_k \cap B$

2 Teilbarkeit konvexer Mengen (disjunkte Pflasterungen)

Die Aussage (α_k) ist klar. Für $k = 0$ gelten die Aussagen (β_k) und (γ_k) nach Voraussetzung. Sei nun die Aussage für k wahr. Wegen der Beziehung $K_k = (K_k \cap A) \cup (K_k \cap B)$ folgt daher:

$$\begin{aligned} K_k \setminus \varphi(K_k) &\subseteq K_k \setminus \varphi(K_k \cap A) = (K_k \cap A) \cup (K_k \cap B) \setminus \varphi(K_k \cap A) \\ &\subseteq (K_k \cap A) \cup (K_k \cap B) \setminus (K_k \cap B) \\ &= K_k \cap A \\ \varphi(K_k \setminus \varphi(K_k)) &\subseteq \varphi(K_k \cap A) \subseteq (K_k \cap B) \end{aligned}$$

Beide Erkenntnisse halten wir in untenstehender Gleichung fest:

$$(2.11) \quad K_k \setminus \varphi(K_k) \subseteq K_k \cap A \wedge \varphi(K_k \setminus \varphi(K_k)) \subseteq (K_k \cap B)$$

Gehen wir nun im Induktionsschritt zu $k + 1$ über:

$$\begin{aligned} K_{k+1} &= K_k \cap \varphi(K_k) \cap \varphi^2(K_k) = K_k \setminus ((K_k \setminus \varphi(K_k)) \cup (\varphi(K_k) \setminus \varphi^2(K_k))) \\ &= ((K_k \cap A) \cup (K_k \cap B)) \setminus ((K_k \setminus \varphi(K_k)) \cup (\varphi(K_k) \setminus \varphi^2(K_k))) \end{aligned}$$

Die Anwendung von [Gleichung 2.11](#) auf die obige Gleichung ergibt schließlich:

$$(2.12) \quad K_{k+1} = ((K_k \cap A) \setminus (K_k \setminus \varphi(K_k))) \cup ((K_k \cap B) \setminus \varphi(K_k \setminus \varphi(K_k)))$$

Daraus folgt die Aussage (γ_{k+1}) gemäß folgender Überlegung. Für die erste Gleichheit wenden wir die [Gleichung 2.12](#) unter Beachtung der Disjunktheit an.

$$\begin{aligned} \varphi(K_{k+1} \cap A) &= \varphi((K_k \cap A) \setminus (K_k \setminus \varphi(K_k))) = (K_k \cap B) \setminus \varphi(K_k \setminus \varphi(K_k)) \\ &= K_{k+1} \cap B \end{aligned}$$

Der Nachweis von (β_{k+1}) erfolgt indirekt. Wir nehmen an, dass $K_{k+1} = \emptyset = (K_k \cdot A) \cap K_{k+1}$ ist. Dann haben wir untenstehende Beziehung. Für die zweite Gleichheit verwenden wir die [Gleichung 2.12](#).

$$\begin{aligned} K_k \cap A &= (K_k \cap A) \setminus ((K_k \cap A) \cap K_{k+1}) = (K_k \cap A) \setminus ((K_k \cap A) \setminus (K_k \setminus \varphi(K_k))) \\ &= K_k \setminus \varphi(K_k) \quad \text{nach Gleichung 2.11} \\ K_k \cap B &= K_k \setminus (K_k \cap A) = K_k \setminus (K_k \setminus \varphi(K_k)) = K_k \cap \varphi(K_k) \end{aligned}$$

Somit sind $K_k \cap B$ und auch $K_k \cap A = \varphi^{-1}(K_k \cap B)$ abgeschlossene Mengen, d. h. K_k ist in zwei nichtleere abgeschlossene Mengen $K_k \cap A$ und $K_k \cap B$ zerlegt. Dann wählen wir $a \in K_k \cap A$ und $b \in K_k \cap B$. Wir setzen $\lambda_0 := \sup \{ \lambda \in [0, 1] \mid (1 - \lambda)a + \lambda b \in K_k \cap A \}$. Dann ist $x_0 = (1 - \lambda_0)a + \lambda_0 b$ sowohl Randpunkt von $K_k \cap A$ als auch von $K_k \cap B$ wegen der Konvexität von K_k . Da beide Teilmengen abgeschlossen sind, folgt, dass $x_0 \in (K_k \cap A) \cap (K_k \cap B)$. Dies ist ein Widerspruch zur Disjunktheit. Damit sind die drei obigen Eigenschaften gezeigt.

Setze $\tilde{K} = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} \varphi^i(K)$. Damit ist \tilde{K} konvex, kompakt und nichtleer wegen [Satz 2.9](#) (Satz von HEINE-BOREL). Denn jeder endliche Durchschnitt $\bigcap_{i=-k}^k \varphi^i(K) = \varphi^{-k}(K_k)$ ist nach der Aussage (β_k) nichtleer und offenbar $\varphi(\tilde{K}) = \tilde{K}$. ■

Satz 2.13 (Satz von EDELSTEIN)

Keine nichtleere konvexe kompakte Teilmenge K eines normierten Raumes X ist bezüglich der Gruppe der affinen Homöomorphismen 2-teilbar.

BEWEIS:

Wir verwenden den Satz 2.12 auf die Situation von Satz 2.13 und erhalten eine kompakte, konvexe und nichtleere Menge $\tilde{K} \subseteq K$ mit $\varphi(\tilde{K}) = \tilde{K}$. Die Anwendung von Satz 2.11 liefert $x_0 \in \tilde{K} \subseteq K$ mit $\varphi(x_0) = x_0$. Damit liegt x_0 genau dann in einem Zerlegungsteil von K , wenn es im anderen liegt. Dies ist ein Widerspruch zur Zerlegungseigenschaft. ■

Bemerkung 2.17

- (a) Was gilt für analoge m -Teilbarkeit, wenn $m \geq 3$ gilt?
- (b) Gibt es in \mathbb{R}^2 zweidimensionale konvexe Körper (Scheiben), die für ein $m \geq 3$ bezüglich affiner Homöomorphismen m -teilbar sind?

2.6 Homöomorphe Teilbarkeit topologischer Zellen

2.6.1 Homöomorphismen und topologische Zellen

Definition 2.15 (Topologische Zelle)

- a) Sei \mathcal{T}_n Gruppen aller Homöomorphismen des \mathbb{R}^n mit $n \geq 1$.
- b) $M \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossene **topologische Zelle** $\Leftrightarrow \exists \tau \in \mathcal{T}_n: (M = \tau(B(0,1)))$.

Bemerkung 2.18

- a) $n = 1$: Für stetiges $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt, $\tau \in \mathcal{T}_1 \Leftrightarrow \tau$ streng wachsend mit $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tau(x) = \pm\infty$ oder streng fallend mit $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tau(x) = \mp\infty$.

Topologische 1-Zellen sind die Intervalle $[a, b]$ mit $a < b$. Jede topologische 1-Zelle hat die Fixpunkteigenschaft aus Abschnitt 2.2.1 bezüglich \mathcal{T}_1 .

- b) $M \subseteq \mathbb{R}^n$ topologische n -Zelle $\Leftrightarrow \forall Z_n \subseteq \mathbb{R}^n$ topologischen n -Zellen $\exists \tau \in \mathcal{T}_n: (M = \tau(Z_n))$.
- c) Jede kompakte konvexe nichtleere Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\text{int } K \neq \emptyset$ ist eine topologische n -Zelle. Die Idee ist, dass man eine strahlenweise Streckung macht.
- d) Ist $Z_n \subseteq \mathbb{R}^n$ eine topologische n -Zelle, so ist $Z_{n+m} := Z_n \times [-1, 1]^m \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ eine topologische $(n + m)$ -Zelle: $Z_n = \tau([-1, 1]^n) \in \mathcal{T}_n$, also ist $Z_{n+m} = \tau([-1, 1]^n) \times \text{id}_m([-1, 1]^m) = \tau \times \text{id}_m([-1, 1]^{n+m})$.

2.6.2 Homöomorphe Teilbarkeit topologischer Zellen

Satz 2.14

Sei $k \geq n \geq 1$ und $m \geq 2$.

- Ist eine topologische n -Zelle m -teilbar bezüglich der Homöomorphismen \mathcal{T}_n , so ist jede topologische n -Zelle bezüglich \mathcal{T}_n m -teilbar.
- Ist eine topologische n -Zelle m -teilbar bezüglich \mathcal{T}_n , so ist jede topologische k -Zelle bezüglich \mathcal{T}_k m -teilbar.

BEWEIS:

a) klar

b) Zylinderbildung wie bei [Bemerkung 2.18](#) Punkt d. ■

Satz 2.15

Seien $n \geq 1$ und $m \geq 2$. Eine topologische n -Zelle ist genau dann m -teilbar bezüglich \mathcal{T}_n , wenn $(n, m) \neq (1, 2)$.

BEWEIS:

- $(n, m) = (1, 2)$: Annahme: $[a, b] = S \cup T = S \cup \tau(S)$ und $\tau \in \mathcal{T}_1$. Nach dem [Satz 2.12](#) existiert ein $\tilde{K} \subseteq [a, b]$ mit $\tilde{K} = [a', b'] \neq \emptyset$ und $\tau(\tilde{K}) = \tilde{K}$. Wegen [Bemerkung 2.18](#) Punkt a existiert ein $x_0 \in \tilde{K} \subseteq [a, b]$ mit $\tau(x_0) = x_0$. Also ist $x_0 \in S \Leftrightarrow x_0 \in T$ wegen \cup .
- $(n, m) = (1, m)$ mit $m \geq 3$: Nach dem [Satz 2.14](#) ist damit auch (n, m) mit $n \geq 1$ und $m \geq 3$ behandelt. Wir definieren $Z_1 = S_1 \cup \dots \cup S_m$. Jedes S_i mit $2 \leq i \leq m$ und $-S_1$ haben folgende Struktur: $()()()()$ offene Intervalle mit Häufung „in der Mitte“, Separation (geht nur für $m \geq 3$) und eine Punktwolke, die sich von oben und unten gegen einen Grenzpunkt annähert. Damit hat man „Kongruenz“ der Teile bezüglich \mathcal{T}_1 .
- $(n, m) = (2, 2)$: Nach dem [Satz 2.14](#) funktioniert dies auch für $n \geq 2$. In der [Abbildung 2.3](#) sind die Beweisschritte grafisch dargestellt. Die Grafik ist von Seite 155 aus [\[3\]](#) entnommen.

- o. B. d. A.: $Z_2 = \{ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid |\eta| \leq 1/4(1 - |\xi|) \}$ ist ein Rhombus.

- $Z_2 = S \cup T$ mit $S = \{(-1, 0)\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} S_k$ und $T = \{(1, 0)\} \cup T_k$.

$$S_k = \begin{cases} \left\{ (\xi, \eta) \in Z_2 \mid \xi \in [-1 + 2^{-(k+1)}, -1 + 2^{-k}] \right\} & k \text{ gerade} \\ \left\{ (\xi, \eta) \in Z_2 \mid \xi \in [1 - 2^{-k}, 1 - 2^{-(k+1)}] \right\} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$T_k = \begin{cases} \left\{ (\xi, \eta) \in Z_2 \mid \xi \in [1 - 2^{-k}, 1 - 2^{-(k+1)}] \right\} & k \text{ gerade} \\ \left\{ (\xi, \eta) \in Z_2 \mid \xi \in [-1 + 2^{-(k+1)}, -1 + 2^{-k}] \right\} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

2.6 Homöomorphe Teilbarkeit topologischer Zellen

- $T = \varphi \circ \sigma(S)$ mit $\varphi, \sigma \in \mathcal{T}_2$:
 - * $\sigma(\xi, \eta) = (-\xi, \eta)$ Spiegelung, $\sigma \in \mathcal{T}_2$
 - * Einbettung der Stücke $\sigma(S_k)$ in das Innere von paarweise disjunkten, abgeschlossenen Quadraten R_k ; $\varphi|_{\mathbb{R}^2 \setminus \bigcap_{k=0}^{\infty} R_k} = \text{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \bigcap_{k=0}^{\infty} R_k}$ und $\varphi|_{R_k}$ mit $\varphi(\sigma(S_k)) = T_k$ und $\varphi|_{\text{bd}(R_k)} = \text{id}_{\text{bd}(R_k)}$. Es ist $\varphi \in \mathcal{T}_2$ wählbar. ■

2.6.3 Zerlegungen in paarweise homöomorphe Teilmengen

Definition 2.16 (Homöomorphismus)

Zwei topologische Räume (R_1, \mathcal{O}_1) und (R_2, \mathcal{O}_2) heißen homöomorph, wenn zwischen den Räumen ein Homöomorphismus existiert.

Satz 2.16

Jede abgeschlossene, topologische n -Zelle mit $n \geq 1$ besitzt für alle $m \geq 2$ eine Zerlegung in m Teilmengen, die bezüglich der von \mathbb{R}^n induzierten Spurtopologie paarweise homöomorph sind.

BEWEIS:

Nach dem [Satz 2.15](#) bleibt nur die Untersuchung des Falls $(n, m) = (1, 2)$. Denn in den anderen Fällen erzeugen die Homöomorphismen des \mathbb{R}^n Homöomorphismen der Zerlegungsteile.

Wir betrachten eine Zerlegung eines Intervalls $Z_1 = [-1, 1]$ in zwei Mengen $S = \{-1\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} S_k$ und $T = \{1\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} T_k$, wobei S_k und T_k in [\[3\]](#) definiert sind. Weiterhin brauchen wir einen Homöomorphismus $\tau: S \rightarrow T$. Dabei ist $\tau|_{S_k}$ eine Verschiebung von S_k auf T_k und $\tau(-1) := 1$. Die Stetigkeit von τ und analog τ^{-1} auf S_k bzw. T_k auf jedem S_k bzw. T_k ist klar (lokal nur eine Verschiebung). In -1 ist es auch stetig, denn für alle $x \in S$ gilt, $|\tau(-1) - \tau(x)| = |1 - \tau(x)| \leq 2|(-1) - x|$. ■

2 Teilbarkeit konvexer Mengen (disjunkte Pflasterungen)

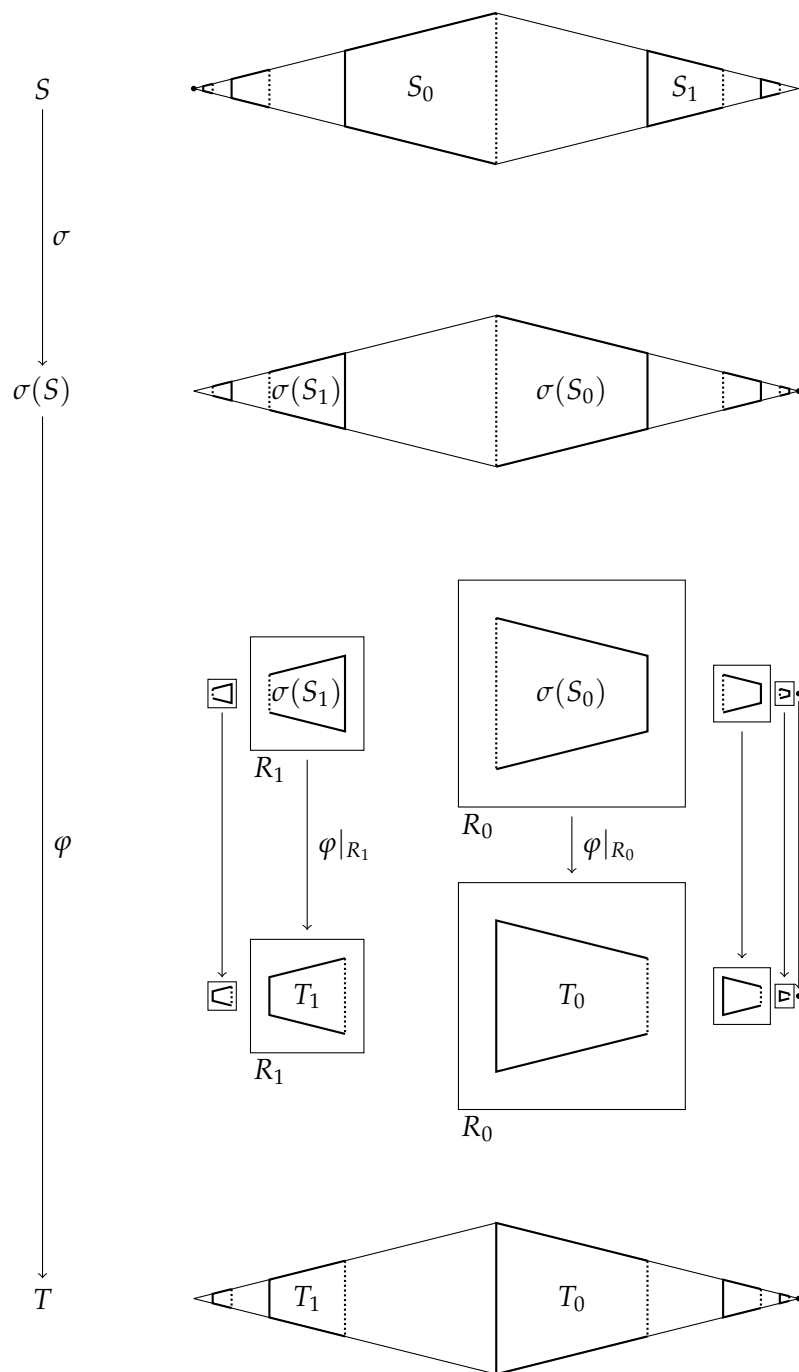


Abbildung 2.3: Abbildung zum Beweis von [Satz 2.15](#)

3 Das Paradoxon von Banach-Tarski

Hierbei geht es um disjunkte Zerlegungsgleichheit in \mathbb{R}^3 .

3.1 Die Verdopplung von Kugeln

3.1.1 Einführende Begriffe

Definition 3.1 (Kongruente, zerlegungsgleiche Mengen, Grad der Zerlegungsgleichheit)

- Sei \mathfrak{B}_3 die Gruppe der Isometrien des euklidischen Raumes.
- Die Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ heißen genau dann **kongruent**, wenn es ein $\varphi \in \mathfrak{B}_3$ mit $B = \varphi(A)$ gibt. Wir schreiben dann $A \simeq B$.
- $\langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle := \{ A_1 + \dots + A_k \mid k \geq 1, A_i \in \mathbb{R}^3, 1 \leq i \leq k \}$ ist die von $2^{\mathbb{R}^3}$ erzeugte kommutative Halbgruppe.
- Seien $a = A_1 + \dots + A_k$ und $b = B_1 + \dots + B_l$ aus $\langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle$ und $n \geq 0$. Dann heißen a und b genau dann (disjunkt) **zerlegungsgleich** unter der Benutzung von n Teilen, wenn es Darstellungen $n = r_1 + \dots + r_k = s_1 + \dots + s_l$ mit $r_i, s_j \geq 0$ und disjunkte Zerlegungen $A_i = \bigcup_{u=r_1+\dots+r_{i-1}+1}^{r_1+\dots+r_i} M_u$ und $B_j = \bigcup_{v=s_1+\dots+s_{j-1}+1}^{s_1+\dots+s_j} N_v$ mit $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq j \leq l$ sowie eine Permutation $\pi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ mit $N_v \simeq M_{\pi(u)}$ gibt. Wir schreiben $a \stackrel{n}{\simeq} b$.
- Zwei Elemente $a, b \in \langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle$ heißen genau dann **zerlegungsgleich**, wenn für ein $n \geq 0$ gilt, $a \stackrel{n}{\simeq} b$. Wir schreiben in dem Fall $a \stackrel{*}{\simeq} b$.
- Sind $a, b \in \langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle$ zerlegungsgleich, so heißt $\deg(a, b) = \min \{ n \geq 0 \mid a \stackrel{n}{\simeq} b \}$ der **Grad** der Zerlegungsgleichheit von a und b .

Bemerkung 3.1

- Kurzschrift: $k \cdot A = A + \dots + A$
- $\stackrel{*}{\simeq}$ verallgemeinert \simeq , denn $A \simeq B \Leftrightarrow A \stackrel{1}{\simeq} B$.
- $\stackrel{*}{\simeq}$ ist eine Äquivalenzrelation, genauer:
 - Für jedes $a = A_1 + \dots + A_k \in \langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle$ und $n \geq 0$ gilt, $a \stackrel{k+n}{\simeq} a$.

3 Das Paradoxon von Banach-Tarski

- Für alle $a, b \in \langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle$ gilt, $a \stackrel{n}{\simeq} b \Leftrightarrow b \stackrel{n}{\simeq} a$.
- Für alle $a, b, c \in \langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle$ gilt, $a \stackrel{n}{\simeq} b$ und $b \stackrel{m}{\simeq} c \Rightarrow a \stackrel{n \cdot m}{\simeq} c$.

d) Es gelten beispielsweise die Aussagen:

- $k \cdot \emptyset \stackrel{0}{\simeq} l \cdot \emptyset$, also $\deg(k \cdot \emptyset, l \cdot \emptyset) = 0$.
- Sind $A_1 + \dots + A_k \neq \emptyset$, so gilt, $\deg(A_1, \dots, A_k, A_1 + \dots + A_k) = k$.
- $A + \emptyset \stackrel{1}{\simeq} A$ und $\deg(A + \emptyset, A) = \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ 1 & A \neq \emptyset \end{cases}$.

e) $A_1 + \dots + A_k, B_1 + \dots + B_l \in \langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle$, $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \delta_1, \dots, \delta_l \in \mathfrak{B}_3$: $A_1 + \dots + A_k \stackrel{m}{\simeq} B_1 + \dots + B_l \Leftrightarrow \gamma_1(A_1) + \dots + \gamma_k(A_k) \stackrel{m}{\simeq} \delta_1(B_1) + \dots + \delta_l(B_l)$.

f) Eine Verallgemeinerung auf andere Räume und andere wirkende Gruppen ist möglich.

3.1.2 Spezielle freie Untergruppen der Gruppe der orthogonalen Abbildungen des euklidischen Raumes

Dies geht auf [6] zurück.

Definition 3.2 (Gruppe der orthogonalen Abbildungen)

SO_3 ist die Gruppe der orthogonalen Abbildungen des euklidischen Raumes \mathbb{R}^3 mit Determinante 1.

Bemerkung 3.2

Damit ist SO_3 eine Untergruppe von \mathfrak{B}_3 und besteht aus allen Drehungen an Achsen durch den Ursprung des \mathbb{R}^3 .

Definition 3.3 (Freie Gruppe)

Sei M eine Menge. Dann heißt F **freie Gruppe** mit dem Erzeugendensystem M , wenn F aus allen Wörtern über dem Alphabet $\{\alpha, \alpha^{-1} \mid \alpha \in M\}$ mit dem leeren Wort ι als neutralem Element besteht. Zwei Worte heißen äquivalent, wenn sie sich durch Hinzufügen (**Konkatenation**) oder Entfernen von Teilworten der Form $\alpha\alpha^{-1}$ bzw. $\alpha^{-1}\alpha$ ineinander überführen lassen. Ein **Wort** heißt **reduziert**, wenn es kein Teilwort der Form $\alpha\alpha^{-1}$ bzw. $\alpha^{-1}\alpha$ enthält.

Bemerkung 3.3

- Jedes Wort $w \in F$ hat eine eindeutige Darstellung als reduziertes Wort. Um nicht mit Äquivalenzklassen arbeiten zu müssen, nehmen wir an, dass F nur aus reduzierten Worten besteht.
- Die Mächtigkeit von M wird als **Rang** der freien Gruppe bezeichnet.
- Freie Gruppen von gleichem Rang sind isomorph und Gruppen, die zu einer freien Gruppe isomorph sind, werden auch als freie Gruppe bezeichnet.

Definition 3.4 (Unabhängige Elemente)

Sei M eine Menge von Elementen einer Gruppe G mit Einselement e . Dann heißen die Elemente von M genau dann **unabhängig**, wenn jedes reduzierte Wort $\gamma = \gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_m \in G$ mit $\gamma_i \in \{ \alpha, \alpha^{-1} \mid \alpha \in M \}$ und $m \geq 1$ von e verschieden ist.

Bemerkung 3.4

Die von M erzeugte Untergruppe G' von G ist dann offenbar zu einer bzw. der freien Gruppe vom Rang $\text{card}(M)$ isomorph. Man nennt G' deshalb eine freie Untergruppe vom Rang $\text{card}(M)$ in G .

Satz 3.1

Es sei $p(\alpha)$ ein Polynom in den Variablen $\sin(n\alpha)$ und $\cos(m\alpha)$ mit $n, m \in \mathbb{Z}$, d. h. eine endliche Summe von Termen der Gestalt

$$(3.1) \quad \gamma \cdot \prod_{i=1}^k \sin^{r_i}(n_i \alpha) \cdot \prod_{j=1}^l \cos^{s_j}(m_j \alpha)$$

mit $\gamma \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n_i, m_j \in \mathbb{Z}$ sowie $r_i, s_j \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Unter dem **Grad** von p versteht man das Maximum über alle Summanden aus [Gleichung 3.1](#) in p von $(\sum_{i=1}^k |r_i n_i| + \sum_{j=1}^l |s_j m_j|)$.

Gilt $\deg(p) \geq 1$ und hat p nur genau einen Summanden von maximalem Grad, so ist $p(\alpha)$ eine nicht konstante Funktion.

BEWEIS:

- aus $\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) = e^{in\alpha} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (\cos \alpha)^{n-j} i^j (\sin \alpha)^j$ folgt, $\sin(n\alpha) = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + \dots = \sin \alpha (\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots) \cdot \cos^{n-1} \alpha +$ Terme kleineren Grades in $\cos \alpha$ und $\cos(n\alpha) = \binom{n}{0} \cos^n \alpha - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + \dots = (1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots) \cdot \cos^n \alpha$ und Terme kleineren Grades in $\cos \alpha$.
- Damit haben wir $p(\alpha) = \sum_{i=1}^{\deg(p)} (\alpha_i \sin \alpha + \beta_i \cos \alpha) \cdot \cos^{i-1} \alpha + \delta$ mit entweder $\alpha_{\deg(p)} = 0$ oder $\beta_{\deg(p)} = 0$.
- Nun erfolgt eine Induktion nach dem Grad von p . Für $\deg(p) = 1$ ist $p(\alpha) = \alpha_1 \sin \alpha + \beta_1 \cos \alpha + \delta$ nicht konstant. Sei nun für $\deg(p) = k$ die Aussage korrekt. Für den Grad $k+1$ haben wir dann $p(\alpha) = \sum_{i=1}^{k+1} (\alpha_i \sin \alpha + \beta_i \cos \alpha) \cdot \cos^{i-1} \alpha + \delta$. Dann ist entweder $\alpha_{k+1} = 0$ oder $\beta_{k+1} = 0$. Wir nehmen an, dass das Polynom konstant ist. Für $\alpha = \pi/2$ ergibt sich $\alpha_1 + \delta = c$ und für $\alpha = -\pi/2$ ergibt sich $-\alpha_1 + \delta = c$. Insgesamt ist damit $\delta = c$ und $\alpha_1 = 0$. Damit haben wir $p(\alpha) = \sum_{i=2}^{k+1} (\alpha_i \sin \alpha + \beta_i \cos \alpha) \cdot \cos^{i-1} \alpha + \beta_1 \cos \alpha + c \equiv c$. Aber wir können auch schreiben, $p(\alpha) = \tilde{p}(\alpha) \cos \alpha + c \equiv c$. Somit muss aber $\tilde{p}(\alpha) \equiv 0$ sein und $\tilde{p}(\alpha)$ hat nur einen Term vom maximalen Grad k . Das ist ein Widerspruch zu Annahme. ■

3 Das Paradoxon von Banach-Tarski

Satz 3.2

o. B. d. A. werden ρ und σ durch folgende Matrizen beschrieben:

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Dann ist jedes nicht trivial zur Identität kürzbare Produkt von $A(\alpha)$, $(A(\alpha))^{-1}$, $B(\alpha)$ und $(B(\alpha))^{-1}$ eine nicht konstante Matrix in Abhängigkeit von α .

BEWEIS:

Das von (α) wird im folgendem immer weggelassen. Man kann diverse Fälle unterscheiden:

1. Fall Produkte der Gestalt: A^l, B^l mit $l \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Der Fall ist trivial.
2. Fall Produkte der Gestalt: $A^{n_1} B^{m_1} \cdot \dots \cdot A^{n_k} B^{m_k}$ mit $n_i, m_i \in \mathbb{Z}^*$ bzw. analog kann man auch mit B beginnen. Der Fall wird induktiv bewiesen. Für $k = 1$ ist:

$$A^{n_1} B^{m_1} = \begin{pmatrix} \cos(n_1\alpha) & -\sin(n_1\alpha) \cos(m_1\alpha) & \sin(n_1\alpha) \sin(m_1\alpha) \\ \sin(n_1\alpha) & \cos(n_1\alpha) \cos(m_1\alpha) & -\cos(n_1\alpha) \sin(m_1\alpha) \\ 0 & \sin(m_1\alpha) & \cos(m_1\alpha) \end{pmatrix}$$

Dies ist keine konstante Funktion. Im Induktionsschritt ergibt sich dann: $A^{n_1} B^{m_1} \cdot \dots \cdot A^{n_k} B^{m_k} = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$, wobei für $d_{ij} = \deg(a_{ij})$ gilt:

$$(3.2) \quad d_{11}, d_{21}, d_{31}, d_{32}, d_{33} < \sum_{i=1}^k (|n_i| + |m_i|)$$

$$(3.3) \quad d_{12} = d_{13} = d_{22} = d_{23} = \sum_{i=1}^k (|n_i| + |m_i|)$$

Außerdem haben $a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}$ je genau einen Term von maximalem Grad. Durch Multiplikation mit den Matrizen $A^{n_{k+1}} B^{m_{k+1}}$ entsteht ein Übergang von k zu $k + 1$ eine Matrix mit zu [Gleichung 3.2](#) analogen Eigenschaften. Nach dem [Satz 3.1](#) angewandt auf Polynome maximalen Grades ist die Matrix nicht konstant.

3. Fall Produkte der Gestalt: $A^{n_1} B^{m_1} \cdot \dots \cdot A^{n_{k-1}} B^{m_{k-1}} A^{n_k}$ und analog Start und Ende mit B . Wir greifen auf den obigen Fall zurück und multiplizieren $A^{n_{k+1}}$. Dies liefert:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdot \cos(n_{k+1}\alpha) + a_{12} \cdot \sin(n_{k+1}\alpha) & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Der Term $a_{12} \cdot \sin(n_{k+1}\alpha)$ ist von maximalem Grad. Dieser ist nach dem [Satz 3.1](#) nicht konstant in Abhängigkeit von α . ■

Satz 3.3

Sind $\rho, \sigma \in \text{SO}_3$ Drehungen mit gleichem Drehwinkel α an zueinander orthogonalen Achsen, wobei $\tan(\alpha/2)$ eine transzendente Zahl ist, dann sind ρ und σ unabhängig, erzeugen also eine freie Untergruppe vom Rang 2 in SO_3 bzw. auch \mathfrak{B}_3 .

BEWEIS:

Wir nehmen an, dass ρ und σ nicht unabhängig sind. Damit existiert eine Darstellung von id als nicht trivial kürzbares Produkt von ρ, ρ^{-1}, σ und σ^{-1} . Also ist die Einheitsmatrix als entsprechendes Produkt von $A(\alpha), (A(\alpha))^{-1}, B(\alpha)$ und $(B(\alpha))^{-1}$ (siehe Satz 3.2) darstellbar.

Nun setzen wir $x := \tan(\alpha/2)$, also $\sin \alpha = \frac{2x}{1+x^2}$ und $\cos \alpha = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Somit ist x die Lösung von neun algebraischen Gleichungen. Dazu betrachtet man die Einträge der Einheitsmatrix als Funktion von α und Funktion von x . Dabei ist mindestens eine Gleichung nach dem Satz 3.2 nicht trivial. Also kann x nicht transzendent gewesen sein und steht im Widerspruch zur Annahme. ■

3.1.3 Die spezielle Form des Paradoxons von Banach-Tarski

Satz 3.4

Es sei F die von σ und τ erzeugte freie Gruppe vom Rang 2. Dann gibt es eine Zerlegung $F = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ mit $\sigma(A_2) = A_2 \cup A_3 \cup A_4$ und $\tau(A_4) = A_1 \cup A_2 \cup A_4$. Dabei kann man zu vorgegebenen $w \in F$ die Zerlegungen so wählen, dass w und ι in derselben Menge A_i liegen.

BEWEIS:

Ziel ist die Aufteilung der Worte $\tilde{w} \in F$ in disjunkte A_1, A_2, A_3 und A_4 mit

$$\begin{aligned} \sigma(A_2) &\subseteq A_2 \cup A_3 \cup A_4 & D_\sigma &:= A_2 & R_\sigma &:= A_2 \cup A_3 \cup A_4 \\ \sigma^{-1}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) &\subseteq A_2 & D_{\sigma^{-1}} &:= A_2 \cup A_3 \cup A_4 & R_{\sigma^{-1}} &:= A_2 \\ \tau(A_4) &\subseteq A_1 \cup A_2 \cup A_4 & D_\tau &:= A_4 & R_\tau &:= A_1 \cup A_2 \cup A_4 \\ \tau^{-1}(A_1 \cup A_2 \cup A_4) &\subseteq A_4 & D_{\tau^{-1}} &:= A_1 \cup A_2 \cup A_4 & R_{\tau^{-1}} &:= A_4 \end{aligned}$$

Sei $w = \rho_1 \dots \rho_n$ mit $\rho_i \in \{\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$ und setze $w_k = \rho_{k+1} \dots \rho_n$ mit $0 \leq k \leq n$, $w_0 = w$ und $w_n = \iota$.

1. Schritt Zuordnung der Worte $w_k, 0 \leq k \leq n$:

- $k \in \{0, n\}$: $w = w_0$ und

$$(3.4) \quad \iota = w_n \overset{!}{\in} \begin{cases} A_2 & \rho_n = \sigma \\ A_1 & \rho_n = \sigma^{-1} \\ A_4 & \rho_n = \tau \\ A_3 & \rho_n = \tau^{-1} \end{cases}$$

3 Das Paradoxon von Banach-Tarski

- $k \in \{1, \dots, n-2\}$: Erfolgt per Induktion. Wir wissen, dass

$$(3.5) \quad w_k = \rho_k^{-1} w_{k-1} \stackrel{!}{\in} \begin{cases} A_i \text{ mit } A_i \subseteq R_{\rho_k^{-1}} & w_{k-1} \in D_{\rho_k^{-1}} \\ A_i \text{ mit } A_i \cap R_{\rho_k^{-1}} = \emptyset & w_{k-1} \notin D_{\rho_k^{-1}} \end{cases}$$

- $k = n-1$: $w_k = w_{n-1} = \rho_n$
- Zur Erfüllung der Definitions- und Wertebereiche sind nötig:

$$(3.6) \quad \rho_n = \rho_{n-1}^{-1} w_{n-2} \stackrel{!}{\in} \begin{cases} A_i \text{ mit } A_i \subseteq R_{\rho_{n-1}^{-1}} & w_{n-2} \in D_{\rho_{n-1}^{-1}} \\ A_i \text{ mit } A_i \cap R_{\rho_{n-1}^{-1}} = \emptyset & w_{n-2} \notin D_{\rho_{n-1}^{-1}} \end{cases}$$

$$(3.7) \quad \rho_n = \rho_n \iota \stackrel{!}{\in} \begin{cases} A_i \text{ mit } A_i \subseteq R_{\rho_n} & \iota \in D_{\rho_n} \\ A_i \text{ mit } A_i \cap R_{\rho_n} = \emptyset & \iota \notin D_{\rho_n} \end{cases}$$

- Fallunterscheidung nach ρ_n und ρ_{n-1} und ob w_{n-2} in oder nicht in $D_{\rho_{n-1}^{-1}}$ liegt.

1. Fall $\rho_n = \sigma$ bzw. analog $\rho_n = \tau$: Nach der [Gleichung 3.4](#) ist $\iota \in A_2 \subseteq D_\sigma$ und nach [Gleichung 3.6](#) muss $\rho_n \stackrel{!}{\in} A_2 \cup A_3 \cup A_4$ sein.

1.1 Fall $\rho_{n-1} = \sigma$:

1.1.1 Fall $w_{n-2} \in D_{\sigma^{-1}}$: Nach [Gleichung 3.6](#) ist $\rho_n \stackrel{!}{\in} A_2$. Das verträgt sich mit obigen Forderung. Also Zuordnung $\rho_n \in A_2$ ist in Ordnung.

1.1.2 Fall $w_{n-2} \notin D_{\sigma^{-1}}$: Um die [Gleichung 3.6](#) zu erfüllen, muss $\rho_n \in A_1 \cup A_3 \cup A_4$ sein. Also Zuordnungen $\rho_n \in A_3$ oder $\rho_n \in A_4$ in Ordnung.

1.2 Fall $\rho_{n-1} = \sigma^{-1}$: Tritt nicht auf, weil die Kürzung $\rho_{n-1}\rho_n$ möglich wäre.

1.3 Fall $\rho_{n-1} = \tau$

1.3.1 Fall $w_{n-2} \in D_{\tau^{-1}}$: Nach [Gleichung 3.6](#) ist $\rho_n \stackrel{!}{\in} A_4$. Die Zuordnung $\rho_n \in A_4$ ist in Ordnung.

1.3.2 Fall $w_{n-2} \notin D_{\tau^{-1}}$: Nach [Gleichung 3.6](#) ist $\rho_n \stackrel{!}{\in} A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Die Zuordnung $\rho_n \in A_2$ oder $\rho_n \in A_3$ ist in Ordnung.

1.4 Fall $\rho_{n-1} = \tau^{-1}$:

3.1 Die Verdopplung von Kugeln

1. 4.1 Fall $w_{n-2} \in D_\tau$: Nach [Gleichung 3.6](#) ist $\rho_n \in A_1 \cup A_2 \cup A_4$. Die Zuordnung $\rho_n \in A_2$ und $\rho_n \in A_4$ in Ordnung.

1. 4.2 Fall $w_{n-2} \notin D_\tau$: Nach [Gleichung 3.6](#) ist $\rho \in A_3$. Die Zuordnung ist in Ordnung.

2. Fall $\rho_n = \sigma^{-1}$ bzw. $\rho_n = \tau^{-1}$ geht analog zu oben.

2. Schritt Zuordnung der Worte aus $F \setminus \{w_0, \dots, w_n\}$: Jedes $\tilde{w} \in F$ hat eine eindeutige (nicht kürzbare) Darstellung $\tilde{w} = v w_i$ mit einem $w_i \in \{w_0, \dots, w_n\}$ von maximaler Länge.

Wir führen nun eine Induktion nach der Länge $l = l(v)$ von v durch. Für $l = 0$ ist $\tilde{w} = w_i$ und ist damit schon zugeordnet. Im Induktionsschritt ist $\tilde{w} = \rho v' w_i$ mit $l(v') = l$ und $\rho \in \{\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$. Das \tilde{w} muss wie folgt zugeordnet werden:

$$(3.8) \quad \tilde{w} \in \begin{cases} A_i \text{ mit } A_i \subseteq R_\rho & v' w_i \in D_\rho \\ A_i \text{ mit } A_i \cap R_\rho = \emptyset & v' w_i \in D_\rho \end{cases} \quad \blacksquare$$

Definition 3.5 (Orbit)

Sei G eine Untergruppe der vollen Transformationsgruppe einer nichtleeren Menge $R \neq \emptyset$. Unter dem **Orbit** $G(x)$ eines Punktes $x \in R$ versteht man die Menge

$$G(x) = \{ \gamma(x) \mid \gamma \in G \}$$

Bemerkung 3.5

$\{ G(x) \mid x \in R \}$ ist eine disjunkte Zerlegung von R .

Satz 3.5

Die Transformationsgruppe einer Menge $R \neq \emptyset$ besitze eine von σ und τ erzeugte freie Untergruppe F vom Rang 2, deren Elemente nicht die Identität sind und alle keinen Fixpunkt in R haben. Dann besitzt R eine Zerlegung $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$ mit $\sigma(R_2) = R_2 \cup R_3 \cup R_4$ und $\tau(R_4) = R_1 \cup R_2 \cup R_4$.

BEWEIS:

Wir zerlegen zunächst den Raum in Orbits, also $R = \bigcup \{ F(x) \mid x \in R \}$ und Auswahl eines Repräsentantensystems S dieser Zerlegung, d. h. $R = \bigcup \{ F(x) \mid x \in S \}$ mit $F(x) \cap F(y) = \emptyset$ für $x, y \in S$ und $x \neq y$. Hierfür brauchen wir das Auswahlaxiom.

Für jedes $x_0 \in S$ und jedes $x \in F(x_0)$ gibt es eine Darstellung $x = \gamma(x_0)$ mit einem eindeutigen $\gamma \in F$. Denn nehmen wir an, es gäbe zwei Darstellungen mit $x = \gamma_1(x_0) = \gamma_2(x_0)$ mit $\gamma_1 \neq \gamma_2$. So ist $x_0 = \gamma_2^{-1} \gamma_1(x_0)$ ein Fixpunkt. ζ

Zerlegung eines Orbits $F(x_0)$ mit $x_0 \in S$ unter Benutzung von [Satz 3.4](#): $F(x_0) = R_1(x_0) \cup R_2(x_0) \cup R_3(x_0) \cup R_4(x_0)$ mit $R_i(x_0) = \{ \gamma(x_0) \mid \gamma \in A_i \}$. Es folgt sofort, dass $\sigma(R_2(x_0)) = R_2(x_0) \cup R_3(x_0) \cup R_4(x_0)$ und $\tau(R_4(x_0)) = R_1(x_0) \cup R_2(x_0) \cup R_4(x_0)$.

3 Das Paradoxon von Banach-Tarski

Mit $R_i = \bigcup_{x \in S} R_i(x)$ erhält man die gewünschte Zerlegung des Gesamtraumes R . ■

Folgerung 3.1 (Hausdorff-Paradoxon)

Die Sphäre $S^2 = \text{bd}(B(0,1)) \subseteq \mathbb{R}^2$ besitzt eine abzählbare Teilmenge $D \subseteq S^2$ derart, dass $(S^2 \setminus D) \simeq 2(S^2 \setminus D)$.

BEWEIS:

Wir wählen nach dem Satz 3.3 eine freie Untergruppe F von SO_3 , die von unabhängigen Rotationen $\sigma, \tau \in SO_3$ erzeugt wird. Sei $D := \{x \in S^2 \mid \exists \gamma \in F: (\gamma \neq \text{id} \wedge \gamma(x) = x)\}$. Es ist D abzählbar, da F nach Konstruktion abzählbar ist und jede Drehung $\gamma \in F \setminus \{\text{id}\}$ nur zwei Fixpunkte besitzt.

Es gilt: $\gamma(S \setminus D) \subseteq S^2 \setminus D$ für $\gamma \in F$, d. h. F wirkt als Transformationsgruppe von $S^2 \setminus D$. Denn sei $x \in S^2 \setminus D$. Dann ist $\gamma(x) \in \gamma(S^2) = S^2$. Nehmen wir an, dass $\gamma \in D$. Also gibt es ein $\gamma' \in F \setminus \{\text{id}\}$ mit $\gamma'\gamma(x) = \gamma(x)$. Also ist $x = \gamma^{-1}\gamma'\gamma(x) \in D$. ζ

Nun können wir den Satz 3.5 auf den Raum $R = S^2 \setminus D$ und F anwenden. Dann ist $S^2 \setminus D = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 = R_1 \cup \sigma(R_2) = R_3 \cup \tau(R_4)$. Also $S^2 \setminus D \simeq 2(S^2 \setminus D)$. ■

Definition 3.6 (Stabilisator, lokal kommutative Gruppe)

Eine Gruppe G wirke auf eine Menge R , die nichtleer ist. Also ist G Untergruppe der vollen Transformationsgruppe von R .

- Für ein $x \in R$ heißt $\text{Stab}(x) = \{\gamma \in G \mid \gamma(x) = x\}$ der **Stabilisator** von x .
- G heißt **lokal kommutativ**, wenn der Stabilisator für alle $x \in R$ kommutativ ist.

Bemerkung 3.6

- $\text{Stab}(x)$ ist eine Untergruppe von G .
- SO_3 (als Gruppe, die auf S^2 oder $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ wirkt) ist lokal kommutativ, ebenso jede Untergruppe von einer lokal kommutativen Gruppe.

Satz 3.6

Auf eine Menge $R \neq \emptyset$ wirke eine lokal kommutative freie Gruppe F vom Rang 2 mit den Erzeugenden σ und τ . Dann gibt es eine Zerlegung $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$ mit $\sigma(R_2) = R_2 \cup R_3 \cup R_4$ und $\tau(R_4) = R_1 \cup R_2 \cup R_4$.

BEWEIS:

- Orbitzerlegung: $R = \cup \{F(x) \mid x \in R\}$
- Fakt 1: Jeder Orbit ist entweder frei von Fixpunkten aller Abbildungen aus $F \setminus \{\text{id}\}$ oder besteht nur aus Fixpunkten. Dazu betrachten wir einen Fixpunkt $y \in F(x)$, d. h. $y = \gamma_0(x)$ und $\gamma_1(y) = y$ für ein $\gamma_0, \gamma_1 \in F$. Dann ist jedes $y' = \gamma_2(x)$ ebenfalls Fixpunkt. Es gilt nämlich, $y' = \gamma_2(x) = \gamma_2(\gamma_0^{-1}(y)) = \gamma_2\gamma_0^{-1}\gamma_1(y) = \gamma_2\gamma_0^{-1}\gamma_1\gamma_0\gamma_2^{-1}(y')$.
- (Zerlegung von Orbits ($F(x_0)$) ohne Fixpunkte): Der Satz 3.5 liefert $F(x_0) = R_1(x_0) \cup R_2(x_0) \cup R_3(x_0) \cup R_4(x_0)$ mit $\sigma(R_2(x_0)) = R_2(x_0) \cup R_3(x_0) \cup R_4(x_0)$ und $\tau(R_4(x_0)) = R_1(x_0) \cup R_2(x_0) \cup R_4(x_0)$.

3.1 Die Verdopplung von Kugeln

- (Zerlegung von Fixpunkt-Orbits $F(x_0)$): Sei $\gamma_0 \in F \setminus \{\text{id}\}$ unter allen Abbildungen, die in $F(x_0)$ einen Fixpunkt x haben eine, von minimaler Länge bezüglich der gekürzten Darstellung. Sei o. B. d. A. $x = x_0$, d. h. $\gamma_0(x_0) = x_0$.

- Fakt 2: Jedes $\gamma \in F$ mit $\gamma(x_0) = x_0$ hat eine Darstellung $\gamma = \gamma_0^k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Dazu:
 - Die Aussage ist trivial, wenn $\gamma = \text{id}$. Also nun $\gamma \neq \text{id}$. Also besteht die gekürzte Darstellung aus mindestens einem Buchstaben.

- Die gekürzte Darstellung von γ_0 sei $\gamma_0 = \rho\rho_1 \dots \rho_l$ mit $\rho, \rho_i \in \{\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$ und $l \geq 0$.

- Es gilt:

$$(3.9) \quad \rho_l \neq \rho^{-1}$$

Denn sonst wäre $\tilde{\gamma} = \rho_1 \dots \rho_{l-1} \in F \setminus \{\text{id}\}$ eine Abbildung mit kürzerer Darstellung und Fixpunkt $\rho^{-1}(x_0) \in F(x_0)$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von γ_0 .

- Es gelte, $\gamma(x_0) = x_0$ und es ist zu zeigen, dass $\gamma = \gamma_0^k$.

- * Wegen $\gamma_0, \gamma \in \text{Stab}(x_0)$ gilt:

$$(3.10) \quad \gamma\gamma_0 = \gamma_0\gamma$$

- * 1. Fall: $\gamma\gamma_0$ erlaubt keine trivialen Kürzungen. Dann kann $\gamma_0\gamma$ aus [Gleichung 3.10](#) ebenfalls nicht gekürzt werden. Dann können wir schreiben: $\gamma = \gamma_0\gamma\gamma_0^{-1} =: \gamma_0\gamma'$ (mit gekürztem γ'), da die Länge von γ größer oder gleich als die Länge von γ_0 ist. Also beginnt γ mit dem Block γ_0 (denn $\gamma_0\gamma'$ sind nicht kürzbar). Damit wird das Verfahren an dieser Stelle abgebrochen, falls $\gamma = \gamma_0$ und bei Ungleichheit ergibt sich auch $\gamma'\gamma_0 = \gamma\gamma_0^{-1}\gamma_0 = \gamma = \gamma_0\gamma'$ nicht kürzbar (weil $\gamma_0\gamma'$ nicht kürzbar ist). Damit fährt man wieder wie zu Beginn von Fakt 1 fort, d. h. $\gamma' = \gamma_0\gamma'\gamma_0^{-1} =: \gamma_0\gamma''$ (mit gekürztem γ''). Also beginnt auch γ' mit dem Block γ_0 und $\gamma_0\gamma''$ ist nicht kürzbar.

Damit endet das Verfahren nach endlich vielen Schritten, d. h. $\gamma = \gamma_0^k$ mit $k \geq 1$

- * 2. Fall: $\gamma\gamma_0$ erlaubt triviale Kürzung: Also letzter „Buchstabe“ von γ ist ρ^{-1} . Wegen der [Gleichung 3.9](#) ist $\gamma\gamma_0^{-1}$ nicht trivial kürzbar und wegen [Gleichung 3.10](#) ist $\gamma\gamma_0^{-1} = \gamma_0^{-1}\gamma$. Damit können wir wie im 1. Fall agieren und bekommen heraus, dass $\gamma = (\gamma_0^{-1})^{\tilde{k}} = \gamma_0^k$ mit $k \leq -1$.

- Fakt 3: Zu jedem $x \in F(x_0)$ existiert genau ein $\delta \in F$ mit $x = \delta(x_0)$ und

- a) $\delta \neq \dots \rho^{-1}$ (gekürzte Darstellung von δ endet nicht auf ρ^{-1})

3 Das Paradoxon von Banach-Tarski

b) $\delta \neq \dots \gamma_0$ (gekürzte Darstellung von δ endet nicht auf γ_0)

Dazu:

- Existenz: Sei $x = \delta'(x_0)$ mit $\delta' \in F$.
 1. Fall δ' erfüllt die Bedingung 1 und 2 von oben. fertig.
 2. Fall $\delta' = \dots = \rho^{-1}$. Dann setzen wir $\delta := \delta' \gamma_0^k$ so, dass nach maximaler Kürzung nur noch ein Teil des letzten γ_0 bleibt. Damit sind wir fertig.
 3. Fall $\delta' = \dots = \gamma_0$. Dann setzen wir $\delta := \delta' \gamma_0^{-k}$ so, dass alle γ_0 -Blöcke am Ende von δ' weggekürzt werden. Damit sind wir fertig.
- Eindeutigkeit: Sei $x = \delta_1(x_0) = \delta_2(x_0)$ mit den Eigenschaften 1 und 2 von oben und fordern, dass $\delta_1 \neq \delta_2$. Dann ist $\delta_1^{-1} \delta_2(x_0)$. Nach dem Fakt 2 ist $\delta_1^{-1} \delta_2 = \gamma_0^k$ mit $k \in \mathbb{Z}^*$.
 1. Fall $k > 0$: Dann ist $\delta_2 = \delta_1 \gamma_0^k$. Da $\delta_1 \gamma_0^k$ wegen der Eigenschaft 1 nicht kürzbar ist, endet δ_2 auf γ_0^k .
 2. Fall $k < 0$: Dann können wir die Rollen von δ_1 und δ_2 vertauschen. Also $\delta_1 = \delta_2 \gamma_0^k$ mit $-k > 0$.
- Zuordnung der Punkte $x = \delta(x_0) \in F(x_0)$ mit einer Darstellung wie in Fakt 3 mittels der Zerlegung $F = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ aus dem [Satz 3.4](#): $F(x_0) = R_1(x_0) \cup R_2(x_0) \cup R_3(x_0) \cup R_4(x_0)$ mit $x \in R_i(x_0)$: $\Leftrightarrow \delta \in A_i$. Dabei sollen id und γ_0 zur selben Klasse A_i gehören.
- Es gilt, dass $\sigma(R_2(x_0)) = R_2(x_0) \cup R_3(x_0) \cup R_4(x_0)$ und $\tau(R_4(x_0)) = R_1(x_0) \cup R_2(x_0) \cup R_4(x_0)$. Dazu: $\sigma(R_2(x_0)) \subseteq R_2(x_0) \cup R_3(x_0) \cup R_4(x_0)$. Der Beweis für τ geht analog. Sei $x \in R_2(x_0)$ mit der Darstellung $x = \delta(x_0)$ nach dem Fakt 3, d. h. $\delta \in A_2$. Gilt $\sigma(x) \in R_2(x_0) \cup R_3(x_0) \cup R_4(x_0)$? Es ist zu zeigen, dass die Darstellung $\tilde{\delta}(x_0)$ von $\sigma(x)$ nach dem Fakt 3 die Beziehung $\tilde{\delta} \in A_2 \cup A_3 \cup A_4$ erfüllt. Dazu sei $\sigma(x) = \sigma\delta(x_0)$.
 1. Fall $\sigma\delta$ füllt die Eigenschaften 1 und 2 nach trivialem Kürzen. Dann ist $\tilde{\delta} = \sigma\delta \in \sigma(A_2) = A_2 \cup A_3 \cup A_4$.
 2. Fall $\sigma\delta$ erfüllt die Eigenschaft 1 nicht nach trivialem Kürzen. Aber das δ erfüllt die Eigenschaft 1. Dann ist $\delta = \text{id}$ und $\sigma = \rho^{-1}$. Somit gilt, $\text{id}, \gamma_0 \in A_i$ und $\text{id}, \gamma_0 = \delta \in A_2 \wedge \sigma(x) = \sigma(x_0) = \rho^{-1}(x_0) = \rho^{-1} \gamma_0(x_0) = \underbrace{\rho_1 \dots \rho_l}_{=: \tilde{\delta}}(x_0)$. Wir rechnen zurück und erhalten $\tilde{\delta} = \rho^{-1} \gamma_0 = \sigma \gamma_0 \in \sigma(A_2)$. Nach dem [Satz 3.4](#) ist $\sigma(A_2) = A_2 \cup A_3 \cup A_4$.
 3. Fall $\sigma\delta$ erfüllt die Eigenschaft 2 nicht nach trivialem Kürzen. Wie wissen, dass δ die Eigenschaft 2 erfüllt und damit ist $\sigma\delta = \gamma_0$. Also ist $\sigma(x) = \sigma\delta(x_0) = \gamma_0(x_0) = x_0 = \text{id}(x_0) =: \tilde{\delta}(x_0)$. Wegen $\text{id}, \gamma_0 \in A_i$ ist $\tilde{\delta} = \text{id}$ und $\gamma_0 = \sigma\delta \in \sigma(A_2) = A_2 \cup A_3 \cup A_4$ nach dem [Satz 3.4](#).

Der Nachweis $\sigma^{-1}(R_2(x_0) \cup R_3(x_0) \cup R_4(x_0)) \subseteq R_2(x_0)$ geht analog.

- Zusammenfassung der Orbiterlegungen: $R_i = \bigcup_{x \in R} R_i(x)$. Dann ist R zerlegt gemäß σ und τ . ■

Folgerung 3.2 (Verschärfung des Hausdorff-Paradoxons)

Für die Sphäre $\mathcal{S}^2 = \text{bd}(B(0, 1)) \subseteq \mathbb{R}^2$ gilt, dass $\mathcal{S}^2 \stackrel{4}{\simeq} 2\mathcal{S}^2$.

BEWEIS:

Wähle σ und τ nach dem Satz 3.3. Die erzeugte freie Untergruppe von SO_3 wirkt lokal kommutativ auf \mathcal{S}^2 . Nach Satz 3.6 existiert eine Zerlegung $\mathcal{S}^2 = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 = M_1 \cup \sigma(M_2) \cup M_3 \cup \tau(M_4)$. ■

Bemerkung 3.7

Das Banach-Tarski-Paradoxon in seiner speziellen Form besagt, $B(0, 1) \stackrel{*}{\simeq} 2B(0, 1)$. Wir zeigen genauer folgendes Resultat:

Satz 3.7

Es seien $\sigma, \tau \in \text{SO}_3$ die Erzeuger einer freien Untergruppe F von Rang 2.

- a) Die abgeschlossene Kugel $B(0, 1)$ erlaubt folgende Zerlegungen:

$$\begin{aligned} B(0, 1) &= A \cup B \cup C \cup D \cup E \\ &= A \cup \sigma(B) \\ &= C \cup \tau(D) \cup \varphi(E) \end{aligned}$$

wobei E eine Einermenge und $\varphi \in \mathfrak{B}_3$ eine Translation sind.

- b) Die punktierte Kugel $B^p(0, 1) := B(0, 1) \setminus \{0\}$ erlaubt Zerlegungen folgender Art:

$$\begin{aligned} B^p(0, 1) &= A' \cup B' \cup C' \cup D' \\ &= A' \cup \sigma(B') \\ &= C' \cup \tau(D') \end{aligned}$$

BEWEIS:

- a) Für $0 < r \leq 1$ sei $\mathcal{S}_r = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = r\}$. Also existiert eine Zerlegung $\mathcal{S}_r = M_{r,1} \cup M_{r,2} \cup M_{r,3} \cup M_{r,4} = M_{r,1} \cup \sigma(M_{r,2}) \cup M_{r,3} \cup \tau(M_{r,4})$.

Wir betrachten die Sphäre $\mathcal{S}_1 = \bigcup_{x \in \mathcal{S}_1} F(x)$ mit der Orbiterlegung. Da die „Fixpunkt-orbits“ nur abzählbar viele Punkte enthalten, gibt es einen fixpunktfreien Orbit $F(x_0)$ mit $x_0 \in \mathcal{S}_1$. Vergleiche dazu auch Fakt 1 im Beweis von Satz 3.6. Alle anderen Orbits werden wie im Beweis vom Satz 3.6 zerlegt. Somit existiert eine Zerlegung $\mathcal{S}_1 \setminus F(x_0) = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = H_1 \cup \sigma(H_2) \cup H_3 \cup \tau(H_4)$.

3 Das Paradoxon von Banach-Tarski

Zerlegung von $F(x_0)$: Wir betrachten zu gekürztem $\gamma \in F$ die Punkte $\gamma(x_0)$. Es gilt, $\gamma_1(x_0) \neq \gamma_2(x_0)$ für $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Wir setzen:

$$\begin{aligned} K_1 &:= \{ \gamma(x_0) \mid \gamma = \sigma \dots \} && \text{beginnt mit } \sigma \\ K_2 &:= \left\{ \gamma(x_0) \mid \gamma = \sigma^{-1} \dots \right\} && \text{beginnt mit } \sigma^{-1} \\ K_3 &:= \{ \gamma(x_0) \mid \gamma = \tau \dots \} && \text{beginnt mit } \tau \\ K_4 &:= \left\{ \gamma(x_0) \mid \gamma = \tau^{-1} \dots \right\} && \text{beginnt mit } \tau^{-1} \end{aligned}$$

Somit $\sigma(K_2) = \{x_0\} \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$ und $\tau(K_4) = \{x_0\} \cup K_1 \cup K_2 \cup K_4$ und es gibt Zerlegungen $F(x_0) = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \cup \{x_0\} = K_1 \cup \sigma(K_2) = K_3 \cup \tau(K_4)$.

Zerlegung von $B(0, 1)$: Es ist $B(0, 1) = \{0\} \cup \bigcup_{0 < r < 1} \mathcal{S}_r \cup (\mathcal{S}_1 \setminus F(x_0)) \cup F(x_0)$. Weiterhin ist:

$$\begin{aligned} A &:= \{0\} \cup \bigcup_{0 < r < 1} M_{r,1} \cup H_1 \cup K_1 \\ B &:= \bigcup_{0 < r < 1} M_{r,2} \cup H_2 \cup K_2 \\ C &:= \bigcup_{0 < r < 1} M_{r,3} \cup H_3 \cup K_3 \\ D &:= \bigcup_{0 < r < 1} M_{r,4} \cup H_4 \cup K_4 \\ E &:= \{x_0\} \end{aligned}$$

Außerdem benutzen wir die Verschiebung $\varphi \in \mathfrak{B}_3$ mit $\varphi(x_0) = 0$. Damit bekommt man die Zerlegungen $B(0, 1) = A \cup B \cup C \cup D \cup E = A \cup \sigma(B) = C \cup \tau(D) \cup \varphi(E)$.

- b) F wirkt lokal kommutativ auf $B^p(0, 1)$, da $0 \notin B^p(0, 1)$. Die Behauptung folgt nach dem [Satz 3.6](#). ■

Satz 3.8

Sei $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$.

- a) Es gilt, $B(0, 1) \stackrel{*}{\simeq} k \cdot B(0, 1)$ mit $\deg(B(0, 1), k \cdot B(0, 1)) = 3k - 1$.
b) Es gilt $B^p(0, 1) \stackrel{*}{\simeq} k \cdot B^p(0, 1)$ mit $\deg(B^p(0, 1), k \cdot B^p(0, 1)) = 2k$.

BEWEIS:

- a) Wir definieren unter Ausnutzung von [Satz 3.7](#) für $i = 1, 2, 3, \dots$ die Mengen $A' := A$, $B_{i+1} := \sigma^{-(i-1)}(B)$, $C_i := \sigma^{-(i-1)}(C)$, $D_i := \sigma^{-(i-1)}(D)$ und $E_i := \sigma^{-(i-1)}(E)$. Im folgenden wird eine Induktion nach k durchgeführt. Dabei ist [Satz 3.7](#) der Induktionsanfang: $B(0, 1) = A \cup B_k \cup C_1 \cup \dots \cup C_{k-1} \cup D_1 \cup \dots \cup D_{k-1} \cup E_1 \cup \dots \cup E_{k-1} =$

3.1 Die Verdopplung von Kugeln

$A \cup \sigma^{k-1}(B_k) = \sigma^{i-1}(C_i) \cup \tau\sigma^{i-1}(D_i) \cup \varphi\sigma^{i-1}(E_i)$ für $1 \leq i \leq k-1$. Insbesondere $B(0,1) \overset{*}{\simeq} k \cdot B(0,1)$ mit $\deg(B(0,1), k \cdot B(0,1)) \leq 3k-1$.

Nun nehmen wir an, dass der Grad $n = \deg(B(0,1), k \cdot B(0,1)) < 3k-1$ ist. Da entsprechend der Überlegung bei dem untenstehenden Punkt b auf jeden Summanden von $k \cdot B(0,1)$ mindestens zwei Zerlegungsteile entfallen müssen, gibt es wegen $n < 3k-1$ mindestens zwei Summanden, die in genau zwei Teile zerlegt werden. Sei o. B. d. A.:

$$(3.11) \quad B(0,1) = M_1 \cup \dots \cup M_n$$

$$(3.12) \quad B(0,1) = \varphi_1(M_1) \cup \varphi_2(M_2)$$

$$(3.13) \quad B(0,1) = \varphi_3(M_3) \cup \varphi_4(M_4)$$

mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in \mathfrak{B}_3$. Aus [Gleichung 3.11](#) folgt, $|\{i \in \{1,2,3,4\} \mid 0 \in M_i\}| \leq 1$. Aus [Gleichung 3.12](#) und [Gleichung 3.13](#) folgt, dass ein $i \in \{1,2,3,4\}$ mit $\varphi_i(0) \neq 0$ existiert. Sei o. B. d. A. $\varphi_1(0) \neq 0$. Somit liegt $\varphi_1(M_1) \cap \mathcal{S}^2$ in offener Halbsphäre von $\mathcal{S}^2 = \text{bd}(B(0,1))$. Wegen [Gleichung 3.12](#) enthält $\varphi_2(M_2) \cap \mathcal{S}^2$ eine abgeschlossene Halbsphäre von \mathcal{S}^2 . Somit ist $\varphi_2(0) = 0$. Wir wenden φ_2^{-1} an und $M_2 \cap \mathcal{S}^2$ enthält auch eine abgeschlossene Halbsphäre von \mathcal{S}^2 . Wegen der [Gleichung 3.11](#) gilt, $M_3 \cap \mathcal{S}^2, M_4 \cap \mathcal{S}^2$ sind jeweils in einer offenen Halbsphäre von \mathcal{S}^2 enthalten. Aus der [Gleichung 3.13](#) folgt nun $\varphi_3(0) \neq 0$ oder $\varphi_4(0) \neq 0$, da sonst \mathcal{S}^2 durch zwei offene Halbsphären überdeckbar wäre. Nun gelte o. B. d. A. $\varphi_3(0) \neq 0$. Wie oben können wir nun folgern, dass $M_4 \cap \mathcal{S}^2$ eine abgeschlossene Halbsphäre enthält. Dies steht im Widerspruch dazu dass $M_3 \cap \mathcal{S}^2$ und $M_4 \cap \mathcal{S}^2$ in einer offenen Halbsphäre enthalten sind.

- b) Unter Benutzung von [Satz 3.7](#) Teil b wird folgendes definiert: $A' := A', B'_{i+1} := \sigma^{-(i-1)}(B')$, $C'_i := \sigma^{-(i-1)}(C')$ und $D'_i := \sigma^{-(i-1)}(D')$ für $i = 1, 2, 3, \dots$. Dann gilt, $B^p(0,1) = A' \cup B'_k \cup C'_1 \cup \dots \cup C'_{k-1} \cup D'_1 \cup \dots \cup D'_{k-1} = A' \cup \sigma^{k-1}(B'_k) = C'_1 \cup \tau(D'_1) = \sigma^0(C'_1) \cup \tau\sigma^0(D'_1) = \sigma^{i-1}(C'_i) \cup \tau\sigma^{i-1}(D'_i)$ für $2 \leq i \leq k-1$. Denn mit vollständiger Induktion überzeugt man sich von dem Sachverhalt. Für den Fall $k = 2$ lässt sich der [Satz 3.7](#) anwenden. Im Induktionsschritt erhalten wir: $\sigma^{k-1}(B'_k) = \sigma(B') = B' \cup C' \cup D'$ und bekommen eine Darstellung von $B'_k = \sigma^{-(k-1)}(B') \cup \sigma^{-(k-1)}(C') \cup \sigma^{-(k-1)}(D') = B'_{k+1} \cup C'_k \cup D'_k$. Damit folgen die gewünschten Zerlegungen für den Fall $k+1$ aus denen für den Fall k bzw. direkt aus dem [Satz 3.7](#).

Für die Zerlegungen folgt, dass der Grad der Zerlegungen kleiner oder gleich $2k$ ist. Es gilt, $\deg(B^p(0,1), k \cdot B^p(0,1)) = 2k$. Andernfalls wäre eine Zerlegungsgleichheit mit kleiner als $2k$ Teilen möglich, wobei auf einen der Summanden von $k \cdot B^p(0,1)$ nur ein Zerlegungsteil entfiel. Dieser Teil wäre dann zu $B^p(0,1)$ kongruent und müsste damit mit $B^p(0,1)$ identisch sein und alle anderen Zerlegungsteile wären leer. ▀

Bemerkung 3.8

Analog zeigt man $S^2 \overset{*}{\simeq} k \cdot S^2$ mit $\deg(S^2, k \cdot S^2) = 2k$ oder $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \overset{*}{\simeq} k \cdot (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ mit $\deg(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, k \cdot (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})) = 2k$ und $\mathbb{R}^3 \overset{3k-1}{\simeq} k \cdot \mathbb{R}^3$ für $k \geq 2$.

3.2 Weitere Zerlegungsgleichheiten

3.2.1 Das Banach-Schröder-Bernstein-Theorem

Definition 3.7 (Zerlegungstheoretisch kleinere Summe)

a) Eine Summe $a \in \langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle$ heißt genau dann **zerlegungstheoretisch kleiner** als $b = B_1 + \dots + B_l \in \langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle$ unter Benutzung von n Zerlegungsteilen ($a \overset{n}{\leq} b$), wenn $B'_1 \subseteq B_1, \dots, B'_l \subseteq B_l$ mit $a \overset{n}{\simeq} B'_1 + \dots + B'_l$ existieren.

b) $a \overset{*}{\leq} b: \Leftrightarrow \exists n \geq 0: (a \overset{n}{\leq} b)$

Beispiel 3.1

a) $B(0,1) \overset{*}{\leq} 2 \cdot \mathbb{R}^3, 2 \cdot \mathbb{R}^3 \overset{*}{\leq} B(0,1)$

b) Die Relation $\overset{*}{\leq}$ ist mit $\overset{*}{\simeq}$ verträglich. Also induziert $\overset{*}{\leq}$ in kanonischer Weise eine Relation in der Äquivalenzklassenstruktur $\langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle / \overset{*}{\simeq}$. Es ist $a \overset{*}{\leq} b \wedge a \overset{*}{\simeq} \tilde{a} \wedge b \overset{*}{\simeq} \tilde{b} \Rightarrow \tilde{a} \overset{*}{\leq} \tilde{b}$, denn:

$$\left. \begin{array}{l} a \overset{n}{\leq} b \\ a \overset{m}{\simeq} \tilde{a} \\ b \overset{k}{\simeq} \tilde{b} \end{array} \right\} \tilde{a} \overset{n \cdot m}{\leq} b \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} a \overset{n}{\leq} b \\ a \overset{m}{\simeq} \tilde{a} \\ b \overset{k}{\simeq} \tilde{b} \end{array}} \right\} \tilde{a} \overset{n \cdot m \cdot k}{\leq} \tilde{b}$$

c) Die von $\overset{*}{\leq}$ in $\langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle / \overset{*}{\simeq}$ induzierte Relation ist eine Halbordnung. Die Antisymmetrie ergibt sich aus dem [Satz 3.10](#).

Satz 3.9

Seien $a = A_1 + \dots + A_k$ und $b = B_1 + \dots + B_l$ aus $\langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle$ sowie $n \in \mathbb{N}$. Besitzt A_1 paarweise disjunkte Teilmengen M_1, \dots, M_n und gibt es eine Darstellung $n = s_1 + \dots + s_l$ mit $s_j \in \mathbb{N}$ sowie Bewegungen $\varphi_v \in \mathfrak{B}_3$ mit $1 \leq v \leq n$ derart, dass die Summanden B_j von b gemäß

$$B_j \subseteq \bigcup_{v=s_1+\dots+s_{j-1}+1}^{s_1+\dots+s_j} \varphi_v(M_v)$$

überdeckt werden können, so folgt, $b \overset{n}{\leq} a$.

BEWEIS:

Durch geeignete Wahl von Teilmengen $M'_v \subseteq M_v$ erhält man disjunkte Zerlegungen $B_j = \bigcup_{v=s_1+\dots+s_{j-1}+1}^{s_1+\dots+s_j} \varphi_v(M'_v)$. Für $A'_1 := M'_1 \cup \dots \cup M'_n \subseteq A_1$ folgt, $A'_1 \stackrel{n}{\simeq} b$. Setze $a' := A'_1 + \emptyset + \dots + \emptyset$ und erhalte $a' \stackrel{n}{\simeq} b$. Also $b \stackrel{n}{\leq} a$. ■

Satz 3.10 (Banach-Schröder-Bernstein-Theorem)

Gelten für zwei Wörter $a, b \in \langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle$ die Relationen $a \stackrel{n}{\leq} b$ und $b \stackrel{m}{\leq} a$, so folgt, $a \stackrel{n+m}{\simeq} b$.

BEWEIS:

Wir betrachten nur den Fall, dass $a = A$ und $b = B$, d. h. aus $A \stackrel{n}{\leq} B$ und $B \stackrel{m}{\leq} A$ folgt, $A \stackrel{n+m}{\simeq} B$.

Die Aussage $A \stackrel{n}{\leq} B$ heißt, dass ein $B' \subseteq B$ mit $A \stackrel{n}{\simeq} B'$ existiert. Also gibt es eine Zerlegung $A = M_1 \cup \dots \cup M_n$ und $B' = \varphi_1(M_1) \cup \dots \cup \varphi_n(M_n)$ mit $\varphi_u \in \mathfrak{B}_3$ für $1 \leq u \leq n$. Damit können wir $A \stackrel{n}{\simeq} B'$ durch Bijektionen $\varphi: A \rightarrow B'$ mit $\varphi(x) = \varphi_u(x)$ für $x \in M_u$ beschreiben.

Die können wir auch für $B \stackrel{m}{\leq} A$ machen. Es existiert ein $A' \subseteq A$ mit $A' \stackrel{m}{\simeq} B$, d. h. es gibt Zerlegungen $A' = N_1 \cup \dots \cup N_m$ und $B = \psi_1(N_1) \cup \dots \cup \psi_m(N_m)$ mit $\psi_v \in \mathfrak{B}_3$ für $1 \leq v \leq m$. Damit können wir $A' \stackrel{m}{\simeq} B$ durch Bijektionen $\psi: A' \rightarrow B$ mit $\psi(x) = \psi_v(x)$ für $x \in N_v$ beschreiben.

Wir setzen $C_0 := A \setminus A'$ und dann induktiv $C_{t+1} := \psi^{-1}\varphi(C_t)$ für $t \in \mathbb{N}_0$. Weiterhin ist $C := \bigcup_{t=0}^{\infty} C_t$. Wegen $C_t \subseteq A'$ für $t \geq 1$ folgt nach der Definition von φ und ψ , $\psi(A \setminus C) = \psi((A \setminus C_0) \cap (A \setminus \bigcup_{t=1}^{\infty} C_t)) = \psi(A' \cap (A \setminus \bigcup_{t=1}^{\infty} C_t)) = \psi(A' \cap (A' \setminus \bigcup_{t=1}^{\infty} C_t)) = \psi(A' \setminus \bigcup_{t=1}^{\infty} C_t) = \psi(A') \setminus \bigcup_{t=1}^{\infty} \psi(C_t) = B \setminus \bigcup_{t=1}^{\infty} \varphi(C_{t-1}) = B \setminus \varphi(C)$

Wegen $C \subseteq A$ nach der Definition von C_t und $\varphi(C) \subseteq B$ hat man die Zerlegungen $A = (A \setminus C) \cup C$ und $B = (B \setminus \varphi(C)) \cup \varphi(C)$. Die Einschränkungen $\psi|_{A \setminus C}$ und $\varphi|_C$ sind Bijektionen $\psi|_{A \setminus C}: A \setminus C \rightarrow B \setminus \varphi(C)$ bzw. $\varphi|_C: C \rightarrow \varphi(C)$. Die Abbildung $\psi|_{A \setminus C}$ beschreibt Zerlegungsgleichheit $A \setminus C \stackrel{m}{\simeq} B \setminus \varphi(C)$ mit Zerlegungsteilen $N_1 \cap (A \setminus C), \dots, N_m \cap (A \setminus C)$ und die Abbildung $\varphi|_C$ beschreibt Zerlegungsgleichheit $C \stackrel{n}{\simeq} \varphi(C)$ mit den Zerlegungsteilen $M_1 \cap C, \dots, M_n \cap C$.

Zusammengefasst ergibt sich somit die Behauptung. ■

Bemerkung 3.9

Der Fall $a = A_1 + \dots + A_k$ und $b = B_1 + \dots + B_l$ ist analog zu behandeln. Die Beschreibung der Bijektionen ist formal komplizierter.

3.2.2 Das Banach-Tarski-Paradoxon in der starken Form

Definition 3.8 (Kolmogorowsche Entropiefunktion)

Für eine beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ und Radius $r \geq 0$ ist die Kolmogorowsche Entropiefunktion $\mathcal{N}_r(M)$ definiert durch

$$\mathcal{N}_r(M) := \min\{m \in \mathbb{N} \mid M \text{ durch } m \text{ abgeschlossene Kugeln von Radius } r \text{ überdeckbar}\}$$

Satz 3.11

Seien $a = A_1 + \dots + A_k$ und $b = B_1 + \dots + B_l$ aus $\langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle$ derart, dass alle Summanden A_i von a und B_j von b beschränkt sind und je ein Summand von a und von b innere Punkte hat. Dann sind a und b zerlegungsgleich ($a \stackrel{*}{\simeq} b$). Sind r und s Radien von abgeschlossenen Inkugeln eines Summanden von a bzw. b , so folgt:

$$\text{deg}(a, b) \leq 3 \left(\sum_{i=1}^k \mathcal{N}_s(A_i) + \sum_{j=1}^l \mathcal{N}_r(B_j) \right) - 2$$

BEWEIS:

Sei o. B. d. A. $B(x_a, r) \subseteq A_1$. Nach der Definition von $\mathcal{N}_r(B_j)$ ist B_j durch $\mathcal{N}_r(B_j)$ Translate von $B(x_a, r)$ überdeckbar. Somit existiert ein $h = \mathcal{N}_r(B_1) + \dots + \mathcal{N}_r(B_l)$ Translation $\tau_v \in \mathfrak{B}_3$ mit $1 \leq v \leq h$ mit

$$(3.14) \quad B_j \subseteq \bigcup_{v=\mathcal{N}_r(B_1)+\dots+\mathcal{N}_r(B_{j-1})+1}^{\mathcal{N}_r(B_1)+\dots+\mathcal{N}_r(B_j)} \tau_v(B(x_a, r))$$

Wegen Satz 3.8 folgt, $B(x_a, r) \stackrel{3h-1}{\simeq} h \cdot B(x_a, r)$. Also existiert eine Zerlegung $B(x_a, r) = M_1 \cup \dots \cup M_{3h-1}$, eine Darstellung $3h-1 = r_1 + \dots + r_h$ und Bewegungen $\varphi_u \in \mathfrak{B}_3$ mit $1 \leq u \leq 3h-1$ mit disjunkter Vereinigung

$$(3.15) \quad B(x_a, r) = \bigcup_{u=r_1+\dots+r_{v-1}+1}^{r_1+\dots+r_v} \varphi_u(M_u) \quad 1 \leq v \leq h$$

Die Kombination von Gleichung 3.14 und Gleichung 3.15 liefert Überdeckungen der folgenden Art:

$$(3.16) \quad B_j \subseteq \bigcup_{v=\mathcal{N}_r(B_1)+\dots+\mathcal{N}_r(B_{j-1})+1}^{\mathcal{N}_r(B_1)+\dots+\mathcal{N}_r(B_j)} \bigcup_{u=r_1+\dots+r_{v-1}+1}^{r_1+\dots+r_v} \tau_v \varphi_u(M_u)$$

der Summanden B_j durch Bilder der paarweise disjunkten $M_u \subseteq A_1$ mit $1 \leq u \leq 3h-1$.

Nun hilft uns der Satz 3.9 weiter. Denn daraus folgt, $b \stackrel{3h-1}{\leq} a$ mit $h = \sum_{j=1}^l \mathcal{N}_r(B_j)$.

Analog erhalten wir $a \stackrel{3g-1}{\leq} b$ mit $g = \sum_{i=1}^k \mathcal{N}_s(A_i)$. Der Satz 3.10 liefert nun $a \stackrel{n}{\simeq} b$ mit $n = (3h-1) + (3g-1) = 3(\sum_{i=1}^k \mathcal{N}_s(A_i) + \sum_{j=1}^l \mathcal{N}_r(B_j)) - 2$. ■

Bemerkung 3.10

Die analoge Aussage ohne Gradabschätzung für den Fall $a = A, b = B \subseteq \mathbb{R}^3$ wird in [7] als die starke Form des Paradoxons von Banach-Tarski bezeichnet.

Lemma 3.1

Seien $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beschränkte Menge mit Umkugelradius $R > 0$ und $r > 0$ ein Radius. Dann gilt

$$\mathcal{N}_r(M) < \min \left\{ \left(\sqrt{3}R/r + 1 \right)^3, \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \left(\frac{R}{r} + 2 \right)^3 \right\}$$

BEWEIS:

Sei $B(x_0, R)$ Umkugel von M . Wir überdecken die Umkugel $B(x_0, R)$ durch einen Würfel W der Kantenlänge $2R$ und wählen eine natürliche Zahl h mit $\sqrt{3}R/r \leq h \leq \sqrt{3}R/r + 1$. Nun überdecken wir W durch h^3 Würfel der Kantenlänge $2R/h$. Jeder Würfel der Kantenlänge $2R/h$ hat eine Länge der Raumdiagonalen von $\sqrt{3}2R/h \leq \sqrt{3} \cdot \frac{2R}{\sqrt{3} \frac{R}{r}} = 2r$. Ist also durch eine Kugel vom Radius r überdeckbar.

Insgesamt erhalten wir die Überdeckung $\mathcal{N}_r(M) \leq \mathcal{N}_r(B(x_0, R)) \leq \mathcal{N}_r(W) \leq h^3 < (\sqrt{3}R/r + 1)^3$.

Der \mathbb{R}^3 wird durch gitterförmig angeordnete, paarweise innerdisjunkte Würfel der Kantenlänge $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ mit der Länge der Raumdiagonalen von $2r$ überdeckt. Das j sei die Anzahl der Gitterwürfel, die die Umkugel $B(x_0, R)$ schneiden. Damit folgt, $\mathcal{N}_r(M) \leq \mathcal{N}_r(B(x_0, R)) \leq j$. Jeder der j Gitterwürfel liegt ganz in der Kugel $B(x_0, R + 2r)$. Somit kommen wir zu der Volumenabschätzung $j \cdot \left(\frac{2r}{\sqrt{3}} \right)^3 < \text{vol}(B(x_0, R + 2r)) = \frac{4\pi}{3}(R + 2r)^3$. Damit lässt sich das j abschätzen:

$$\mathcal{N}_r(M) \leq j < \left(\frac{\sqrt{3}}{2r} \right)^3 \frac{4\pi}{3} (r + 2r)^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \left(\frac{R}{r} + 2 \right)^3 \quad \blacksquare$$

Bemerkung 3.11

Die Abschätzung in Lemma 3.1 sind nur vom Quotienten R/r abhängig. Für $R/r \leq 5,3$ ist $(\sqrt{3}R/r + 1)^3$ besser und für $R/r \geq 5,4$ ist $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}(R/r + 2)^3$ besser.

Folgerung 3.3

Seien a, b, r, s wie in Satz 3.11 und sind $R_1, \dots, R_k, S_1, \dots, S_l$ die Umkugelradien der Summanden A_1, \dots, A_k bzw. B_1, \dots, B_l , so gilt $a \stackrel{*}{\simeq} b$ mit

$$\begin{aligned} \text{deg}(a, b) \leq & 3 \left(\sum_{i=1}^k \min \left\{ \left(\sqrt{3} \frac{R_i}{s} + 1 \right)^3, \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \left(\frac{R_i}{s} + 2 \right)^3 \right\} \right) \\ & + \sum_{j=1}^l \min \left\{ \left(\sqrt{3} \frac{S_j}{r} + 1 \right)^3, \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \left(\frac{S_j}{r} + 2 \right)^3 \right\} - 2 \end{aligned}$$

3 Das Paradoxon von Banach-Tarski

Bemerkung 3.12

- a) Weitere Betrachtungen zu optimalen Teileranzahlen der Zerlegungsgleichheit sind möglich. So können beispielsweise anstelle von Kugeln auch punktierte Kugeln als „Baustein“ im Sinne von [Satz 3.11](#) benutzt werden. Für Würfel W kann man zeigen, $2k \leq \text{deg}(W, k \cdot W) \leq 8k - 3$ für $k \geq 2$, speziell $\text{deg}(W, 2 \cdot W) \leq 13$.
- b) Das Analogon des Paradoxons von Banach-Tarski gilt auch im \mathbb{R}^d für $d \geq 4$, aber *nicht* für $d \leq 2$.

4 Elementare Zerlegungsgleichheit topologischer Scheiben

4.1 Einführung

4.1.1 Tarskis Frage nach der Quadratur des Kreises

Das Analogon zum Paradoxon von Banach-Tarski für die Ebene \mathbb{R}^2 funktioniert nicht. Denn es existiert ein σ -additives, universelles, \mathfrak{B}_2 -invariantes (bewegungsinvariantes) und normiertes Maß μ auf $2^{\mathbb{R}^2}$. Der Mathematiker ALFRED TARSKI stellte 1925 die Frage, ob eine Kreisfläche $K \subseteq \mathbb{R}^2$ und ein dazu flächengleiches Quadrat $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ disjunkt zerlegungsgleich bezüglich der euklidischen Bewegungsgruppe \mathfrak{B}_2 des \mathbb{R}^2 sind. MIKLÓS LACZKOVICH beantwortete die Frage in [8]. Der Beweis ist sehr schwierig und in der Mathematik eine Sensation. Er verwendete sehr viele Zerlegungsteile. Eine offene Frage ist, ob diese Quadratur des Kreises mit Lebesgue-messbaren oder Borel-messbaren Zerlegungsteilen möglich ist. Hier betrachten wir einen elementaren Zugang.

4.1.2 Topologische Scheiben und elementare Zerlegungsgleichheit

Definition 4.1 (Topologische Scheibe, Elementare Zerlegungsgleichheit)

- a) Die Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ist genau dann eine **topologische Scheibe**, wenn ein Homöomorphismus $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $D = \varphi(B(0, 1))$ existiert.
- b) Sei \mathfrak{G} eine Gruppe von Homöomorphismen des \mathbb{R}^2 . Zwei topologische Scheiben D und E heißen genau dann **elementar zerlegungsgleich** bezüglich \mathfrak{G} , wenn ein $n \geq 1$ und elementare Zerlegungen $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$ bzw. $E = E_1 \cup \dots \cup E_n$ in topologische Scheiben D_i und E_i sowie Abbildungen $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathfrak{G}$ mit $E_i = \gamma_i(D_i)$ für $i = 1, \dots, n$.
- c) Wir betrachten folgende Gruppen von Homöomorphismen des \mathbb{R}^2 :
 - \mathfrak{B}_2^+ Gruppe der eigentlichen Isometrien, d. h. $\varphi \in \mathfrak{B}_2^+ \Leftrightarrow \exists A \in \text{SO}_2 \exists t \in \mathbb{R}^2 \forall x \in \mathbb{R}^2: (\varphi(x) = Ax + t)$
 - \mathfrak{B}_2 Gruppe der Isometrien, d. h. $\varphi \in \mathfrak{B}_2 \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{O}_2 \exists t \in \mathbb{R}^2 \forall x \in \mathbb{R}^2: (\varphi(x) = Ax + t)$

4 Elementare Zerlegungsgleichheit topologischer Scheiben

- Aff^1 Gruppe der äquiaffinen Transformationen, d. h. $\varphi \in \text{Aff}^1 \Leftrightarrow \exists A \in \text{GL}(2)$ mit $|\det A| = 1, \exists t \in \mathbb{R}^2 \forall x \in \mathbb{R}^2: (\varphi(x) = Ax + t)$
 - Sim Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen, d. h. $\varphi \in \text{Sim} \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{O}_2 \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \exists t \in \mathbb{R}^2 \forall x \in \mathbb{R}^2: (\varphi(x) = \lambda Ax + t)$
 - Aff Gruppe der affinen Transformationen, d. h. $\varphi \in \text{Aff} \Leftrightarrow \exists A \in \text{GL}(2) \exists t \in \mathbb{R}^2 \forall x \in \mathbb{R}^2: (\varphi(x) = Ax + t)$
 - $\text{Hot}(c)$ für $c > 0$ Gruppe der c -adischen Homothetien von \mathbb{R}^2 . Die Gruppe wird von allen Translationen und einer zentrischen Streckung mit dem Faktor c erzeugt, d. h. $\varphi \in \text{Hot}(c) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \exists t \in \mathbb{R}^2 \forall x \in \mathbb{R}^2: (\varphi(x) = c^k x + t)$
- d) Ist \mathcal{F} eine Familie von topologischen Scheiben, so heißen zwei topologische Scheiben D, E **elementar zerlegungsgleich** bezüglich $(\mathfrak{G}, \mathcal{F})$ oder elementar $(\mathfrak{G}, \mathcal{F})$ -zerlegungsgleich, wenn eine \mathfrak{G} -Zerlegungsgleichheit zwischen D und E mit Zerlegungsteilen $D_i, E_i \in \mathcal{F}$ realisierbar ist.
- e) Sei \mathcal{D}^k mit $k \in \mathbb{N} \cup \infty$ die Menge aller topologischen Scheiben D , deren Rand $\text{bd}(D)$ (elementar) in endlich viele k -mal stetig differenzierbare, abgeschlossene Teilbögen zerfällt. Die Menge \mathcal{D} sei die Menge aller topologischen Scheiben.

Bemerkung 4.1

- a) $\mathcal{D}^\infty \neq \bigcap_{k \geq 1} \mathcal{D}^k$
- b) Topologische Scheiben können als das von einer einfach geschlossenen Jordankurve Γ berandete und gleichzeitig beschränkte (Innen-)Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (einschließlich des Randes Γ) definiert werden. Diese Aussage ergibt sich aus dem Theorem von JORDAN-SCHÖNFLIES.
- c) Die zwei Scheiben in [Abbildung 4.1](#) sind elementar \mathfrak{B}_2^+ -zerlegungsgleich.

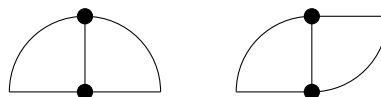


Abbildung 4.1: Zwei elementar zerlegungsgleiche Scheiben

- d) Die elementare \mathfrak{G} -Zerlegungsgleichheit ist eine reflexive und symmetrische Relation in \mathcal{D} . Es bleibt die Frage, was mit der Transitivität ist.
- e) Bei Studium der Zerlegungsgleichheit von einfachen Polygonen, d. h. topologischen Scheiben, deren Rand ein endlicher Streckenzug ist, wird gefordert, dass die Zerlegungsteile Polygone sind. Wir nennen Polygone P und Q **polygonal zerlegungsgleich**, wenn P und Q elementar \mathfrak{B}_2^+ -zerlegungsgleich mit polygonalen Teilen sind. Die polygonale Zerlegungsgleichheit ist eine Äquivalenzrelation in der Menge aller einfacher Polygone des \mathbb{R}^2 .

Satz 4.1

Zwei einfache Polygone $P, Q \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann polygonal zerlegungsgleich, wenn ihre Flächen übereinstimmen.

BEWEIS:

Sei F die Fläche von P bzw. Q . Nach dem letzten Punkt der [Bemerkung 4.1](#) genügt es zu zeigen, dass P und analog auch Q zu einem Rechteck der Seitenlänge $F \times 1$ polygonal zerlegungsgleich ist. Das P werde in Dreiecke D_1, \dots, D_k zerlegt. Die Fläche von D_i sei

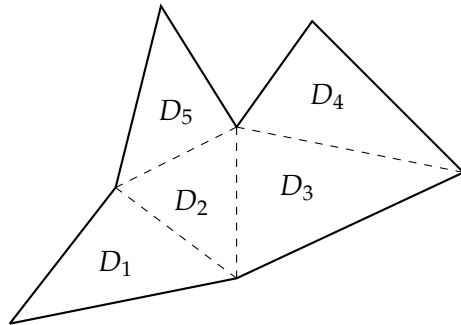


Abbildung 4.2: Polygon mit Zerlegung in Dreiecke

F_i . Es genügt zu zeigen, dass D_i zu einem Rechteck mit Seitenlänge $F_i \times 1$ polygonal zerlegungsgleich ist. Folgende Konstruktionsschritte sind notwendig:

(1) Jedes Dreieck ist zu einem Parallelogramm zerlegungsgleich.



Abbildung 4.3: Zerlegung eines Dreiecks in ein Parallelogramm

(2) Jedes Parallelogramm ist zu einem Parallelogramm mit Kantenlänge 1 zerlegungsgleich. Eventuell sind Hilfsschritte nötig:



Abbildung 4.4: Zerlegung eines Parallelogramms in eines mit Kantenlänge 1

- (a) Verschiebung der Oberkante bzw. Nutzung einer anderen Ecke
 Unter Umständen schneidet der Kreis die Höhenlinie außerhalb des Parallelogramms. Dann kann man die Oberkante verschieben oder die gegenüberliegende Ecke für Zerlegung verwenden.

4 Elementare Zerlegungsgleichheit topologischer Scheiben

(b) Höhe ändern

Unter Umständen ist die Höhe des Parallelogramms höher als der Radius des Kreises. In dem Fall wird das Parallelogramm entlang der halben Höhe zerlegt und beide Teile werden verschoben. Diese Zerlegung kann man solange wiederholen, bis die Höhe entsprechend reduziert ist.

(3) Jedes Parallelogramm mit Kantenlänge 1 ist zerlegungsgleich zu einem Rechteck mit Kantenlänge 1.



Abbildung 4.5: Zerlegung des Parallelogramms in ein Rechteck

Damit wurde gezeigt, dass die Fläche P polygonal zerlegungsgleich zu einem Rechteck der Seitenlänge $F \times 1$ ist und die Behauptung ist bewiesen. ■

4.1.3 Das dritte Hilbertsche Problem

Das Problem geht auf das dritte der 23 Probleme, die DAVID HILBERT 1900 auf dem internationalen Mathematikerkongress in Paris aufgeworfen hat. Die Frage ist, ob der [Satz 4.1](#) analog im \mathbb{R}^3 gilt.

Definition 4.2 (Dehn-Invariante)

Seien $P \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Polyeder, \mathfrak{K}_P die Menge aller Kanten von P , wobei $l(K)$ und $\alpha_P(K)$ die Länge von $K \in \mathfrak{K}_P$ bzw. die Teilwinkelgröße bei K bezeichnen, $V \subseteq \mathbb{R}$ ein \mathbb{Q} -Vektorraum mit $\{\pi\} \cup \{\alpha_P(K) \mid K \in \mathfrak{K}_P\} \subseteq V$ und $f: V \rightarrow \mathbb{Q}$ eine \mathbb{Q} -lineare Funktion mit $f(\pi) = 0$. Dann heißt

$$D_f(P) := \sum_{K \in \mathfrak{K}_P} l(K) \cdot f(\alpha_P(K))$$

eine **Dehn-Invariante** von P .

Beispiel 4.1

Sei W ein Würfel. Dann ist $D_f(W) = \sum_{K \in \mathfrak{K}_W} l(K) f(\pi/2) = 1/2 f(\pi) = 0$.

Satz 4.2 (Max Dehn)

Sind $P, Q \subseteq \mathbb{R}^3$ polyedrisch zerlegungsgleiche Polyeder, so gilt, $D_f(P) = D_f(Q)$ für jede \mathbb{Q} -lineare Funktion $f: V = \text{span}_{\mathbb{Q}}(\{\pi\} \cup \{\alpha_P(K) \mid K \in \mathfrak{K}_P\} \cup \{\alpha_Q(K) \mid K \in \mathfrak{K}_Q\}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\pi) = 0$.

BEWEIS:

Der Mathematiker HUGO HADWIGER lieferte einen eleganteren Beweis.

Zerlegungsgleichheit sei vermöge $P = P_1 \cup \dots \cup P_n$ und $Q = Q_1 \cup \dots \cup Q_n$ mit $Q_i = \beta_i(P_i)$, $\beta_i \in \mathfrak{B}_3$ gegeben. Nun müssen wir den Vektorraum ein wenig vergrößern: $V' :=$

4.2 Bedingungen an die Ränder zerlegungsgleicher Scheiben

$\text{span}(V \cup \bigcup_{i=1}^n \{ \alpha_{P_i}(K) \mid K \in \mathfrak{K}_{P_i} \} \cup \bigcup_{i=1}^n \{ \alpha_{Q_i}(K) \mid K \in \mathfrak{K}_{Q_i} \})$. Weiter sei $f' : V' \rightarrow \mathbb{Q}$ eine fixierte \mathbb{Q} -lineare Fortsetzung von f .

Es ist klar, dass $D_{f'}(Q_i) = D_{f'}(P_i)$. Weiter gilt, $D_{f'}(P) = \sum_{i=1}^n D_{f'}(P_i)$, denn: Sei K die Kante eines der Polyeder P_1, \dots, P_n (insbesondere sind alle Kanten von P mit eventueller Unterteilung vorhanden):

1. Fall $K \in \mathfrak{K}_P$: Die Länge ist $l(K) \cdot f'(\alpha_P(K)) = \sum_{i: K \in \mathfrak{K}_{P_i}} l(K) \cdot f'(\alpha_{P_i}(K))$. Die Teilwinkel der P_i addieren sich zum Teilwinkel von P , denn f' ist additiv.
2. Fall $K \notin \mathfrak{K}_P$: Somit ist K im Inneren von P oder im (relativ) Inneren einer Seitenfläche von P . Dann ist $\sum_{i: K \in \mathfrak{K}_{P_i}} l(K) \cdot f'(\alpha_{P_i}(K)) = l(K) \cdot f'(\underbrace{\sum_{i: K \in \mathfrak{K}_{P_i}} \alpha_{P_i}(K)}_{\in \{\pi, 2\pi\}}) = 0$. Die

Teilwinkel der P_i addieren sich zu π oder 2π .

Mit den obigen beiden Fällen ist:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n D_{f'}(P_i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{K \in \mathfrak{K}_{P_i}} l(K) \cdot f'(\alpha_{P_i}(K)) \\ &= \sum_{K \in \mathfrak{K}_{P_1} \cup \dots \cup \mathfrak{K}_{P_n}} \sum_{i: K \in \mathfrak{K}_{P_i}} l(K) \cdot f'(\alpha_{P_i}(K)) \\ &= \sum_{K \in \mathfrak{K}_P} l(K) \cdot f'(\alpha_P(K)) = D_{f'}(P) \end{aligned}$$

Also ist $D_f(P) = D_{f'}(P)$ mit der obigen Summe. Wir können P_i durch Q_i ersetzen und mit der Überlegung ist letztlich dann $D_f(P) = D_f(Q)$. ■

Folgerung 4.1

Es gibt Tetraeder, die volumengleich, aber nicht polyedrisch zerlegungsgleich sind.

Beispiel 4.2

Bilder aus dem Buch

4.2 Bedingungen an die Ränder zerlegungsgleicher Scheiben

4.2.1 Die Notwendigkeit spezieller Zerlegungsgleichheiten von Rändern zerlegungsgleicher Scheiben

Definition 4.3 (Elementare Zerlegungsgleichheit nach Hinwegnahme endlich vieler Bögen)

- a) Es seien $D, E \in \mathcal{D}$, \mathfrak{G} eine Gruppe von Homöomorphismen des \mathbb{R}^2 und \mathcal{H} eine Familie von Jordanbögen. Die Ränder der Scheiben $\text{bd}(D)$ und $\text{bd}(E)$ heißen genau dann **elementar zerlegungsgleich** bezüglich \mathfrak{G} nach Hinwegnahme endlich vieler

4 Elementare Zerlegungsgleichheit topologischer Scheiben

Bögen aus \mathcal{H} , wenn (disjunkte) Zerlegungen $\text{bd}(D) = A_1 \cup \dots \cup A_n \cup H_1 \cup \dots \cup H_k \cup F$ und $\text{bd}(E) = A'_1 \cup \dots \cup A'_n \cup J_1 \cup \dots \cup J_l \cup G$ in (relativ) offene Bögen A_i, A'_i, H_i, J_i mit $H_i, J_i \in \mathcal{H}$ und endliche Mengen F, G , so dass $A'_i = \alpha_i(A_i)$ mit geeigneten $\alpha_i \in \mathfrak{G}$.

b) Im Fall $k = l = 0$ heißen $\text{bd}(D)$ und $\text{bd}(E)$ elementar \mathfrak{G} -zerlegungsgleich.

Beispiel 4.3

Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{B}_2^+$.

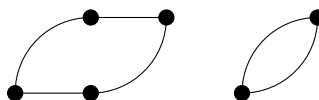


Abbildung 4.6: Zerlegungsgleichheit nach Hinwegnahme endlich vieler Strecken

Definition 4.4 (Wesentlicher Jordanbogen)

Es seien \mathfrak{G} eine Gruppe von Homöomorphismen des \mathbb{R}^2 und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$ eine Familie von Scheiben. Ein Jordanbogen $J \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt $(\mathfrak{G}, \mathcal{F})$ -wesentlich, falls es kein $D \in \mathcal{F}$ gibt, dessen Rand unendlich viele paarweise disjunkte \mathfrak{G} -Bilder von J enthält.

Satz 4.3

- Jeder (nicht zu einem Punkt entartete) Jordanbogen J ist $(\mathfrak{B}_2, \mathcal{D})$ -wesentlich.
- Ein (nicht entarteter) Jordanbogen J ist genau dann $(\text{Aff}^1, \mathcal{D})$ -wesentlich, wenn er keine Strecke ist.
- Ein (nicht entarteter) Jordanbogen J ist genau dann $(\text{Sim}, \mathcal{D}^1)$ -wesentlich, wenn er keine Strecke enthält.

BEWEIS:

- Wir nehmen an, dass J ein $(\mathfrak{B}_2, \mathcal{D})$ -unwesentlicher, aber nicht entarteter Bogen ist. Dann $\exists D \in \mathcal{D} \exists \beta_1, \beta_2, \dots \in \mathfrak{B}_2: \beta_1(J), \beta_2(J), \dots \in \text{bd}(D)$ paarweise disjunkt. Wir wählen $x, y \in J$ mit $x \neq y$ und $x_i := \beta_i(x)$ und $y_i := \beta_i(y) \in \text{bd}(D)$. Damit existiert eine Teilfolge $(i_k)_k \subseteq (i)_i: \lim_{k \rightarrow \infty} x_{i_k} = x_0, \lim_{k \rightarrow \infty} y_{i_k} = y_0 \in \text{bd}(D)$. Da der Rand von D homöomorph zur Kreislinie ist, folgt, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{i_k} = x_0 = y_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{i_k}$. Das ist ein Widerspruch zur Wahl von x und y .
- Sei J eine Strecke und wir wollen zeigen, dass diese $(\text{Aff}^1, \mathcal{D})$ -unwesentlich ist. Dazu wählen wir ein $\beta \in \mathfrak{B}_2^+ \leq \text{Aff}^1$ mit $\beta(J) \subseteq \mathbb{R} \times \{0\}$ (x -Achse) und $\beta_i \in \text{Aff}^1$ mit $\beta_i(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_i & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon_i \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \tau_i \\ 0 \end{pmatrix}$. Dabei ist $\beta_i(\beta(J)) \subseteq (2^i, 2^{i-1}) \times \{0\}$. Diese Strecken sind disjunkt und damit ist $\beta_i(\beta(J)) \subseteq \text{bd}(D)$ paarweise disjunkt für $D = [0, 1]^2$.

Sei nun J keine Strecke. Dann muss der Bogen $(\text{Aff}^1, \mathcal{D})$ -wesentlich sein. Hierfür nehmen wir an, dass es eine Scheibe $D \in \mathcal{D}$ gibt und $\beta_1, \beta_2, \dots \in \text{Aff}^1$ mit $\beta_1(J), \beta_2(J), \dots \in \text{bd}(D)$ paarweise disjunkt sind. Wir wählen $x, y, z \in J$, die nicht kollinear sind und setzen $x_i := \beta_i(x)$, $y_i := \beta_i(y)$ und $z_i := \beta_i(z)$ aus $\text{bd}(D)$. Da

4.2 Bedingungen an die Ränder zerlegungsgleicher Scheiben

die $\beta_i \in \text{Aff}^1$ sind, folgt, $\Delta(xyz)$ und $\Delta(x_i y_i z_i)$ ist flächengleich. Somit existiert ein $c > 0$, sodass für alle i gilt: $\max\{d(x_i, y_i), d(x_i, z_i), d(y_i, z_i)\} \geq c$. Der Widerspruch lässt sich nun wie bei a) finden.

c) Eine Richtung lässt sich analog zu obigem Punkt zeigen.

Wir nehmen nun wieder an, dass der Bogen unwesentlich ist. Dann ist J eine Strecke. Nach Voraussetzung existiert ein $D \in \mathcal{D}^1$ und $\beta_1, \beta_2, \dots \in \text{Sim}$: $\beta_1(J), \beta_2(J), \dots \subseteq \text{bd}(D)$ paarweise disjunkt. Seien o. B. d. A. $\beta_i(J) \subseteq K$. Das K sei ein stetig differenzierbarer abgeschlossener Bogen. Nun betrachten wir $x, y \in J$. Dann haben diese gewisse Tangentenrichtungen t_x, t_y . Wir wissen aber, dass $x_i = \beta_i(x)$ und $y_i = \beta_i(y)$ Tangentenrichtungen t_{x_i} und t_{y_i} bezüglich K haben. Deren Winkel mit dem zwischen t_x und t_y übereinstimmt. Das K ist kompakt. Daher gibt es Teilfolgen $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{i_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{i_k}$. Schließlich ist K stetig differenzierbar und wir haben $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{x_{i_k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} t_{y_{i_k}}$. Damit müssen die Winkel zwischen t_x und t_y Null sein für alle x und y aus J . Also ist J eine Strecke. ■

Lemma 4.1

Es seien \mathcal{G} eine Untergruppe affiner Abbildungen Aff , $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$ eine Familie von Scheiben und $D, E \in \mathcal{D}$ zwei elementar $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -zerlegungsgleiche konvexe Scheiben. Dann sind auch die Ränder $\text{bd}(D)$ und $\text{bd}(E)$ elementar \mathcal{G} -zerlegungsgleich nach Hinwegnahme endlich vieler Strecken und $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -unwesentlichen Bögen.

BEWEIS:

Sei o. B. d. A. $D \cap E = \emptyset$. Realisierung der Zerlegungsgleichheit vermöge der Zerlegung von $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$ und $E = D_{-1} \cup \dots \cup D_{-n}$ mit $D_i \in \mathcal{F}$ und $\gamma_i(D_i) = D_{-i}$ für alle $i \in H = \{\pm 1, \dots, \pm n\}$ mit $\gamma_i \in \mathcal{G}$. Wir gehen davon aus, dass $\gamma_{-i} = \gamma_i^{-1}$. Nun werden diverse Mengen eingeführt:

$$R_0 := \text{bd}(D) \cup \text{bd}(E)$$

$$R_1 := \left(\bigcup_{i=1}^n \text{bd}(D_i) \cup \text{bd}(D_{-i}) \right) \setminus R_0$$

$$V := \{x \in R_0 \cup R_1 \mid \exists i_1, i_2 \in H: (i_1 \neq i_2 \wedge x \in R_0 \cap \text{bd}(D_{i_1}) \cap \text{bd}(D_{i_2})) \\ \vee \exists i_1, i_2, i_3 \in H: (i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_1) \wedge x \in \text{bd}(D_{i_1}) \cap \text{bd}(D_{i_2}) \cap \text{bd}(D_{i_3})\}$$

$$S_0 := \{ (x, i) \mid x \in R_0 \setminus V \wedge i \in H \wedge x \in \text{bd}(D_i) \}$$

$$S_1 := \{ (x, i) \mid x \in R_1 \setminus V \wedge i \in H \wedge x \in \text{bd}(D_i) \}$$

Die Menge V bezeichnet die verbotenen Punkte und ist endlich. Sei γ eine injektive Abbildung, die auf $S_0 \cup S_1$ definiert ist. Das Bild der Abbildung beschreibt das Bild von Randbögen unter der Zerlegungsgleichheit: $\gamma(x, i) := (\gamma_i(x), -i)$. Nun betrachten wir den Übergang von einer Scheibe zur anderen: τ ist eine Bijektion von S_1 mit $\tau^2 = \text{id}_{S_1}$ und vertauscht die Randzuordnung: $\tau(x, i_1) := (x, i_2)$, falls $x \in \text{bd}(D_{i_1}) \cap \text{bd}(D_{i_2})$. Damit benötigen eine Menge der weiteren verbotenen Punkte $W := \{x \in R_0 \setminus V \mid \exists i \in H \exists k \geq 1: ((x, i_1) \in S_0 \wedge (\gamma\tau)^k \gamma(x, i_1) =: (y, i_2))\}, y \in V$. Diese

4 Elementare Zerlegungsgleichheit topologischer Scheiben

ist endlich, denn man kann eine kleine offene Umgebung U von x in $R_0 \setminus V$ betrachten. Das ist ein offener Bogen. Das „Bild von U unter $(\gamma\tau)^{k-1}\gamma$ “ wird von $y \in V$ „zerbrochen“. Da V endlich ist, kann jedes $y \in V$ lokal nur endlich viele Bögen zerbrechen. Da die Abbildung injektiv ist, muss also W endlich sein.

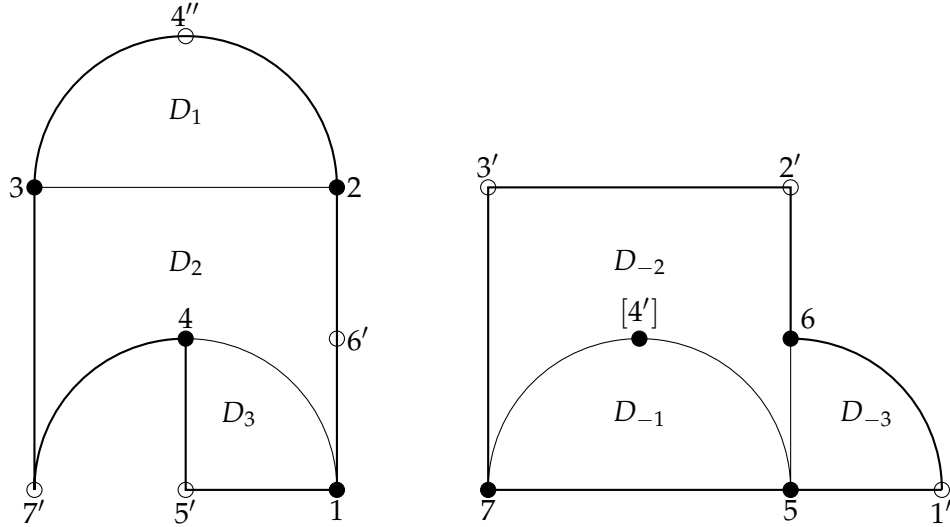


Abbildung 4.7: Scheiben mit den Mengen R_0 (fette Linie), R_1 (dünne Linie), V (ausgefüllter Kreis, ●) und W (leerer Kreis, ○)

Die Menge $R_0 \setminus (V \cup W)$ zerfällt in endlich viele Zusammenhangskomponenten. Das sind (relativ) offene Bögen A_1, \dots, A_l . Dabei seien für $1 \leq m \leq l$ o. B. d. A. die A_1, \dots, A_m keine Strecken und $(\mathfrak{G}, \mathcal{F})$ -wesentlich. Weiterhin seien die A_{m+1}, \dots, A_l Strecken oder $(\mathfrak{G}, \mathcal{F})$ -unwesentliche Bögen. Dazu betrachten wir die Menge $A := A_1 \cup \dots \cup A_m \subseteq R_0$ und $S_A := \{ (x, i) \in S_0 \mid x \in A \}$. Wir behaupten nun, dass für alle $(x, i) \in S_A$ genau ein $k \geq 1$ mit $(\gamma\tau)^{k-1}\gamma(x, i) \in S_A$ existiert und insbesondere wohldefiniert ist.

Die Einzigkeit ist klar, denn $(\gamma\tau)^{k-1}\gamma(x, i) \in S_A \Rightarrow \tau(\gamma\tau)^{k-1}\gamma(x, i)$ nicht definiert, da $(x, i) \notin S_1$. Die Existenz zeigen wir indirekt. Dazu nehmen wir an, dass $\forall k \geq 1$: $(\gamma\tau)^{k-1}\gamma(x, i)$ nicht definiert oder $(\gamma\tau)^{k-1}\gamma(x, i) \notin S_A$ ist.

1. Fall $\forall k \geq 1$: $(\gamma\tau)^{k-1}\gamma(x, i) \notin S_A$, aber wohldefiniert: Der Bogen A_j mit $x \in A_j$ geht unter der Abbildung denselben Weg wie x (keine Aufspaltungen nach Wahl von V und W). Damit finden wir unendlich viele disjunkte \mathfrak{G} -Bilder von A_j in $(R_0 \cup R_1)$. Da die $D_i \in \mathcal{F}$ müssen die Bögen $(\mathfrak{G}, \mathcal{F})$ -unwesentlich sein. ζ

2. Fall $\exists k_0 = \max \{ k \geq 1 \mid (\gamma\tau)^{k-1}\gamma(x, i) \text{ definiert} \}$: Damit ist $(\gamma\tau)^{k_0-1}\gamma(x, i)$ nicht im Definitionsbereich S_1 von τ und auch nach der Annahme nicht in S_A . Also haben wir ein $(\gamma\tau)^{k_0-1}\gamma(x, i) = (x_0, i_0)$ mit $x_0 \in V \cup (R_0 \setminus A)$.

2.1. Fall $x_0 \in V$: Damit folgt, dass $x \in W$ und somit $x \notin A_1, \dots, A_m$ ζ

4.2 Bedingungen an die Ränder zerlegungsgleicher Scheiben

2. 2. Fall $x_0 \in R_0 \setminus A$: Der Bogen A_j mit $x \in A_j$ wird unter der Abbildung in einen der Bögen A_{m+1}, \dots, A_l abgebildet. Somit ist A_j selbst eine Strecke oder $(\mathfrak{G}, \mathcal{F})$ -unwesentlich. ζ

Definiere $\alpha: A \rightarrow A$ durch $\alpha(x) = y \Leftrightarrow \exists k \geq 1 \exists i_1, i_2 \in H: (x, i_1) \in S_A \wedge (\gamma\tau)^{k-1}\gamma(x, i_1) = (y, i_2) \in S_A$.

Wir haben festgestellt: $\forall j_1 \in \{1, \dots, m\} \exists j_2 \in \{1, \dots, m\}: \alpha(A_{j_1}) \subseteq A_{j_2}$ nach der Wahl von V und W . Es ist $\alpha^2 = \text{id}_A$, denn $((\gamma\tau)^{k-1}\gamma)((\gamma\tau)^{k-1}\gamma)(x, i_1) = \gamma(\gamma\tau)^{k-1}(\gamma\tau)^{k-1}\gamma(x, i_1) = (x, i_1)$. Somit gilt für alle $A_j \in \{A_1, \dots, A_m\}: \alpha(A_j) \in \{A_1, \dots, A_m\}$.

Jetzt ist noch zu zeigen, dass für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt, $A_j \subseteq \text{bd}(D) \Leftrightarrow \alpha(A_j) \subseteq \text{bd}(E)$. Somit beschreibt α die gewünschte Zerlegungsgleichheit von Rand von D und E . Dazu gehen wir, wie folgt, vor: $A_j \subseteq \text{bd}(D)$ und $\alpha(A_j) \subseteq \text{bd}(D) \cup \text{bd}(E)$ sind konvexe Bögen nach Voraussetzung an D und E . Das $\alpha(A_j)$ ist beschrieben durch die Abbildung $(\gamma\tau)^{k-1}\gamma$. Durch die Anwendung von τ wird aus einem konvexen Bogen ein konkaver und umgekehrt. Die Abbildung γ erhält die Konvexität. Damit muss $k - 1$ eine gerade Zahl, also ist k ungerade. Jede Anwendung von γ beschreibt den Übergang von D zu E bzw. umgekehrt, während τ keine Übergänge beschreibt. Da k ungerade ist, gilt: $\alpha(A_j) \subseteq \text{bd}(E)$. Damit folgt analog, dass $A_j = \alpha(\alpha(A_j)) \subseteq \text{bd}(D)$. \blacksquare

4.2.2 Charakterisierung von Zerlegungsgleichheit bezüglich der Gruppe der Isometrien der Ebene, der äquiaffinen Abbildungen und der Ähnlichkeitsabbildungen

Satz 4.4

Seien $D, E \in \mathcal{D}$ konvexe Scheiben und \mathfrak{G} eine Gruppe mit $\mathfrak{B}_2^+ < \mathfrak{G} < \text{Aff}^1$. Dann sind D und E genau dann elementar \mathfrak{G} -zerlegungsgleich, wenn sie flächengleich sind und die Ränder von D und E nach Hinwegnahme von endlich vielen Strecken elementar \mathfrak{G} -zerlegungsgleich sind.

BEWEIS:

„ \Rightarrow “ Bedingung an Ränder nach [Lemma 4.1](#) und [Satz 4.3](#). Zur Fläche argumentieren wir wie folgt: Sei λ_2 das Lebesgue-Maß in \mathbb{R}^2 und Zerlegungen $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$ sowie $E = \gamma_1(D_1) \cup \dots \cup \gamma_n(D_n)$. Es gilt, $\lambda_2(D) = \lambda_2(D_1) + \dots + \lambda_2(D_n) - \sum_{i=1}^n \lambda_2(\text{bd}(D_i))$. Die Flächen von $\text{bd}(D_i)$ sind nicht doppelt zu zählen, aber $\lambda_2(\text{bd}(D_i) \cap \text{bd}(D)) = 0$, da D konvex. Da die $\gamma_i \in \text{Aff}^1$ sind, gilt, $\lambda_2(D) = \lambda_2(\gamma_1(D_1)) + \dots + \lambda_2(\gamma_n(D_n)) - \sum_{i=1}^n \lambda_2(\text{bd}(\gamma_i(D_i))) = \lambda_2(E)$.

„ \Leftarrow “ Für relativ offene Bögen J_i , relativ offene Strecken S_i und S'_i sowie endlichen Mengen F, G und Abbildungen $\gamma_i \in \mathfrak{G}$ haben wir $\text{bd}(D) = J_1 \cup \dots \cup J_n \cup S_1 \cup \dots \cup S_k \cup F$ und $\text{bd}(E) = \gamma_1(J_1) \cup \dots \cup \gamma_n(J_n) \cup \dots \cup S'_1 \cup \dots \cup S'_l \cup G$. Da D und E konvex sind, ist $D = \text{conv}(\text{cl}(J_1)) \cup \dots \cup \text{conv}(\text{cl}(J_n)) \cup P$ und $E = \gamma_1(\text{conv}(\text{cl}(J_1))) \cup$

4 Elementare Zerlegungsgleichheit topologischer Scheiben

$\dots \cup \gamma_n(\text{conv}(\text{cl}(J_n))) \cup Q$ elementare Zerlegungen mit $\text{conv}(\text{cl}(J_i)) \in \mathcal{D}$ (oder Strecken, also vernachlässigbar), P, Q flächengleiche Polygone (oder leer). Nach dem [Satz 4.1](#) sind P, Q elementar \mathfrak{B}_2 -zerlegungsgleich. Insgesamt sind D und E elementar \mathfrak{G} -zerlegungsgleich. ■

Folgerung 4.2

Seien $D, E \in \mathcal{D}$ konvexe Scheiben und $\mathfrak{B}_2^+ < \mathfrak{G} < \text{Aff}^1$.

- Sind beide Scheiben streng konvex, so sind D und E genau dann elementar \mathfrak{G} -zerlegungsgleich, wenn D und E flächengleich sind und der Rand von D bzw. der Rand von E elementar \mathfrak{G} -zerlegungsgleich sind.
- Ist D ein Polygon, so sind D und E genau dann elementar \mathfrak{G} -zerlegungsgleich, wenn E ein zu D flächengleiches Polygon ist.
- Eine Quadratur des Kreises mittels elementarer \mathfrak{G} -Zerlegungsgleichheit ist nicht möglich.

Satz 4.5

Zwei konvexe Scheiben $D, E \in \mathcal{D}^1$ sind genau dann $(\text{Sim}, \mathcal{D}^1)$ -zerlegungsgleich, wenn ihre Ränder nach Hinwegnahme endlich vieler Strecken elementar Sim-zerlegungsgleich sind.

BEWEIS:

Der Beweis geht analog zu [Satz 4.4](#). Je zwei Polygone P und Q sind elementar Sim-zerlegungsgleich mit polygonalen Teilen: Flächengleichheit durch Streckung und dann Anwendung von [Satz 4.1](#). ■

Folgerung 4.3

Seien $D, E \in \mathcal{D}^1$ konvexe Scheiben.

- Sind D und E streng konvex, so sind sie genau dann elementar $(\text{Sim}, \mathcal{D}^1)$ -zerlegungsgleich, wenn ihre Ränder elementar Sim-zerlegungsgleich sind.
- Ist D ein Polygon, so sind D und E genau dann $(\text{Sim}, \mathcal{D}^1)$ -zerlegungsgleich, wenn E ein Polygon ist.
- Eine Quadratur des Kreises mittels elementarer $(\text{Sim}, \mathcal{D}^1)$ -Zerlegungsgleichheit ist nicht möglich.

4.3 Geeignete Gruppen für die Quadratur des Kreises

4.3.1 Notwendige Bedingungen für die Quadratur des Kreises

Definition 4.5 (Kontraktion)

Kontraktion: $\exists 0 < c < 1 \forall x, y \in \mathbb{R}^2: d(\gamma(x), \gamma(y)) \leq cd(x, y)$

Satz 4.6

Sei $J \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Jordanbogen, aber keine Strecke. Ist $\mathfrak{G} < \text{Aff}$ eine Gruppe affiner Abbildungen derart, dass J bezüglich $(\mathfrak{G}, \mathcal{D})$ unwesentlich ist, so enthält \mathfrak{G} eine Kontraktion γ .

BEWEIS:

Sei J ein $(\mathfrak{G}, \mathcal{D})$ -unwesentlicher Bogen. Dann existiert ein $D \in \mathcal{D}$ und $\gamma_1, \gamma_2, \dots \in \mathfrak{G}$ mit $\gamma_1(J), \gamma_2(J), \dots \subseteq \text{bd}(D)$ paarweise disjunkt. Da J keine Strecken besitzt, gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}^2$ und ein $r > 0$ mit $B(x_0, r) \subseteq \text{conv}(J)$ und es folgt:

$$(4.1) \quad \gamma_i(B(x_0, r)) \subseteq \text{conv}(\gamma_i(J))$$

Der Rand von D ist kompakt und homöomorph zur Kreislinie. Weiterhin sind die $\gamma_i(J) \subseteq \text{bd}(D)$ disjunkt. Also gibt es $(i_k)_k \subseteq (i_i) \exists \tilde{x} \in \text{bd}(D) \forall x_{i_k} \in \gamma_{i_k}(J) : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{i_k} = \tilde{x}$. Somit folgt, $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(\gamma_{i_k}(J)) = 0$ und mit der Gleichung 4.1 folgt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(\gamma_{i_k}(B(x_0, r))) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(\text{conv}(\gamma_{i_k}(J))) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(\gamma_{i_k}(J)) = 0$$

Also gibt es ein k_0 , so dass für alle $k \geq k_0$ das γ_{i_k} eine Kontraktion ist. ■

Folgerung 4.4

Sind eine Kreisscheibe D und ein Quadrat Q bezüglich einer Gruppe von Affinitäten elementar \mathfrak{G} -zerlegungsgleich, so enthält die Gruppe \mathfrak{G} eine Kontraktion.

BEWEIS:

Sind D und Q elementar \mathfrak{G} -zerlegungsgleich, so können wir das Lemma 4.1 anwenden. Demnach sind $\text{bd}(D)$ und $\text{bd}(Q)$ elementar \mathfrak{G} -zerlegungsgleich nach Hinwegnahme von endlich vielen Strecken und $(\mathfrak{G}, \mathcal{D})$ -unwesentlichen Bögen. Damit folgt nun, dass ein $(\mathfrak{G}, \mathcal{D})$ -unwesentliches Kreisbogenstück existiert und nach dem Satz 4.6 gibt es eine Kontraktion $\gamma \in \mathfrak{G}$. ■

Satz 4.7

Ermöglicht eine Gruppe $\mathfrak{G} < \text{Aff}$ für jede Kreisscheibe D der Fläche 1 und jedes Quadrat Q der Fläche 1 eine elementare \mathfrak{G} -Zerlegungsgleichheit, so enthält \mathfrak{G} eine Kontraktion γ und alle Orbits $\mathfrak{G}(x_0)$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^2$ sind dicht in \mathbb{R}^2 .

BEWEIS:

- Kontraktion nach Folgerung 4.4
- $x_0 \in \mathbb{R}^2, B(x_1, \varepsilon)$ fixiert, zu zeigen: $\exists \alpha \in \mathfrak{G} : (\alpha(x_0) \in B(x_1, \varepsilon))$. $\{Q_1, Q_2, \dots\}$ Überdeckung des \mathbb{R}^2 durch Einheitsquadrate. Dann folgt, dass es ein $k \geq 1$ und ein $i \geq 1$, so dass $\gamma^k(Q_i) \subseteq B(x_1, \varepsilon)$ gibt. Es sind $B(x_0, \frac{1}{\sqrt{\pi}})$ und Q_i elementar \mathfrak{G} -zerlegungsgleich. Also existiert ein $\beta \in \mathfrak{G}$, so dass $\beta(x_0) \in Q_i$. Zusammen mit der vorigen Aussage ergibt sich: $\alpha(x_0) := \gamma^k \beta(x_0) \in \gamma^k(Q_i) \subseteq B(x_1, \varepsilon)$. ■

4.3.2 Zerlegungsgleichheit mit zwei Zerlegungsteilen

Lemma 4.2

Seien $D, E \in \mathcal{D}$ und $\mathfrak{G} < \text{Aff}$ eine Gruppe, die Abbildungen $\alpha, \beta \in \mathfrak{G}$ mit den Eigenschaften

- (i) $\alpha(D) \subseteq E, \beta(E) \subseteq D$
- (ii) Es existiert ein Bogen $\Gamma_D \subseteq \text{bd}(D)$ mit $\alpha(D) \cap \text{bd}(E) = \alpha(\Gamma_D)$.
- (iii) Es existiert ein Bogen $\Gamma_E \subseteq \text{bd}(E)$ mit $\beta(E) \cap \text{bd}(D) = \beta(\Gamma_E)$.
- (iv) $\Gamma_D \cap \beta(\Gamma_E) = \Gamma_E \cap \alpha(\Gamma_D) = \emptyset$.

Dann sind D und E elementar \mathfrak{G} -zerlegungsgleich und es werden nur zwei Zerlegungsteile benutzt.

BEWEIS:

Aus der folgenden Definition ergibt sich die weiter untenstehende Beziehung:

$$\begin{aligned}
 D_1 &:= \bigcup_{i=0}^{\infty} (\beta\alpha)^i(D \setminus \beta(E)) \subseteq D \\
 \beta^{-1}(D \setminus D_1) &= \beta^{-1} \left((D \setminus (D \setminus \beta(E))) \cap \left(D \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (\beta\alpha)^{-i}(D \setminus \beta(E)) \right) \right) \\
 &= \beta^{-1} \left(\beta(E) \cap \left(D \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (\beta\alpha)^{-i}(D \setminus \beta(E)) \right) \right) \\
 &= \beta^{-1}(\beta(E) \setminus \beta\alpha(D_1)) \\
 &= E \setminus \alpha(D_1)
 \end{aligned}$$

Damit existiert die folgende disjunkte Zerlegung: $D = D_1 \cup (D \setminus D_1) =: D_1 \cup D_2$. Da $\alpha(D_1)$ eine Teilmenge von E ist, folgt:

$$E = \alpha(D_1) \cup (E \setminus \alpha(D_1)) = \alpha(D_1) \cup \beta^{-1}(D \setminus D_1) = \alpha(D_1) \cup \beta^{-1}(D_2)$$

Nun wollen wir zeigen, dass $\text{cl}(D_1)$ und $\text{cl}(D_2)$ topologische Scheiben sind. Weiter sind $D = \text{cl}(D_1) \cup \text{cl}(D_2)$ und $E = \alpha(\text{cl}(D_1)) \cup \beta^{-1}(\text{cl}(D_2))$ elementare Zerlegungen. Dazu zeigen wir eine homöomorphe Äquivalenz zu einer elementaren Zerlegungsgleichheit zweier spezieller Scheiben D_0 und E_0 mittels entsprechend definierter Teilscheiben $\text{cl}(D_{1,0})$ und $\text{cl}(D_{2,0})$ sowie Abbildungen α_0 und β_0 .

Zunächst stellen wir fest, dass folgende Teilmengenbeziehungen gelten:

$$(4.2) \quad \beta\alpha(D) \subseteq \text{int}(D) \quad \alpha\beta(E) \subseteq \text{int}(E)$$

4.3 Geeignete Gruppen für die Quadratur des Kreises

Denn nach Definition der Abbildungen α und β folgt, $\beta\alpha(D) \subseteq \beta(E) \subseteq D$. Außerdem ist der Durchschnitt von $\beta\alpha(D)$ mit dem Rand von D leer:

$$\begin{aligned}\beta\alpha(D) \cap \text{bd}(D) &= \beta(\alpha(D) \cap E) \text{bd}(D) = \beta\alpha(D) \cap (\beta(E) \cap \text{bd}(D)) \\ &= \beta\alpha(D) \cap \beta(\Gamma_E) = \beta\alpha(D) \cap \beta(\text{bd}(E) \cap \Gamma_E) \\ &= \beta(\alpha(D) \cap \text{bd}(E)) \cap \beta(\Gamma_E) = \beta(\alpha(\Gamma_D) \cap \Gamma_E) \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

Die Menge $K = \bigcap_{i=0}^{\infty} (\beta\alpha)^i(D)$ ist eine Einermenge $K = \{x_k\}$. Aufgrund der ersten Eigenschaft ist K der Durchschnitt einer absteigenden Folge nichtleerer kompakter Mengen. Nach dem Satz von HEINE-BOREL (Satz 2.9) ist K nichtleer und kompakt. Nachmüssen wir Fälle unterscheiden:

Nach was?

1. Fall Die Dimension des von K erzeugten affinen Raumes $\dim_{\text{aff}}(K)$ ist 0: In dem Fall ist K eine Einermenge.
2. Fall $\dim_{\text{aff}}(K) = d > 0$: Wir wissen, dass $\beta\alpha(K) = K$. Damit folgt, dass $\beta\alpha|_{\text{aff}(K)}$ eine äquiaffine Abbildung in der affinen Hülle von K ist. Nach der obigen Eigenschaft liegt $K \subseteq \text{int}(D)$ und $\text{aff}(K) \cap D$ hat endliches positives d -dimensionales HAUSDORFF-Maß $\mu_d(\text{aff}(K) \cap D) > 0$. Aber andererseits $\beta\alpha(\text{aff}(K) \cap D) = \text{aff}(K) \cap \beta\alpha(D) \subseteq \text{aff}(K) \cap \text{int}(D)$, d. h. $\mu_d(\beta\alpha(\text{aff}(K) \cap D)) < \mu_d(\text{aff}(K) \cap D)$. Das steht aber im Widerspruch dazu, dass die Abbildung äquiaffin ist. Also ist die Aussage bewiesen.

Jetzt stellen wir D als disjunkte Vereinigung dar:

$$(4.3) \quad D = K \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} (\beta\alpha)^i(D \setminus \beta\alpha(D))$$

Der Durchschnitt von D_1 mit dem „Ring“ $(\beta\alpha)^i(D \setminus \beta\alpha(D))$ ergibt:

$$(4.4) \quad D_1 \cap (\beta\alpha)^i(D \setminus \beta\alpha(D)) = (\beta\alpha)^i(D \setminus \beta(E))$$

Denn wegen der ersten Eigenschaft ist $D \setminus \beta(E) \subseteq D \setminus \beta\alpha(D)$.

Topologische Struktur auf dem abgeschlossenen „Ring“ $\text{cl}(D \setminus \beta\alpha(D))$ nach den obigen Eigenschaften. Der Rand von $\text{cl}(D \setminus \beta\alpha(D))$ zerfällt in $\text{bd}(D)$ (außen) und $\beta\alpha(\text{bd}(D))$ (innen) wegen der Ringeigenschaft. Der Abschluss $\text{cl}(D \setminus \beta(E))$ gehört zum äußeren Rand im Abschluss $\text{cl}(\text{bd}(D) \setminus \beta(\Gamma_E))$ und inneren Rand in $\beta\alpha(\Gamma_D)$. Analoge Betrachtungen sind für D_2 möglich.

Nun definieren wir einen Homöomorphismus $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dessen Eigenschaften wir im weiteren schrittweise erarbeiten. Wegen der vierten Eigenschaft existiert ein Homöomorphismus $\rho: \text{bd}(D) \rightarrow \text{bd}(D)$ mit $\rho(\Gamma_D) = \Gamma_{D_0}$ und $\rho(\beta(\Gamma_E)) = \beta_0(\Gamma_{E_0})$. Die Abbildung

4 Elementare Zerlegungsgleichheit topologischer Scheiben

$\beta_0\alpha_0\rho(\beta\alpha)^{-1}: \beta\alpha(\text{bd}(D)) \rightarrow \beta_0\alpha_0(\text{bd}(D_0))$ bildet $\beta\alpha(\Gamma_D)$ auf $\beta_0\alpha_0(\Gamma_{D_0})$ ab. Aufgrund der obigen Strukturaussage existiert ein Homöomorphismus

$$(4.5) \quad \sigma: \text{cl}(D \setminus \beta\alpha(D)) \rightarrow \text{cl}(D_0 \setminus \beta_0\alpha_0(D_0))$$

mit den folgenden Eigenschaften:

$$\sigma|_{\text{bd}(D)} = \rho \quad \sigma|_{\beta\alpha(\text{bd}(D))} = \beta_0\alpha_0\rho(\beta\alpha)^{-1} \quad \sigma(D \setminus \beta(E)) = D_0 \setminus \beta_0(E_0)$$

Schließlich existiert ein Homöomorphismus $\tau: \mathbb{R}^2 \setminus \text{int}(D) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \text{int}(D_0)$ mit $\tau|_{\text{bd}(D)} = \gamma$ und wir definieren wir den Homöomorphismus:

$$(4.6) \quad \varphi(x) = \begin{cases} \tau(x) & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \text{int}(D) \\ (\beta_0\alpha_0)^i \sigma(\beta\alpha)^{-i}(x) & x \in \text{cl}(\beta\alpha)^i(D \setminus \beta\alpha(D)), i \geq 0 \\ x_{k_0} & x = x_k, K = \{x_k\}, K_0 = \{x_{k_0}\} \end{cases}$$

Wegen [Gleichung 4.3](#) ist φ eine Bijektion der Ebene mit $\varphi(D) = D_0$. Die [Gleichung 4.5](#) zusammen mit der Eigenschaft, dass $K = \{x_k\}$ ergibt die Stetigkeit von φ in beiden Richtungen. Aus der [Gleichung 4.5](#) sowie der [Gleichung 4.4](#) folgt, $\varphi(\text{cl}(D_1)) = \text{cl}(D_{1,0})$ und $\varphi(\text{cl}(D_2)) = \text{cl}(D_{2,0})$.

Also sind $\text{cl}(D_1)$ und $\text{cl}(D_2)$ wie $\text{cl}(D_{1,0})$ und $\text{cl}(D_{2,0})$ topologische Scheiben und D wird in $\text{cl}(D_1)$ und $\text{cl}(D_2)$ elementar zerlegt (wie D_0 in $\text{cl}(D_{1,0})$ und $\text{cl}(D_{2,0})$). Analog ergibt sich eine Aussage über E, E_1 und E_2 . ■

Folgerung 4.5

Je zwei konvexe Polygone $P, Q \subseteq \mathbb{R}^2$ sind elementar Sim-zerlegungsgleich, wobei nur zwei Zerlegungsteile benötigt werden.

BEWEIS:

Die [Abbildung 4.8](#) erklärt den Beweis der Folgerung grafisch.

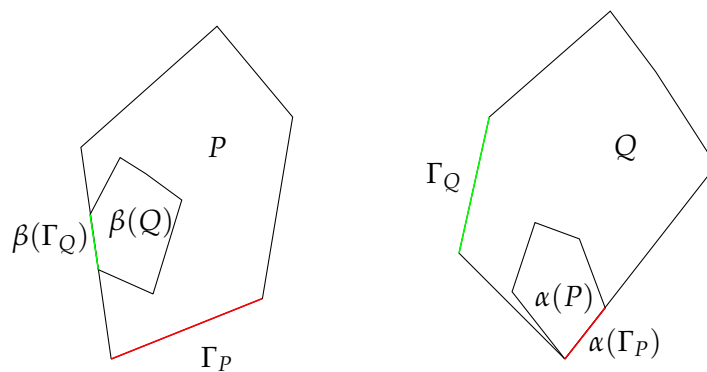


Abbildung 4.8: Grafischer Beweis zur Folgerung

4.3.3 Charakterisierung der Gruppen für die Quadratur des Kreises

Satz 4.8

Es seien $D \in \mathcal{D}$ und $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine nichtleere offene Menge. Enthält eine Gruppe $\mathfrak{G} < \text{Aff}$ eine Kontraktion γ und ist jeder Orbit $\mathfrak{G}(x_0)$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^2$ dicht in \mathbb{R}^2 , so existiert $\alpha \in \mathfrak{G}$ mit $\alpha(D) \subseteq U$.

BEWEIS:

Aufgrund des Banachschen Fixpunktsatzes gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(x_0) = x_0$. Die Orbits sind dicht, damit gibt es ein $\beta \in \mathfrak{G}$ mit $\beta(x_0) \in U$. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $\beta\gamma^k\beta^{-1}(\beta(x_0)) = \beta(x_0)$.

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein großes k_ε , so dass $\beta\gamma^{k_\varepsilon}\beta^{-1}$ eine Kontraktion mit Fixpunkt $\beta(x_0)$ ist und für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ ist der Abstand $d(\beta\gamma^{k_\varepsilon}\beta^{-1}(x), \beta\gamma^{k_\varepsilon}\beta^{-1}(y)) \leq \varepsilon d(x, y)$. Da U offen und D beschränkt war, existiert ein k_0 , so dass $\beta\gamma^{k_0}\beta^{-1}(D) \subseteq U$. ■

Satz 4.9

Für eine Gruppe $\mathfrak{G} < \text{Aff}$ sind äquivalent:

- (i) Jeder Kreis der Fläche 1 und jedes Quadrat der Fläche 1 sind elementar \mathfrak{G} -zerlegungsgleich.
- (ii) Je zwei Scheiben D und E aus \mathcal{D} sind elementar \mathfrak{G} -zerlegungsgleich unter Benutzung von vier Zerlegungsteilen.
- (iii) \mathfrak{G} enthält eine Kontraktion und alle Orbits $\mathfrak{G}(x_0)$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^2$ sind dicht in \mathbb{R}^2 .

BEWEIS:

(ii) \Rightarrow (i) klar

(i) \Rightarrow (iii) [Satz 4.7](#)

(iii) \Rightarrow (ii) Seien $D, E \in \mathcal{D}$ gegeben. Nach dem [Satz 4.8](#) gibt es ein $\delta \in \mathfrak{G}$ mit $\delta(D) \subseteq \text{int}(E)$. Das Γ ist eine Strecke durch das Innere von $\delta(D)$, die E in Scheiben E_1 und E_2 teilt. Das Z ist eine Zusammenhangskomponente von $\delta(D) \cap E_1$. Weiterhin folgt aus dem [Satz 4.8](#), dass es $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{G}$ gibt, mit der Eigenschaft $\alpha\delta(D), \beta(E_1), \gamma(E_2) \subseteq \text{int}(Z)$ paarweise disjunkt sind. Wir wählen Bögen $\Gamma_D \subseteq \text{bd}(\delta(D)) \cap \text{int}(E_2)$, $\Gamma_E \subseteq \text{bd}(E) \setminus E_2$, $J_1 \subseteq \text{bd}(Z) \cap \text{int}(E_1)$, $J_2 \subseteq \text{bd}(Z) \cap \text{int}(\delta(D))$ und $J_3 \subseteq \text{bd}(\gamma(E_2))$. Wir wählen ein $H \in \mathcal{D}$ mit $\text{int}(H) \subseteq Z \setminus (\alpha\delta(D) \cup \beta(E_1) \cup \gamma(E_2))$, $H \cap \text{bd}(Z) = J_1 \cup J_2$, $H \cap \text{bd}(\alpha\delta(D)) = \alpha(\Gamma_D)$, $H \cap \text{bd}(\beta(E_1)) = \beta(\Gamma_E)$, $H \cap \text{bd}(\gamma(E_2)) = J_3$.

Die $D' := \text{cl}(\delta(D) \setminus (H \cup \gamma(E_2)))$ und $E' := \text{cl}(E_1 \setminus H)$ sind Scheiben und erfüllen die Voraussetzungen von [Lemma 4.2](#). Damit ergeben sich Zerlegungen: $D' = D'_1 \cup D'_2$ und $E' = \gamma_1(D'_1) \cup \gamma_2(D'_2)$. Insgesamt existieren die Zerlegungen:

$$\begin{aligned} D &= \delta^{-1}(\delta(D)) = \delta^{-1}(D' \cup H \cup \gamma(E_2)) = \delta^{-1}(D'_1 \cup D'_2 \cup H \cup \gamma(E_2)) \\ &= \delta^{-1}(D'_1) \cup \delta^{-1}(D'_2) \cup \delta^{-1}(H) \cup \delta^{-1}\gamma(E_2) \\ E &= E_1 \cup E_2 = E' \cup H \cup E_2 = \gamma_1(D'_1) \cup \gamma_2(D'_2) \cup H \cup E_2 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

4.3.4 Zur optimalen Teileanzahl

Die untere Abschätzung (z. B. für die Quadratur des Kreises) erhält man durch den folgenden Satz.

Satz 4.10

Sind eine streng konvexe Scheibe $D \in \mathcal{D}$ und eine beliebige Scheibe $E \in \mathcal{D}$ unter Benutzung von nur zwei Zerlegungsteilen elementar \mathfrak{G} -zerlegungsgleich vermöge einer Gruppe $\mathfrak{G} \leq \text{Aff}$, so existiert ein Bogen Γ_D im Rand von D und eine Abbildung $\gamma \in \mathfrak{G}$, sodass $\gamma(\Gamma_D) \subseteq \text{bd}(E)$.

BEWEIS:

Wir nehmen an, dass $D = D_1 \cup D_2$ und $E = \gamma_1(D_1) \cup \gamma_2(D_2)$. Weiter setzen wir $\Gamma_0 := D_1 \cap D_2$, $\Gamma_1 := D_1 \cap \text{bd}(D)$, $\Gamma_2 := D_2 \cap \text{bd}(D)$ und $\Delta_0 := \gamma_1(D_1) \cap \gamma_2(D_2)$ mit $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{G}$. Schließlich sei o. B. d. A. die Determinante der zugehörigen Abbildung: $|\det(\gamma_1)| \geq |\det(\gamma_2)|$. Unsere Annahme ist, dass $\Gamma \subseteq \text{bd}(D)$ mit oben geforderten Eigenschaft existiert nicht. Das heißt, $\gamma_1(\Gamma_1) \subseteq \Delta_0$ und $\gamma_1(\Gamma_1)$ ist auch streng konvex bezüglich der Bildscheibe $\gamma_1(D_1)$ sowie streng konkav bezüglich $\gamma_2(D_2)$.

Es ist $\gamma_2^{-1}\gamma_1(\Gamma_1) \subseteq \text{bd}(D_2)$ streng konkav bezüglich D_2 und da D auch streng konvex ist, folgt, $\gamma_2^{-1}\gamma_1(\Gamma_1) \subseteq \Gamma_0$ sowie $\gamma_2^{-1}\gamma_1(\Gamma_1)$ ist streng konvex bezüglich D_1 und trifft Γ_1 in höchstens einem gemeinsamen Endpunkt.

Die Argumentation wird nun auf beide Bögen angewendet. Das Ergebnis ist gleich zu oben und die Iteration ergibt $\text{bd}(D_1)$ paarweise innendisjunkte Bögen.

Da Γ_1 streng konvex ist, hat die konvexe Hülle von Γ_1 eine Fläche $F > 0$. Die Fläche von $\text{conv}((\gamma_2^{-1}\gamma_1)^k(\Gamma_1))$ ist größer oder gleich als $|((\det(\gamma_2))^{-1} \cdot (\det(\gamma_1)))^k| \cdot F \geq 1^k F = F$. Die konvexe Hülle $\text{conv}((\gamma_2^{-1}\gamma_1)^k(\Gamma_1))$ liegt in einem Quadrat der Kantenlänge $\text{diam}((\gamma_2^{-1}\gamma_1)^k(\Gamma_1))$. Durch Volumenabschätzung erhalten wir $\text{diam}((\gamma_2^{-1}\gamma_1)^k(\Gamma_1)) \geq \sqrt{F}$ für alle $k \geq 0$. Dies steht im Widerspruch wie in [Satz 4.3](#). ■

Bemerkung 4.2

Eine leicht verbesserte obere Abschätzung (z. B. für die Gruppen der Homothetien) ergibt sich der folgende [Satz 4.11](#).

Satz 4.11

Für eine Gruppe $\mathfrak{G} < \text{Aff}$, die alle Translationen enthält, sind äquivalent:

- (i) Es gibt einen Kreis und Quadrat, die elementar \mathfrak{G} -zerlegungsgleich sind.
- (ii) Je zwei Scheiben $D, E \in \mathcal{D}$ sind elementar \mathfrak{G} -zerlegungsgleich unter Benutzung von drei Zerlegungsteilen.
- (iii) \mathfrak{G} enthält eine Kontraktion.

BEWEIS:

(ii) \Rightarrow (i) Klar

(i) \Rightarrow (iii) siehe [Folgerung 4.4](#)

4.3 Geeignete Gruppen für die Quadratur des Kreises

(iii) \Rightarrow (ii) Es ist τ eine Translation mit $\text{bd}(\tau(D)) \cap \text{int}(E) \neq \emptyset$ und $\text{bd}(E) \cap \text{int}(\tau(D)) \neq \emptyset$. Bilde dazu den rechtesten Punkt von E hinreichend weit links in das Innere von E ab. Jetzt gehen wir analog zu der Situation in [Satz 4.9](#) mit $E_2 = \emptyset$ und $E_1 = E$ vor. Das Z ist die Zusammenhangskomponente von $\tau(D) \cap E$. Weiterhin haben wir die Bögen $J_1 \subseteq \text{bd}(Z) \cap \text{int}(E)$, $J_2 \subseteq \text{bd}(Z) \cap \text{int}(\tau(D))$, $\Gamma_D \subseteq \text{bd}(\tau(D)) \setminus E$ und $\Gamma_E \subseteq \text{bd}(E) \setminus \tau(D)$. Wir wählen $\alpha, \beta \in \mathfrak{G}$ nach dem [Satz 4.8](#) mit $\alpha\tau(D), \beta(E) \subseteq \text{int}(Z)$. Schließlich brauchen wir disjunkte Scheiben. Dazu sei $H \in \mathcal{D}$ eine Scheibe und $\text{int}(H) \subseteq Z \setminus (\alpha\tau(D) \cup \beta(E))$, $H \cap \text{bd}(Z) = J_1 \cup J_2$, $H \cap \alpha\tau(D) = \alpha(\Gamma_0)$, $H \cap \beta(E) = \beta(\Gamma_E)$. Wir setzen $D' := \text{cl}(\tau(D) \setminus H)$ und $E' := \text{cl}(E \setminus H) \in \mathcal{D}$.

Aus dem [Lemma 4.2](#) folgt, dass elementare Zerlegungen $D' = D'_1 \cup D'_2$, $E' = \gamma_1(D'_1) \cup \gamma_2(D'_2)$ und $\gamma_i \in \mathfrak{G}$ existieren. Somit existieren Zerlegungen: $D = \tau^{-1}(\tau(D)) = \tau^{-1}(D' \cup H) = \tau^{-1}(D'_1) \cup \tau^{-1}(D'_2) \cup \tau^{-1}(H)$ und $E = E' \cup H = \gamma_1(D'_1) \cup \gamma_2(D'_2) \cup H$. ■

4.3.5 Zerlegungen in Teile mit glattem Rand

Dieser Abschnitt ist ein Rück- und Ausblick. Im folgenden finden sich zwei Tabellen. Diese fassen die wesentlichen, bisher bekannten Resultate zusammen. Die [Tabelle 4.1](#) zeigt, inwieweit Kreisscheiben mit dazu flächengleichen Quadraten elementar $(\mathfrak{G}, \mathcal{F})$ -zerlegungsgleich sind. Dabei werden die Gruppen \mathfrak{B}_2 , Aff^1 , $\text{Hot}(c)$, Sim und Aff betrachtet. Ein Strich (—) bedeutet eine negative Aussage und ein Plus (+) eine positive Aussage. Schließlich ist der Fall $(\text{Aff}, \mathcal{D}^\infty)$ offen, d. h. es liegt noch kein veröffentlichtes Ergebnis vor.

	\mathfrak{B}_2	Aff^1	$\text{Hot}(c)$	Sim	Aff
\mathcal{D}	—	— Satz 4.4	+ Satz 4.9	+	+
\mathcal{D}^1	—	—	—	— Satz 4.5	+
\mathcal{D}^2	—	—	—	—	+
\mathcal{D}^k	—	—	—	—	+
\mathcal{D}^∞	—	—	—	—	offen

Tabelle 4.1: $(\mathfrak{G}, \mathcal{F})$ -Zerlegungsgleichheit von Kreisscheibe und flächengleichem Quadrat

Die [Tabelle 4.2](#) betrachtet Aussagen zur elementaren $(\mathfrak{G}, \mathcal{F})$ -Zerlegungsgleichheit zweier Scheiben $D, E \in \mathcal{F}$. Wie oben ist ein Strich eine negative und ein Plus eine positive Aussage.

Satz 4.12

Es gibt konvexe Scheiben $D, E \in \mathcal{D}^\infty$, die nicht $(\text{Aff}, \mathcal{D}^2)$ -zerlegungsgleich sind.

4 Elementare Zerlegungsgleichheit topologischer Scheiben

	\mathfrak{B}_2	Aff ¹	Hot(<i>c</i>)	Sim	Aff
\mathcal{D}	—	— Satz 4.4	+ Satz 4.9	+	+
\mathcal{D}^1	—	—	—	— Satz 4.5	+
\mathcal{D}^2	—	—	—	—	—
\mathcal{D}^k	—	—	—	—	—

Tabelle 4.2: Elementare $(\mathfrak{G}, \mathcal{F})$ -Zerlegungsgleichheit zweier Kreisscheiben

Bemerkung 4.3

Mögliche Scheiben im Satz 4.12 sind: D ist ein beliebiges Quadrat und E ist die konvexe Hülle von Γ . Dabei ist Γ wie folgt definiert:

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} \mid 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

Satz 4.13

- Je zwei Scheiben $D, E \in \mathcal{D}^1$ sind elementar $(\text{Aff}, \mathcal{D}^1)$ -zerlegungsgleich.
- Die Quadratur des Kreises ist als elementare $(\text{Aff}, \mathcal{D}^2)$ -Zerlegungsgleichheit mit sechs Zerlegungsteilen realisierbar.
- Die Quadratur des Kreises ist für jedes $k \geq 3$ als elementare $(\text{Aff}, \mathcal{D}^k)$ -Zerlegungsgleichheit mit 14 Zerlegungsteilen realisierbar.

Bemerkung 4.4

Eine Illustration: „Prinzip des selbstaffinen Bogens“

5 Das Zerlegungsproblem von Borsuk

KAROL BORSUK stellte 1933 die Frage in [9], ob sich jede beschränkte Teilmenge E des \mathbb{R}^n in $n + 1$ Mengen zerlegen lässt, von denen jede einen kleineren Durchmesser als E hat.

Bemerkung 5.1

Man betrachtet Mengen mit mehr als einem Element, sonst wäre der Durchschnitt der Menge 0. Außerdem verwenden die Betrachtungen die euklidische Metrik.

Weiterhin ergeben sich folgende Beobachtungen:

1. Das reguläre Simplex S bzw. die Menge V_S seiner $n + 1$ Ecken sind jeweils in $n + 1$ Teile von kleineren Durchmesser zerlegbar. Jedoch reichen n Teile nicht aus.
2. Die Kugel $B(0, 1)$ und die Sphäre $S^{n-1} = \text{bd}(B(0, 1))$ sind auch jeweils in $n + 1$ Teile kleineren Durchmessers zerlegbar. Wieder reichen n Teile nicht aus. Nach dem BORSUK-ULAM-Theorem ist S^{n-1} nicht in n Teile kleineren Durchmessers zerlegbar. Danach wird S^{n-1} bzw. $B(0, 1)$ in $n + 1$ Teile kleineren Durchmessers zerlegt. Nun wird ein reguläres Simplex mit Mittelpunkt 0 in die Kugel bzw. Sphäre gelegt. Es sei \bar{n} die Zentralprojektion von $\mathbb{R}^n \setminus 0$ auf den Rand des Simplex. Weiterhin seien F_1, \dots, F_{n+1} die Seitenflächen des Simplex. Dann ergeben sich Zerlegungen $S^{n-1} = \bigcup_{i=1}^{n+1} S^{n-1} \cap \bar{n}^{-1}(F_i)$ bzw. $B(0, 1) = \bigcup_{i=1}^{n+1} ((B(0, 1) \cap \bar{n}^{-1}(F_i)) \cup 0)$. Dabei soll 0 den Nullpunkt darstellen.

5.1 Die Dimensionen 1 bis 3

Satz 5.1

Sei $n \in \{1, 2, 3\}$. Dann besitzt jede beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit einem Durchmesser größer als 0 eine Zerlegung in $n + 1$ Teilmengen deren Durchmesser kleiner als der von M ist.

BEWEIS:

$n = 1$ trivial, Halbierung der Strecke.

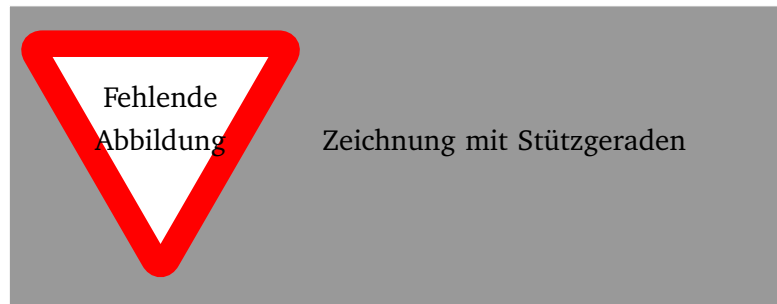
$n = 2$ 1. Schritt Überdeckung von M durch ein regelmäßiges Sechseck S , deren Gegenseiten jeweils den Abstand $\text{diam } M$ haben. Dazu betrachten wir eine Stützfunktion von M zum Vektor $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ mit $h_M(\cos \alpha, \sin \alpha) :=$

5 Das Zerlegungsproblem von Borsuk

$\sup \{ \langle (x, y), (\cos \alpha, \sin \alpha) \rangle \mid (x, y) \in M \}$. Weiterhin betrachten wir eine Stützgerade von M zum Vektor $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ mit

$$H_M(\alpha) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (x, y), (\cos \alpha, \sin \alpha) \rangle = h_M(\cos \alpha, \sin \alpha) \}$$

Somit ist der Abstand $|h_M(\cos \alpha, \sin \alpha) + h_M(\cos(\alpha + \pi), \sin(\alpha + \pi))|$ gegenüberliegender Stützgeraden kleiner oder gleich dem Durchmesser von M .



Sei $\alpha \in [0, \pi]$. Wir betrachten ein Parallelogramm:

$$P(\alpha) = (a(\alpha), b(\alpha), c(\alpha), d(\alpha))$$

mit

$$\{a(\alpha)\} = H_M(\alpha) \cap H_M\left(\alpha + \frac{4}{3}\pi\right)$$

$$\{b(\alpha)\} = H_M(\alpha) \cap H_M\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\{c(\alpha)\} = H_M\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \cap H_M(\alpha + \pi)$$

$$\{d(\alpha)\} = H_M(\alpha + \pi) \cap H_M\left(\alpha + \frac{4}{3}\pi\right)$$

Es sind $l_1(\alpha)$ und $l_2(\alpha)$ die Längen der Lote von $a(\alpha)$ auf $H_M(\alpha + 5/3\pi)$ bzw. von $c(\alpha)$ auf $H_M(\alpha + 2/3\pi)$. Wir haben die Stetigkeit der Größen in Abhängigkeit von α , $l_1(\pi) = l_2(0)$ und $l_2(\pi) = l_1(0)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\alpha_0 \in [0, \pi]$ mit $l_1(\alpha_0) = l_2(\alpha_0)$. Also liegen $H_M(\alpha + 5/3\pi)$ und $H_M(\alpha + 2/3\pi)$ bezüglich des Mittelpunkts von $P(\alpha_0)$ symmetrisch. Durch symmetrisches Wegschieben gegenüberliegender Stützgeraden vom Mittelpunkt bis zum paarweisen Abstand $\text{diam } M$ erhält man das gewünschte überdeckende reguläre Sechseck S .

2. Schritt Zerlegung von S in drei Teile mit kleinerem Durchmesser als der von M :



$n = 3$ Im ersten Schritt wird M durch ein regelmäßiges Oktaeder O , dessen Gegenseiten jeweils den Abstand $\text{diam } M$ haben. Die Konstruktion geht analog zu dem obigen Fall. Wir nehmen o. B. d. A. an, dass $\text{diam } M = 1$. Dann habe O die folgenden Ecken: $(\pm\sqrt{3}/2, 0, 0)$, $(0, \pm\sqrt{3}/2, 0)$ und $(0, 0, \pm\sqrt{3}/2)$. Im zweiten Schritt werden Ecken abgeschnitten. Von jedem Paar gegenüberliegender Ecken von O wird eine im Abstand $1/2$ vom Mittelpunkt so abgeschnitten, dass M ganz im Restkörper V enthalten ist. Schließlich wird V in vier Teile vom Durchmesser kleiner als 1 zerlegt. ■

5.2 Höhere Dimensionen

Zum Nachweis von der Vermutung von BORSUK genügt die Betrachtung konvexer Körper. Dazu sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt mit einem Durchmesser größer als 0. Wir setzen $K := \text{cl}(\text{conv}(M)) \supseteq M$. Dann ist K konvex, kompakt und die Durchmesser beider Mengen sind gleich. Somit liefert eine Zerlegung von K in $n + 1$ Teile kleineren Durchmessers eine Zerlegung von M .

Satz 5.2

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein konvexer Körper mit regulärem Rand, d. h. zu jedem Randpunkt gibt es genau eine Tangentialhyperebene. Dann ist K in $n + 1$ Teilmengen kleineren Durchmessers zerlegbar.

BEWEIS:

Wir wissen, $\mathcal{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ wird durch $n + 1$ abgeschlossene Mengen F_1, \dots, F_{n+1} mit Durchmesser $\text{diam } F_i < \text{diam } \mathcal{S}^{n-1} = 2$ überdeckt. Wir definieren eine stetige Abbildung $f: \text{bd}(K) \rightarrow \mathcal{S}^{n-1}$ durch $f(x)$ ist der äußere Normalenvektor der Tangentialhyperebene von K in x .

5 Das Zerlegungsproblem von Borsuk



Wir zeigen, $\text{diam } A_i < \text{diam } K$ für $1 \leq i \leq n+1$. Dazu sind die A_i kompakt. Also existieren x_0 und x_1 aus A_i mit $\text{diam}(A_i) = d(x_0, x_1)$. Da $\text{diam } F_i < 2$, folgt, dass $d(f(x_0), f(x_1)) < 1$ und somit $f(x_0) \neq -f(x_1)$. Die Tangentialhyperebenen an K in x_0 und x_1 sind nicht parallel. Also gilt: $\text{diam}(x_0, x_1) < \text{diam}(K)$. Damit ist der Durchmesser von A_i kleiner als der von K .

Nun wählen wir ein z aus dem Inneren von K und setzen $B_i := \text{conv}(A_i \cup \{z\})$. Dann überdecken die B_1, \dots, B_{n+1} das K , wobei $\text{diam } B_i < \text{diam } K$. ■

Etwa 60 Jahre nach BORSUKS Frage wurden erste Gegenbeispiele für große Dimensionen gefunden. KAHN und KALAI fanden 1993 eines für $n = 1325$.

Satz 5.3 (A. Nill, Noga Alon)

Es gibt eine endliche Teilmenge von \mathbb{R}^{946} , die nicht in 947, sogar nicht in 1649, Teilmengen kleineren Durchmessers zerlegt werden kann.

BEWEIS:

- Sei p eine ungerade Primzahl, $m := 4p$ und

$$F = \{ (x_1, \dots, x_m) \in \{-1, 1\}^m \mid x_1 = 1 \wedge 2 \mid \text{card} \{ i \in \{1, \dots, m\} \mid x_i = -1 \} \}$$

- Fakt: Ist $G \subseteq F$, die kein Paar orthogonaler Vektoren enthält, so gilt $\text{card}(G) \leq \sum_{i=0}^{p-1} \binom{m-1}{i}$.

Dazu:

- (i) $\forall a, b \in G: (a \neq b \Rightarrow \langle a, b \rangle \not\equiv 0 \pmod{p})$, denn nehmen wir an, dass $\langle a, b \rangle \equiv 0 \pmod{p}$. Dann ist $\langle a, b \rangle \in \{\pm 4p, \pm 3p, \pm 2p, \pm p, 0\}$. Für alle $a, b \in G$ ist das Skalarprodukt durch vier teilbar. Entsteht b_2 aus b_1 durch Änderung der Vorzeichen in zwei Koordinaten, so folgt, $\langle a, b_1 \rangle - \langle a, b_2 \rangle \in \{\pm 4, 0\}$. Es kann nun a ungleich zu $-b$ sein, nach der Definition von F . Also ist $\langle a, b \rangle \neq -4p$. Da $a \neq b$ ist $\langle a, b \rangle \neq 4p$ und nach der Wahl von G ist auch $\langle a, b \rangle \neq 0$. ♣

Zu jedem $a \in G$ definieren wir ein Polynom $P_a(x)$ über dem Körper \mathbb{F}_p mit $p \in \mathbb{P}$ in den Variablen $x = (x_1, \dots, x_m)$ durch $P_a(x) := \prod_{i=1}^{p-1} (\langle a, x \rangle - i)$. Dann ergibt sich:

- (ii) $\forall a, b \in G: (a \neq b \Rightarrow P_a(b) = 0)$, denn das ergibt sich aus der obigen Aussage.

- (iii) $\forall a \in G: (P_a(a) \neq 0)$, denn wegen der Nullteilerfreiheit des Körpers \mathbb{F}_p ergibt sich die Aussage.

Ersetze nun jedes $P_a(x)$ durch ein Polynom $\overline{P}_a(1, x_2, \dots, x_m)$, indem x_1 durch 1 ersetzt wird und außerdem $x_i^2 = 1$ für $2 \leq i \leq m$ gesetzt wird. Dann ist \overline{P}_a ein Polynom in den Variablen (x_2, \dots, x_m) über \mathbb{F}_p vom Grad $\leq p - 1$, wobei die einzelnen Variablen höchstens linear auftreten. Damit liegt $\{\overline{P}_a \mid a \in G\}$ in \mathbb{F}_p -Vektorraum, der von den Polynomen $1; x_2, \dots, x_m; x_2x_3, \dots, x_{m-1}x_m$ bis $x_2x_3 \cdot \dots \cdot x_p, \dots, x_{m-p+2} \cdot \dots \cdot x_m$ aufgespannt wird. Damit folgt:

$$(5.1) \quad \dim(\text{span}\{\overline{P}_a \mid a \in G\}) \leq \sum_{i=0}^{p-1} \binom{m-1}{i}$$

Wegen $\overline{P}_a(b) = P_a(b)$ für $a \in G$ gelten die Punkte (ii) und (iii) für die Polynome $\overline{P}_a(1, x_2, \dots, x_m)$ analog. Also ist $\{\overline{P}_a \mid a \in G\}$ linear unabhängig. Denn für $\sum_{a \in G} \lambda_a \overline{P}_a(x) \equiv 0$ folgt mit $x = b$, dass $\lambda_b = 0$. Also ist $\dim(\text{span}\{\overline{P}_a \mid a \in G\}) = \text{card}(G)$ und damit folgt der Fakt leicht.

- Sei $\varphi(x) = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2, \sqrt{2}x_1x_2, \sqrt{2}x_1x_3, \dots, \sqrt{2}x_{m-1}x_m)$ mit $\varphi(x) \in \mathbb{R}^{m+\binom{m}{2}} \cap \{(y_1, \dots, y_{m+\binom{m}{2}}) \mid y_1 = \dots = y_m = 1\}$ für $x = (x_1, \dots, x_m) = (1, x_2, \dots, x_m) \in F$. Dann kann $\varphi(F)$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^{\binom{m}{2}}$ aufgefasst werden:

$$(5.2) \quad \varphi(F) \subseteq \mathbb{R}^{\binom{m}{2}}$$

- $\forall x, y \in F: (\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle^2 \geq 0)$. Denn:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle &= \sum_{i=1}^m x_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq m} x_j x_k y_j y_k = \sum_{i=1}^m x_i^2 y_i^2 + \sum_{1 \leq j, k \leq m; j \neq k} x_j x_k y_j y_k \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m x_j x_k y_j y_k = \left(\sum_{j=1}^m x_j y_j \right) \left(\sum_{k=1}^m x_k y_k \right) \\ &= (\langle x, y \rangle)^2 \end{aligned}$$

Somit liegt $\varphi(F)$ auf einer Kugel um den Ursprung vom Radius $\sqrt{\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle} = \langle x, y \rangle = m$ und für $x, y \in F$ gilt: $d(\varphi(x), \varphi(y)) = \text{diam}(\varphi(F)) \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$.

Der Fakt besagt, dass jede Teilmenge von $\varphi(F)$ mit kleinerem Durchmesser höchstens $\sum_{i=0}^{p-1} \binom{m-1}{i}$ Punkte enthält. Zur Zerlegung von $\varphi(F)$ in Teilmengen kleineren Durchmessers sind mindestens

$$(5.3) \quad \frac{\text{card}(\varphi(F))}{\sum_{i=0}^{p-1} \binom{m-1}{i}} = \frac{(F)}{\sum_{i=0}^{p-1} \binom{m-1}{i}} = \frac{2^{m-2}}{\sum_{i=0}^{p-1} \binom{m-1}{i}}$$

Teile nötig.

5 Das Zerlegungsproblem von Borsuk

Betrachten wir $p = 11$. Damit ist $m = 44$ und $\binom{m}{2} = 946$. Die Anzahl der Teile aus [Gleichung 5.3](#) ist ungefähr 1649,87. Also gibt es eine endliche Teilmenge von \mathbb{R}^{946} , die nicht in 947 bzw. sogar 1649 Teile kleineren Durchmessers zerlegt werden kann. ■

Bemerkung 5.2

Es sind BORSUK-Gegenbeispiele in allen Dimensionen $n \geq 298$ bekannt (siehe [\[10\]](#)). Offen ist die Frage für $4 \leq n \leq 297$.

5.3 Das Borsuk-Ulam-Theorem

Definition 5.1 (Antipodische Punkte, antipodentreue Abbildung)

Es sei $\mathcal{S}^n := \text{bd}(B(0,1)) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ die Einheitskugel in \mathbb{R}^{n+1} .

- a) $x, y \in \mathcal{S}^n$ heißen **antipodisch**, wenn $x = -y$.
- b) Eine Abbildung $f: \mathcal{S}^n \rightarrow X$ mit $X \subseteq \mathbb{R}^k$ heißt **antipodentreu**, wenn antipodische Punkte auf antipodische Punkte abgebildet werden: $\forall x \in \mathcal{S}^n: (-f(x) = f(-x))$.

Satz 5.4

Für jedes $n \geq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Ist $f: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, dann gibt es einen Punkt der Kugel $x \in \mathcal{S}^n$ mit $f(x) = f(-x)$.
- (ii) Ist eine Abbildung $f: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und antipodentreu, so gibt es einen Punkt, der auf 0 abgebildet wird.
- (iii) Es gibt keine stetige antipodentreue Abbildung $f: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^{n-1}$.
- (iv) Wird \mathcal{S}^n durch $n + 1$ abgeschlossene Mengen F_1, \dots, F_{n+1} überdeckt, so enthält wenigstens eine dieser Mengen ein Paar antipodischer Punkte.

BEWEIS:

Für $n = 0$ sind die Eigenschaften (i), (ii) und (iv) trivial und (iii) ist „leer“. Sei nun $n \geq 1$.

(i) \Rightarrow (iv) Wir definieren zur Überdeckung F_1, \dots, F_{n+1} eine stetige Abbildung $f: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(x) := (d(x, F_1), \dots, d(x, F_n))$. Dabei ist $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$. Aus (i) folgt die Existenz eines $x_0 \in \mathcal{S}^n$ mit $f(x_0) = f(-x_0)$.

1. Fall Es gibt ein $i \in \{1, \dots, n\}$, wobei die i -te Koordinate von $f(x_0) = f(-x_0)$ Null ist. Da F_i eine abgeschlossene Menge ist, folgt, dass x_0 und $-x_0$ in F_i liegen.

2. Fall Alle Koordinaten von $f(x_0) = f(-x_0)$ sind ungleich Null. Damit sind $x_0, -x_0 \notin F_i$ für $1 \leq i \leq n$ und wegen der Überdeckungseigenschaft ist $x_0, -x_0 \in F_{n+1}$.

(iv) \Rightarrow (iii) Der Beweis wird indirekt geführt. Dazu nehmen wir an, dass (iii) nicht gilt. Also gibt es eine stetige antipodentreue Abbildung $f: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^{n-1}$. Wir wissen, dass \mathcal{S}^{n-1} durch $n + 1$ abgeschlossene Teilmengen $F_1, \dots, F_{n+1} \subseteq \mathcal{S}^{n-1}$ überdeckbar, die alle frei von Paaren antipodischer Punkte sind. Das war eine Beobachtung zur BORSUK-Vermutung. Dann ist \mathcal{S}^n durch die abgeschlossenen Mengen $f^{-1}(F_1), \dots, f^{-1}(F_{n+1})$ überdeckt und diese Mengen enthalten keine Paare antipodischer Punkte. Dies ist ein Widerspruch zu (iv).

(iii) \Rightarrow (ii) Wir nehmen an, dass es eine stetige und antipodentreue Abbildung $f: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathcal{S}^n$ gibt. Dann ist die Abbildung $g := \frac{f}{\|f\|}: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^{n-1}$ stetig und antipodentreu. Dies steht aber im Widerspruch zu (iii).

(ii) \Rightarrow (i) Sei $f: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und wir definieren $g(x) := f(x) - (f - x)$. Diese Abbildung ist stetig und antipodentreu. Also existiert ein $x_0 \in \mathcal{S}^n$ mit $g(x_0) = 0$, also ist $f(x_0) = f(-x_0)$. ■

Satz 5.5 (Borsuk-Ulam-Theorem)

Die Aussagen aus dem Satz 5.4 sind für alle $n \geq 1$ wahr.

BEWEIS:

Wir zeigen die Eigenschaft (ii) aus dem Satz 5.4. Sei $f: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und antipodentreu. Dann ist zu zeigen, dass es ein $x \in \mathcal{S}^n$ mit $f(x) = 0$ gibt. Wir gehen vom Gegenteil aus. Wir betrachten die Abbildung $g: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $g(x_1, \dots, x_{n+1}) := (x_1, \dots, x_n)$. Die Nullstellen von g sind $x_N = (0, \dots, 0, 1)$ und $x_S = (0, \dots, 0, -1)$ und die Abbildung ist stetig sowie antipodentreu. Wir setzen $X := \mathcal{S}^n \times [0, 1]$ und definieren $F: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $F(x, t) = (1 - t)g(x) + t \cdot f(x)$. Die Antipodentreue von f und g liefert die Antipodentreue von F .



Wir studieren die Nullstellen von F und erhalten die Menge $N = \{ (x, t) \in X \mid F(x, t) = 0 \}$.

(i) $(x, t) \in N \Leftrightarrow (x, 1 - t) \in N$

(ii) $N \cap (\mathcal{S}^n \times \{0\}) = \{(x_N, 0), (x_S, 0)\}$

(iii) $N \cap (\mathcal{S}^n \times \{1\}) = \emptyset$, da f ohne Nullstellen.

5 Das Zerlegungsproblem von Borsuk

Die Abbildung F bildet eine Mannigfaltigkeit X mit $\dim(X) = n + 1$ in den \mathbb{R}^n ab. Intuitiv ist zu erwarten, dass N als Mannigfaltigkeit immer eindimensional ist. In der Tat kann man o. B. d. A. (mit Hilfe einer kleinen Störung von f , die (i), (ii) und (iii) nicht beeinflussen) annehmen:

- (iv) N besteht aus einfach geschlossenen Jordankurven $\mathcal{S}^n \times (0, 1)$ und aus Jordanbögen (Pfad), deren Enden in $\mathcal{S}^n \times \{0\}$ oder $\mathcal{S}^n \times \{1\}$ liegen. Also gibt es einen Jordanbogen in N von $(x_N, 0)$ nach $(x_S, 0)$. Aufgrund der Eigenschaft (i) ergibt sich damit ein Widerspruch. ■

Folgerung 5.1 (Brouwerscher Fixpunktsatz)

Ist M eine topologische n -Zelle mit $n \geq 1$, so hat jede stetige Abbildung $f: M \rightarrow M$ einen Fixpunkt.

BEWEIS:

Wir nehmen an, dass f keine Fixpunkte hat. Sei $\varphi: B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ ein Homöomorphismus. Dann können wir auch $\tilde{f}: B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ betrachten mit $\tilde{f} := \varphi^{-1}f\varphi$. Die Abbildung ist stetig und fixpunktfrei. Jeder Fixpunkt x_0 von \tilde{f} liefert Fixpunkte $\varphi(x_0)$ von f . Weiterhin definieren wir die Abbildung $g: B(0, 1) \rightarrow \mathcal{S}^{n-1}$. Dabei ist $g(x)$ der Durchstosspunkt des Strahls, der in $\tilde{f}(x)$ und durch x verläuft mit $\mathcal{S}^{n-1} = \text{bd}(B(0, 1))$. Wir wissen, g ist stetig und $g|_{\mathcal{S}^{n-1}} = \text{id}_{\mathcal{S}^{n-1}}$ ist antipodentreu. Dies ist ein Widerspruch zu der Aussage: Es gibt keine stetige Abbildung $f: B(0, 1) \rightarrow \mathcal{S}^{n-1}$ derart, dass $g|_{\mathcal{S}^{n-1}}$ antipodentreu ist. Diese Aussage lässt sich wie folgt zeigen: Wir betrachten eine Projektion $\pi: \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{S}^n \mid x_{n+1} \geq 0\} \rightarrow B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ mit $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) := (x_1, \dots, x_n)$. Dann ist π ein Homöomorphismus der „oberen Halbsphäre“ von \mathcal{S}^n auf $B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nun nehmen wir an, dass die zu beweisende Aussage nicht gilt. Also existiert eine stetige Abbildung $g: B(0, 1) \rightarrow \mathcal{S}^{n-1}$ derart, dass $g|_{\mathcal{S}^{n-1}}$ antipodentreu ist. Wir betrachten $\tilde{g}: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^{n-1}$ mit $\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(\pi(x)) & \text{obere Halbsphäre} \\ -g(\pi(-x)) & \text{untere Halbsphäre} \end{cases}$.

Die Abbildung ist antipodentreu, da $g|_{\mathcal{S}^{n-1}}$ antipodentreu ist, und außerdem stetig. Dies ist ein Widerspruch zu Eigenschaft (iii) aus [Satz 5.4](#). ■

Literaturverzeichnis

- [1] MICHAEL EDELSTEIN: Isometric Decompositions. *Journal of the London Mathematical Society* 37, 1988. Seiten 158–163.
- [2] GERGELY KISS, MIKLÓS LACZKOVICH: Decomposition of balls into congruent pieces. *Mathematika* 57, 2011. Seiten 89–107.
- [3] CHRISTIAN RICHTER: Partitioning Balls into Topologically Equivalent Pieces. *Elemente der Mathematik* 58, 1998. 149–158
- [4] CHRISTIAN RICHTER: On Decompositions of Compact Convex Sets. *Geometriae Dedicata* 71, 1998.
- [5] CHRISTIAN RICHTER: Most Convex Bodies are Isometrically Indivisible. *Journal of Geometry* 89, 2008. Seiten 130–137.
- [6] JOHANNES DE GROOT: Orthogonal isomorphic representations of free groups. *Canadian Journal of Mathematic* 8. 1956. 256–262
- [7] STANLEY WAGON: *The Banach-Tarski-paradox*. Cambridge University Press, 1994.
- [8] MIKLÓS LACZKOVICH: Equidecomposability and discrepancy: a solution to Tarski's circle squaring problem. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, Bd. 404, 1990, S. 77–117.
- [9] KAROL BORSUK: Drei Sätze über die n -dimensionale Sphäre. *Fundamenta Mathematica*, Band 20, 1933. Seiten 177–190.
- [10] AICKE HINRICHS, CHRISTIAN RICHTER: New sets with large Borsuk numbers. *Discrete Mathematics*, Band 270, 2003. Seiten 137–147.
- [11] EIKE HERTEL, CHRISTIAN RICHTER: Squaring the Circle by Dissection. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, Band 44, 2003. Seiten 47–55.
- [12] CHRISTIAN RICHTER: The minimal Number of Pieces realizing affine Congruence by Dissection of topological Discs. *Periodica Mathematica Hungarica* Vol. 46 (2), 2003. Seiten 203–213.
- [13] CHRISTIAN RICHTER: Affine congruence by dissection of discs - appropriate groups and optimal dissections. *Journal of Geometry*, 84, 2005. Seiten 117–132.

Index

1. Kategorie, 28

A

Abbildung

affine, 11

lineare, 9

abgeschlossen, 16

Abschluss, 20

affin, 11

antipodentreu, 80

antipodisch, 80

B

Bairesch, 28

Banachraum, 9

C

Cauchyfolge, 9

D

Dehn-Invariante, 60

dicht, 9

E

Element

unabhängiges, 41

elementar zerlegungsgleich, 57, 58, 61

F

finit abgeschlossen, 16

finit offen, 16

Fixpunkt, 12

Fixpunkteigenschaft, 12

folgenkompakt, 31

G

Grad, 39, 41

Gruppe, 8

freie, 40

kommutative, 8

H

Hausdorff-Abstand, 27

Homogenität, 8

Homöomorphismus, 21

Hülle

konvexe, 10

I

Inneres, 20

Isometrie, 11

Isometriegruppe, 11

K

Kategorie

1., 28

erste, 28

Körper, 8

kommutativ, 8

kompakt, 31

kongruent, 39

Konkatenation, 40

Kontraktion, 66

konvex, 10

Konvexkombination, 10

Kugel, 10

offene, 21

L

lokal kommutativ, 46

M

mager, 28

Menge

abgeschlossene, 16

dichte, 9

finit abgeschlossene, 16

finit offene, 16

konvexe, 10

magere, 28

offene, 9, 16

N

nirgends dicht, 28

Norm, 8

O

offen, 16

Orbit, 13, 45

P

Parallelmenge, 27

Pflasterung, 11

R

Rand, 20

Rang, 40

Raum

normierter, 9

topologischer, 9

vollständig, 9

reduziert, 40

S

Scheibe

topologische, 57

Shift-Abbildung, 15

Simplex, 14

Spurtopologie, 9

Stabilisator, 46

streng konvex, 23

T

teilbar, 11

Topologie, 9

reduzierte, 9

U

unabhängig, 41

V

Vektorraum, 8

vertauschbar, 8

Volumen, 28

W

wesentlich, 62

Wort, 40

reduziertes, 40

Z

Zelle

topologische, 35

Zentrum

metrisches, 22

zerlegungsgleich, 39, 57, 58

Zerlegungsgleichheit

polygonale, 58

zerlegungstheoretisch kleiner, 52