

# **Analysis 3**

Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeißer

Semester: WS 2005/06



# Vorwort

Dieses Skript ist im Rahmen des *Projekts „Vorlesungsskripte der Fakultät für Mathematik und Informatik“* entstanden und wird im Rahmen dieses Projekts weiter betreut. Das Skript ist nach bestem Wissen und Gewissen entstanden. Dennoch garantiert weder der auf der Titelseite genannte Dozent, noch die Mitglieder des Projekts für dessen Fehlerfreiheit. Für etwaige Fehler und dessen Folgen wird von keiner der genannten Personen eine Haftung übernommen. Es steht jeder Person frei, dieses Skript zu lesen, zu verändern oder auf anderen Medien verfügbar zu machen, solange ein Verweis die Internetadresse <http://uni-skripte.lug-jena.de/> des Projekts enthalten ist.

Diese Ausgabe trägt die Versionsnummer 2597 und ist vom 4. Dezember 2009. Eine (mögliche) aktuellere Ausgabe ist im Verzeichnis *PDF* verfügbar.

Jeder ist dazu aufgerufen, Verbesserungen, Erweiterungen und Fehlerkorrekturen für das Skript einzureichen bzw. zu melden oder selbst einzupflegen – einfach eine eMail an die *Mailingliste* [<uni-skripte@lug-jena.de>](mailto:uni-skripte@lug-jena.de) senden. Weitere Informationen sind unter der oben genannten Internetadresse des Projekts verfügbar.

Hiermit möchten wir allen Personen, die an diesem Skript mitgewirkt haben, vielmals danken:

- *Jörg Sommer* [<joerg@alea.gnuu.de>](mailto:joerg@alea.gnuu.de) (2005–2006)
- *Jens Kubieziel* [<jens@kubieziel.de>](mailto:jens@kubieziel.de) (2005–2007)
- *Peter Schindler* (2005)
- *Fabian Stutzki* (2005–2006)

# Inhaltsverzeichnis

<b>8</b>	<b>Vektoranalysis, Integralsätze</b>	<b>9</b>
8.1	Vektorfelder . . . . .	9
8.1.1	Rechenregeln für Differentialoperatoren . . . . .	9
8.1.2	Hauptsatz für Kurvenintegrale und skalare Potentiale . . . . .	12
8.1.3	Vektorpotentiale . . . . .	19
8.2	Integralsätze . . . . .	20
8.2.1	Die Greensche Formel im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	20
8.2.2	Der Satz von Stokes (im $\mathbb{R}^3$ ) . . . . .	23
8.2.3	Der Satz von Gauß-Ostrogradski – „Divergenzsatz“ . . . . .	27
8.3	Ergänzungen . . . . .	32
8.3.1	Flächenintegrale im $\mathbb{R}^n$ und die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	32
8.3.2	Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten . . . . .	35
8.3.3	Die Maxwell'schen Gleichungen . . . . .	37
<b>9</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen</b>	<b>39</b>
9.1	Die Laplace-Poisson-Gleichung . . . . .	39
9.1.1	Einleitung . . . . .	39
9.1.2	Die Green'sche Darstellungsformel . . . . .	40
9.1.3	Die Green'sche Funktion für die Kugel und das Poisson-Integral . . . . .	44
9.1.4	Mittelwerteigenschaften . . . . .	48
9.1.5	Maximum- und Minimumprinzipien . . . . .	50
9.1.6	Das Newton-Potential . . . . .	52
9.2	Cauchy-Probleme . . . . .	55
9.2.1	Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	55
9.2.2	Die eindimensionale Wellengleichung . . . . .	62
9.2.3	Die dreidimensionale Wellengleichung . . . . .	66
9.2.4	Die zweidimensionale Wellengleichung . . . . .	72
9.3	Separationsansätze (Fourier'sche Methode) . . . . .	73
9.3.1	Wellengleichung – schwingende Saite . . . . .	73
9.3.2	Fourierreihen . . . . .	78
9.3.3	Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	83
9.3.4	Die Laplace-Poisson-Gleichung . . . . .	85
<b>10</b>	<b>Komplexe Funktionen</b>	<b>88</b>
10.1	Komplexe Differenzierbarkeit . . . . .	88
10.1.1	Definition und Grundregeln . . . . .	88

10.1.2	Die Cauchy-Riemannschen Differentiationsgleichungen . . . . .	90
10.2	Integration . . . . .	94
10.2.1	Komplexe Kurvenintegrale . . . . .	94
10.2.2	Stammfunktionen . . . . .	97
10.2.3	Der Cauchy'sche Integralsatz . . . . .	99
10.2.4	Die Cauchy'sche Integralformel . . . . .	103
10.3	Singularitätentheorie . . . . .	108
10.3.1	Laurentreihen . . . . .	108
10.3.2	Der Residuensatz . . . . .	112
10.3.3	Singularitäten . . . . .	114
10.4	Eigenschaften holomorpher Funktionen . . . . .	115
10.4.1	Der Identitätssatz für holomorphe Funktionen . . . . .	115
10.4.2	Ganze analytische Funktionen . . . . .	116
10.4.3	Maximumprinzip . . . . .	117
10.4.4	Konforme Abbildungen . . . . .	118

# Auflistung der Theoreme

## Sätze

Satz 8.1.1/5	Rechenregeln für Differentialoperatoren . . . . .	11
Satz 8.1.2/5	Hauptsatz für Kurvenintegrale . . . . .	14
Satz 8.2.2/5	Satz von Stokes . . . . .	25
Satz 8.2.3/4	Gauß für $n = 3$ . . . . .	29
Satz 8.2.3/6	Die Green'schen Sätze . . . . .	31
Satz 9.1.2/9	Greensche Darstellungsformel . . . . .	42
Satz 9.1.3/4	Poisson'sche Darstellungsformel . . . . .	46
Satz 9.1.5/4	Satz von Liouville . . . . .	51
Satz 9.1.6/4	Eigenschaften des Newton-Potentials . . . . .	54
Satz 9.2.1/4	Cauchyproblem für die homogene Wärmeleitungsgleichung . . . . .	57
Satz 9.2.1/7	Cauchyproblem für die inhomogene Wärmeleitungsgleichung . . . . .	59
Satz 9.2.2/1	Allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung, Formel von d'Alembert . . . . .	62
Satz 10.1.2/6	Potenzreihen als harmonische Funktionen . . . . .	92
Satz 10.2.1/6	Cauchy'scher Integralsatz für sternförmige Gebiete . . . . .	96
Satz 10.2.2/3	Hauptsatz der Integralrechnung . . . . .	97
Satz 10.2.3/9	Cauchy'scher Integralsatz . . . . .	103
Satz 10.2.4/2	Die Cauchy'sche Integralformel . . . . .	104
Satz 10.3.1/3	Laurentreihensatz . . . . .	109
Satz 10.3.2/8	Residuensatz . . . . .	113
Satz 10.3.3/4	Casorati-Weierstraß . . . . .	115
Satz 10.4.2/2	Satz von Liouville . . . . .	116
Satz 10.4.2/4	Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	117

Satz 10.4.3/1 Maximumprinzip . . . . . 117  
Satz 10.4.3/2 Minimumprinzip . . . . . 117  
Satz 10.4.4/3 Riemannscher Abbildungssatz . . . . . 118

**Definitionen und Festlegungen**

Definition 9.2.1/1 Cauchyproblem für Wärmeleitungsgleichung . . . . . 55  
Definition 9.3.2/2 Hilbertraum . . . . . 82  
Definition 9.3.2/4 Orthonormalbasis . . . . . 83  
Definition 10.1.2/7 Komplexe trigonometrische Funktionen . . . . . 93

## Literaturverzeichnis

- [1] I. Jost: Partielle Differentialgleichungen, Springer 1998
- [2] R. Wüst: Höhere Mathematik für Physiker, Teil 2, de Gruyter 1995
- [3] L. Evans: Partial differential equations, AMS 1998
- [4] W. Fischer, I. Lieb: Funktionentheorie, Vieweg 2003 (8. Auflage)
- [5] R. Remmert: Funktionentheorie I+II, Springer 1184/91
- [6] H. Fischer, H. Kaul: Mathematik für Physiker 1, Teubener 1990 (Kapitel VII)
- [7] E. M. Stein, R. Shakarchi: Complex Analysis, Princeton University Press 2003



# 8 Vektoranalysis, Integralsätze

Im Rahmen dieses Kapitels betrachten wir Vektorfelder, die jedem Punkt dieses Raumes einen Vektor zuordnen, und Skalarfelder, die jedem Punkt dieses Raumes einen Skalar zuordnen.

## 8.1 Vektorfelder

### Definition 8.1.0/1

Ein *Vektorfeld*  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  ist eine glatte Funktion einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^n$ . *Vektorfeld*

Man kann sagen, dass an jedem Punkt der Menge  $\Omega$  ein Pfeil angebracht wird. Dieser ändert sich nicht sprunghaft. Unten betrachten wir einige wichtige Operationen im Zusammenhang mit Vektorfeldern.

### 8.1.1 Rechenregeln für Differentialoperatoren

#### Definition 8.1.1/1

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ ,  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  kanonische Basis,  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist einmal stetig differenzierbar ( $u \in C^1(\Omega)$ ),  $u$  ist ein *skalares Feld*<sup>1</sup>,  $\vec{v}(x) = v_1(x)\vec{e}_1 +$  *skalares Feld*

$\dots + v_n(x)\vec{e}_n = (v_1(x), \dots, v_n(x))$  oder als Spaltenvektor  $\begin{bmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \end{bmatrix}$ ,  $v_j \in C^1(\Omega)$  ein  $C^1$ -

Vektorfeld (für  $j = 1, \dots, n$ ). Dann gilt:

- (1) Als den *Gradient* oder *Nabla* einer Funktion  $u$  bezeichnet man *Gradient, Nabla*

$$\begin{aligned} \text{grad } u &= \nabla u = \partial_1 u \vec{e}_1 + \dots + \partial_n u \vec{e}_n && \text{wobei } \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \begin{bmatrix} \partial_1 u \\ \vdots \\ \partial_n u \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) Als *Divergenz* eines Vektorfeldes  $\vec{v}$  bezeichnet man

*Divergenz*

$$\operatorname{div} \vec{v} := \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \dots + \partial_n v_n (= \nabla \vec{v})$$

*Rotation*

(3) Die *Rotation* eines Vektorfeldes  $\vec{v}$  im  $\mathbb{R}^3$  ist definiert als

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{v} &= (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) \vec{e}_1 + (\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3) \vec{e}_2 + (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) \vec{e}_3 \\ &= \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \partial_1 & v_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_2 & v_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_3 & v_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Letzteres kann man als Eselsbrücke ansehen.

### Bemerkung 8.1.1/2

*quellenfreies V.*  
*wirbelfreies V.*

Gilt  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  für  $\vec{v}$  auf  $\Omega$ , dann nennt man  $\vec{v}$  ein *quellenfreies Vektorfeld*. Ist  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$  auf  $\Omega$ , so nennt man es ein *wirbelfreies Vektorfeld*.

### Definition 8.1.1/3

Für  $u \in C^2(\Omega)$  und  $\vec{v}$  ein  $C^2$ -Vektorfeld auf  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  bezeichnet

(1)

$$\Delta u := \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial u_j^2}$$

*Laplace-Operator*

den *Laplace-Operator*<sup>2</sup>.

(2)  $\Delta \vec{v} := \Delta v_1 \vec{e}_1 + \Delta v_2 \vec{e}_2 + \Delta v_3 \vec{e}_3$

### Satz 8.1.1/4

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $u \in C^2(\Omega)$  und  $\vec{v}$  ein  $C^2$ -Vektorfeld. Dann gilt:

(1)  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0$

(2)  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0$

(3)  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$

(4)  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) - \Delta \vec{v}$

BEWEIS:

(1)–(3) durch elementare Rechnung unter Anwendung des Satz von Schwarz

<sup>1</sup>Ein skalares Feld ist eine Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$ . Man sagt, jedem Punkt im Raum wird eine reelle Zahl zugeordnet.

<sup>2</sup>Als Eselsbrücke kann man sich  $\Delta = \nabla^2$  merken.

- (4) durch Einsetzen der Definition der Operatoren (Definition 8.1.1/3) und Anwendung des Satzes von Schwarz

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) &= \begin{bmatrix} \partial_1(\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3) \\ \partial_2(\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3) \\ \partial_3(\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1^2 v_1 + \partial_1 \partial_2 v_2 + \partial_1 \partial_3 v_3 \\ \partial_1 \partial_2 v_1 + \partial_2^2 v_2 + \partial_2 \partial_3 v_3 \\ \partial_1 \partial_3 v_1 + \partial_2 \partial_3 v_2 + \partial_3^2 v_3 \end{bmatrix} \\
\Delta \vec{v} &= \begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1^2 v_1 + \partial_2^2 v_1 + \partial_3^2 v_1 \\ \partial_1^2 v_2 + \partial_2^2 v_2 + \partial_3^2 v_2 \\ \partial_1^2 v_3 + \partial_2^2 v_3 + \partial_3^2 v_3 \end{bmatrix} \\
\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) - \Delta \vec{v} &= \begin{bmatrix} \partial_1^2 v_1 + \partial_1 \partial_2 v_2 + \partial_1 \partial_3 v_3 - \partial_1^2 v_1 - \partial_2^2 v_1 - \partial_3^2 v_1 \\ \partial_1 \partial_2 v_1 + \partial_2^2 v_2 + \partial_2 \partial_3 v_3 - \partial_1^2 v_2 - \partial_2^2 v_2 - \partial_3^2 v_2 \\ \partial_1 \partial_3 v_1 + \partial_2 \partial_3 v_2 + \partial_3^2 v_3 - \partial_1^2 v_3 - \partial_2^2 v_3 - \partial_3^2 v_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \partial_1 \partial_2 v_2 + \partial_1 \partial_3 v_3 - \partial_2^2 v_1 - \partial_3^2 v_1 \\ -\partial_1^2 v_2 + \partial_1 \partial_2 v_1 + \partial_2 \partial_3 v_3 - \partial_3^2 v_2 \\ -\partial_1^2 v_3 + \partial_1 \partial_3 v_1 - \partial_2^2 v_3 + \partial_2 \partial_3 v_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \partial_2(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) - \partial_3(\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3) \\ \partial_3(\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) - \partial_1(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) \\ \partial_1(\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3) - \partial_2(\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) \end{bmatrix} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v}) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Satz 8.1.1/5 (Rechenregeln für Differentialoperatoren)**

Sei  $f, g \in C^1(\Omega)$  und  $\vec{H}, \vec{K}$  seien  $C^1$ -Vektorfelder.

- (1)  $\operatorname{div}, \operatorname{grad}, \operatorname{rot}$  sind linear
- (2)  $\operatorname{grad}(f \cdot g) = g(\operatorname{grad} f) + f(\operatorname{grad} g)$
- (3)  $\operatorname{div}(f \cdot \vec{H}) = f \operatorname{div} \vec{H} + (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{H}$
- (4)  $\operatorname{div}(\vec{H} \times \vec{K}) = (\operatorname{rot} \vec{H}) \cdot \vec{K} - \vec{H} \cdot (\operatorname{rot} \vec{K})$
- (5)  $\operatorname{rot}(f \cdot \vec{H}) = f(\operatorname{rot} \vec{H}) + (\operatorname{grad} f) \times \vec{H}$

BEWEIS:

- (1) klar
- (2) siehe (3)
- (3) Es gilt (Anwendung der Produktregel):

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f \vec{H}) &= \partial_1(f H_1) + \partial_2(f H_2) + \partial_3(f H_3) \\
&= f(\partial_1 H_1 + \partial_2 H_2 + \partial_3 H_3) + (\partial_1 f) H_1 + (\partial_2 f) H_2 + (\partial_3 f) H_3 \\
&= f \operatorname{div} \vec{H} + (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{H}
\end{aligned}$$

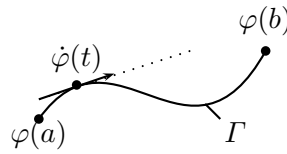


Abbildung 8.1: Glatte Jordankurve

(4) Das Produkt der Vektorfelder  $\vec{H}$  und  $\vec{K}$  ist:

$$\begin{aligned} \vec{H} \times \vec{K} &= \begin{pmatrix} H_2 K_3 - H_3 K_2 \\ H_3 K_1 - H_1 K_3 \\ H_1 K_2 - H_2 K_1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{H} \times \vec{K}) &= \operatorname{div} \begin{pmatrix} H_2 K_3 - H_3 K_2 \\ H_3 K_1 - H_1 K_3 \\ H_1 K_2 - H_2 K_1 \end{pmatrix} \\ &= \partial_1(H_2 K_3 - H_3 K_2) + \partial_2(H_3 K_1 - H_1 K_3) + \partial_3(H_1 K_2 - H_2 K_1) \\ &= K_3 \partial_1 H_2 + H_2 \partial_1 K_3 - K_2 \partial_1 H_3 + H_3 \partial_1 K_2 + \dots \\ &\quad + K_2 \partial_3 H_1 + H_1 \partial_3 K_2 - K_1 \partial_3 H_2 + H_2 \partial_3 K_1 \\ &= (\operatorname{rot} \vec{H}) \cdot \vec{K} - \vec{H} \cdot (\operatorname{rot} \vec{K}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 8.1.2 Hauptsatz für Kurvenintegrale und skalare Potentiale

Eine kurze Wiederholung aus Abschnitt 7.2

*glatte Jordankurve*  
*Tangentenvektor*

- $(\Gamma, \varphi)$  bezeichnet eine *glatte Jordankurve*  $:\Leftrightarrow \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar,  $\Gamma = \{\varphi(t) : t \in [a, b]\}$ ,  $\varphi$  ist injektiv auf  $(a, b)$ , der *Tangentenvektor*  $\dot{\varphi}(t) \neq 0$  für  $t \in (a, b)$

*geschlossen*

$(\Gamma, \varphi)$  heißt *geschlossen*  $:\Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$

*glatte Jordankurve*

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $(\Gamma, \varphi)$  *glatte Jordankurve*,  $\Gamma \subseteq \Omega$ ,  $\vec{v}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetiges Vektorfeld

$$\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x} := \int_a^b \vec{v}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) dt$$

Anmerkung: Die Physik definiert dieses Integral „Arbeit“

#### Definition 8.1.2/1

Man bezeichnet  $(\Gamma, \varphi)$  als *stückweise glatte Kurve* oder kurz *Kurve*  $:\Leftrightarrow$ :

*stückweise glatte*  
*Kurve*  
*Kurve*

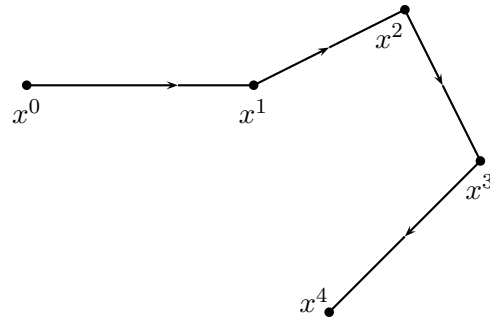


Abbildung 8.2: Polygonzug

- $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig
- $\Gamma = \{\varphi(t) : t \in [a, b]\}$
- es existieren endlich viele Teilungspunkte  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$
- für jedes  $j = 1, \dots, n$  ist  $(\Gamma_j, \varphi|_{[t_{j-1}, t_j]})$  eine glatte Jordankurve, wobei  $\Gamma_j = \{\varphi(t) : [t_{j-1}, t_j]\}$

Auch solche Kurven nennen wir *geschlossen*, wenn Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen:  $\varphi(a) = \varphi(b)$ . *geschlossen*

### Beispiel 8.1.2/2 (Polygonzug)

Einer Folge  $x^0, x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $x^{j-1} \neq x^j$ , wird ein *Polygonzug*

*Polygonzug*

$$\varphi_j(t) = x^{j-1} + t(x^j - x^{j-1}) \quad t \in [0, 1]$$

zugeordnet.  $[x^0 x^1 \dots x^n]$ . Dies ist ein Beispiel für eine stückweise stetige Kurve.

### Definition 8.1.2/3

Sei  $(\Gamma, \varphi)$  Kurve und  $\vec{v}$  stetiges Vektorfeld auf  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:

$$\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x} := \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \vec{v} \cdot d\vec{x}$$

### Beispiel 8.1.2/4

$$x^0 = (0, 0, 0)$$

$$x^1 = (1, 0, 0)$$

$$x^2 = (1, 1, 0)$$

$$x^3 = (1, 1, 1)$$

$$\vec{v}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_1 x_2 x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x} &= \int_0^1 \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dx_1 + \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} dx_2 + \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dx_3 \\ &= 3 \int_0^1 x_1 dx_1 = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

**Satz 8.1.2/5 (Hauptsatz für Kurvenintegrale)**

(vergleiche mit Satz 7.2.2/7 aus Analysis II) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $(\Gamma, \varphi)$  eine Kurve in  $\Omega$ ,  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar ( $u \in C^1(\Omega)$ ),  $\vec{v} = \text{grad } u$  und  $x^0 = \varphi(a)$  der Anfangspunkt sowie  $x^1 = \varphi(b)$  der Endpunkt von  $\Gamma$ . Dann ist

$$\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x} = u(x^1) - u(x^0)$$

BEWEIS:

Wir betrachten zunächst das Integral über dem  $j$ -ten Abschnitt der Kurve  $\Gamma$  und wenden die Erkenntnisse dann auf die gesamte Kurve an.

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_j} \vec{v} d\vec{x} &= \int_{t_{j-1}}^{t_j} \vec{v}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) dt = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left( \sum_{k=1}^n v_k(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \right) dt \\ &= \int_{t_{j-1}}^{t_j} \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)}_{\frac{d}{dt}(u(\varphi(t))) \text{ Kettenregel}} dt & v_k = \frac{\partial u}{\partial x_k} \text{ Voraussetzung} \\ &= u(\varphi(t)) \Big|_{t_{j-1}}^{t_j} = u(\varphi(t_j)) - u(\varphi(t_{j-1})) \\ \int_{\Gamma} \vec{v} d\vec{x} &= \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \vec{v} d\vec{x} = \sum_{j=1}^N (u(\varphi(t_j)) - u(\varphi(t_{j-1}))) \\ &= u(\varphi(b)) - u(\varphi(a)) = u(x^1) - u(x^0) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

**Bemerkung 8.1.2/6**

wegunabhängig  
geschlossenen  
Kurven

Sei  $\vec{v} = \text{grad } u$ . Dann ist  $\int_{\Gamma} \vec{v} d\vec{x}$  „wegunabhängig“, nur von Anfangs- und Endpunkt abhängig und es gilt,  $\int_{\Gamma} \vec{v} d\vec{x} = 0$  für alle geschlossenen Kurven in  $\Omega$ .

**Definition 8.1.2/7**

konservativ

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\vec{v}$  stetiges Vektorfeld auf  $\Omega$ . Dann heißt  $\vec{v}$  konservativ  $:\Leftrightarrow \forall x^0, x^1 \in \Omega$  und für alle Kurven  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  von  $x^0$  nach  $x^1$  gilt:

$$\int_{\Gamma_1} \vec{v} d\vec{x} = \int_{\Gamma_2} \vec{v} d\vec{x}$$

**Bemerkung 8.1.2/8**

(1) äquivalent:

$$\int_{\Gamma} \vec{v} d\vec{x} = 0 \quad \text{für alle geschlossenen Kurven}$$

(2)  $\vec{v} = \text{grad } u \Rightarrow \vec{v}$  konservativ (Satz 8.1.2/5)(3) Gilt auch die Umkehrung von (2)? **todo: Antwort einfügen****Definition 8.1.2/9**

Eine offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *zusammenhängend* : $\Leftrightarrow$  für je zwei Punkte  $x^0$  und  $x^1$  *zusammenhängend* aus  $\Omega$  existiert ein Polygonzug *in*  $\Omega$  von  $x^0$  nach  $x^1$ .

Eine offene zusammenhängende Menge bezeichnet man als *Gebiet*. **todo: Abbildung zu Gebiet Gebieten einfügen**

**Satz 8.1.2/10**Für ein Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  und ein stetiges Vektorfeld  $\vec{v}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  gilt:(1) Für ein konservatives Vektorfeld  $\vec{v}$  existiert eine  $C^1(\Omega)$ -Abbildung  $u$ , sodass  $\vec{v} = \text{grad } u$ .Konservative Vektorfelder besitzen ein *Potential*.*Potential*(2) Die Abbildung  $u$  ist für ein konservatives Vektorfeld  $\vec{v}$  bis auf eine additive Konstante bestimmt.

$$\text{grad } u = \text{grad } \tilde{u} \Rightarrow u = \tilde{u} + \text{const}$$

In der Physik heißt  $-u$  *Potential* des Vektorfelds  $\vec{v}$ .*Potential*

BEWEIS:

(1) Wir halten  $x^0 \in \Omega$  fest und wählen  $x \in \Omega$  beliebig. Da  $\Omega$  ein Gebiet ist, findet man eine Kurve von  $x^0$  nach  $x$ . Sei  $\Gamma$  eine solche Kurve. Wir definieren  $u$  als

$$u(x) := \int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x}$$

Dies ist sinnvoll, da  $u$  unabhängig von  $\Gamma$  ist. Denn  $\vec{v}$  ist konservativ. Für alle  $x \in \Omega$  gibt es eine Kugel  $K_{\delta}(x) \subseteq \Omega$  und für  $|t| < \delta$  und  $t \neq 0$  gilt

$$\frac{1}{t}(u(x + t\vec{e}_j) - u(x)) = \frac{1}{t} \int_0^t \underbrace{\vec{v}(x + \tau\vec{e}_j)}_{\varphi(\tau)} \cdot \underbrace{\vec{e}_j}_{\varphi(\tau)} d\tau$$

$$= \frac{1}{t} \int_0^t v_j(x + \tau\vec{e}_j) d\tau$$

$$= v_j(x + s\vec{e}_j)$$

nach MWS der Int., wobei  $s \in (0, t)$ 

$$\xrightarrow{t \rightarrow 0} v_j(x)$$

## 8 Vektoranalysis, Integralsätze

Das heißt,  $\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = v_j(x)$ .

(2) hierzu die folgende Annahme:  $\text{grad } \tilde{u} = \text{grad } u = \vec{v}$ . Dann:

$$u(x) = \int_{\Gamma} \vec{v} dx \stackrel{\text{nach Satz 8.1.2/5}}{=} \tilde{u}(x) - \tilde{u}(x^0) \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \tilde{u}(x) - u(x) = -\tilde{u}(x^0) = \text{const.} \quad \blacksquare$$

### Folgerung 8.1.2/11

Teil (1) aus Satz 8.1.2/10 gilt auch für beliebige offene Mengen  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .

BEWEIS:

Zusammenhangskomponenten

Sei  $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ . Dann sind  $\Omega_k$  die Zusammenhangskomponenten von  $\Omega$  und damit  $\Omega_k \cap \Omega_j = \emptyset$  für  $j \neq k$ .  $\Omega_k$  ist ein Gebiet und man kann Satz 8.1.2/10 auf  $\Omega_k$  anwenden.  $\blacksquare$

### Lemma 8.1.2/12

Sei  $\vec{v}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^1$ -Vektorfeld und  $\Omega$  offen,  $\vec{v}$  konservativ. Dann gilt

$$\partial_j v_k = \partial_k v_j \quad \forall j, k = 1, \dots, n$$

Für  $n = 3$  bedeutet das:

$$(8.1) \quad \text{rot } \vec{v} = 0$$

BEWEIS:

Satz 8.1.2/10 + Folgerung 8.1.2/11  $\Rightarrow \vec{v} = \text{grad } u$ , d. h.  $\frac{\partial u}{\partial x_j}$  für  $j = 1, \dots, n$ . Es gilt  $u \in C^2(\Omega)$ , wegen der Definition des Gradienten.

Nach dem Satz von Schwarz gilt

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \quad \blacksquare$$

Die Umkehrung von Lemma 8.1.2/12 gilt im allgemeinen *nicht*.

### Beispiel 8.1.2/13

Sei  $n = 2$  und  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ist ein Gebiet. Betrachten wir

$$\begin{aligned} \vec{v}(x, y) &= \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \partial_1 v_2 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 - y^2)^2} \\ \partial_2 v_1 &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 - y^2)^2} \end{aligned}$$



Das heißt, es gilt [Gleichung 8.1](#). Aber wenn  $\Gamma$  der Einheitskreis ist, folgt  $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi]$ . Somit ist  $\vec{v}(x, y) = \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$  und es folgt, dass  $\int_{\Gamma} \vec{v} d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} dt = 2\pi \neq 0$ .

**Satz 8.1.2/14**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sternförmig, d. h.  $\exists x^0 \in \Omega \forall x \in \Omega \forall t \in (0, 1): x^0 + t(x - x^0) \in \Omega$ . Weiter sei  $\vec{v}$  ein  $C^1$ -Vektorfeld über  $\Omega$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1)  $\vec{v}$  ist konservativ.
- (2) Es gibt ein Potential  $u$ , so dass  $\vec{v} = \text{grad } u$  gilt.
- (3) Für alle  $j, k$  auf  $\Omega$  gilt:  $\partial_j v_k = \partial_k v_j$
- (4)  $\text{rot } \vec{v} = 0 \Leftrightarrow n = 3$

BEWEIS:

Es reicht zu zeigen, dass aus dem dritten Punkt der zweite folgt. Alle anderen wurden bereits in den vorangegangenen Beweisen gezeigt.

$$u(x) := \int_{[x^0 x]} \vec{v} d\vec{x} = \int_0^1 \vec{v}(x^0 + t(x - x^0))(x - x^0) dt$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} [\vec{v}(x^0 + t(x - x^0))(x - x^0)] dt$$

Im Kapitel [Abschnitt 8.2.1](#) findet sich eine Erklärung, warum hier das Gleichheitszeichen

## 8 Vektoranalysis, Integralsätze

gesetzt werden kann. Es gilt nun:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_j} [\vec{v}(x^0 + t(x - x^0))(x - x^0)] &= \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k=1}^n v_k(x^0 + t(x - x^0))(x - x^0) \\
 &= v_j(x^0 + t(x - x^0)) + \sum_{k=1}^n (x_k - x_k^0) \sum_{l=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_l}(x^0 + t(x - x^0)) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(x_l^0 + t(x_l - x_l^0))}_{\begin{cases} 0 & l \neq j \\ t & \text{sonst} \end{cases}} \\
 &= v_j(x^0 + t(x - x^0)) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_j}(x^0 + t(x - x^0)) t(x_k - x_k^0) \\
 &= v_j(x^0 + t(x - x^0)) + t \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_k}(x^0 + t(x - x^0))(x_k - x_k^0) \\
 &= \frac{d}{dt} [tv_j(x^0 + t(x - x^0))] \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j} = \int_0^1 \frac{d}{dt} [tv_j(x^0 + t(x - x^0))] dt \\
 &= v_j(x) - 0 = v_j(x) \quad \forall j \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

### Beispiel 8.1.2/15

Für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  sei  $\vec{v}(x) = \kappa(\|x\|) \frac{x}{\|x\|} = \kappa(r) \frac{x}{r}$  mit  $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  ein konservatives Vektorfeld. Ein typisches Beispiel dafür ist  $\kappa(r) = -\frac{mMG}{r^2}$ , wobei  $\kappa(r)$  stetig auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ist. Dabei sind  $m, M$  Massen und  $G$  die Gravitationskonstante. In dem Falle ist  $\vec{v}$  konservativ ( $\vec{v} = \text{grad } u(r)$ ). Denn  $\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r}$ :

$$\frac{\partial u(r)}{\partial x_j} = u'(r) \frac{x_j}{r} = \frac{\kappa(r)x_j}{r} \Rightarrow \text{grad } u(r) = \kappa(r) \frac{x_j}{r} = \vec{v}$$

### Bemerkung 8.1.2/16

[Satz 8.1.2/14](#) gilt auch für eine größere Klasse von Gebieten (aber nicht für alle Gebiete). Er ist auch für einfach zusammenhängende Gebiete wahr. Wobei ein einfach zusammenhängendes Gebiet dadurch charakterisiert ist, dass sich jede geschlossene Kurve in  $\Omega$  auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Somit hat  $\Omega$  keine „Löcher“.

### Bemerkung 8.1.2/17

Wie bestimmt man ein Potential?

$$(1) \quad u(x) = \int_{\Gamma} \vec{v} d\vec{x}$$

Beispiel:  $\vec{v}(x, y) = (2xy + y^2, x^2 + 2xy)$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,0)} \vec{v} d\vec{x} + \int_{(x,0)}^{(x,y)} \vec{v} d\vec{x} = \int_0^x \begin{bmatrix} 0 \\ t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt + \int_0^y \begin{bmatrix} 2xt + t^2 \\ x^2 + 2xt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt \\ &= 0 + \int_0^y (x^2 + 2xt) dt = x^2 y + xy^2 \end{aligned}$$

(2) Stammfunktion ermitteln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = v_1 \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = v_2 &\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 2xy \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2xy + c'(y) = x^2 + 2yx \Leftrightarrow c'(y) = 0 \Leftrightarrow c(y) = \text{const} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + y^2 &\Leftrightarrow u(x, y) = x^2 y + y^2 x + c(y) \Rightarrow u(x, y) = x^2 y + y^2 x + c \end{aligned}$$

### 8.1.3 Vektorpotentiale

#### Definition 8.1.3/1

Sei  $\vec{v}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein  $C^1$ -Vektorfeld,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  offen,  $\vec{w}$  ein  $C^2$ -Vektorfeld. Dann heißt  $\vec{w}$  genau dann *Vektorpotential* von  $\vec{v}$ , wenn  $\vec{v} = \text{rot } \vec{w}$ .

*Vektorpotential*

#### Bemerkung 8.1.3/2

(1) Notwendige Bedingung:  $\vec{v} = \text{rot } \vec{w} \Rightarrow \text{div } \vec{v} = \text{div}(\text{rot } \vec{w}) = 0$

(2) Wenn  $\vec{w}$  ein Vektorpotential von  $\vec{v}$  ist und  $\Phi \in C^2(\Omega)$ , dann ist  $\vec{w} + \text{grad } \Phi$  wieder ein Vektorpotential von  $\vec{v}$ . Denn es gilt,  $\text{rot}(\vec{w} + \text{grad } \Phi) = \text{rot}(\vec{w}) + \text{rot}(\text{grad } \Phi) = \vec{v} + 0 = \vec{v}$ .

(3) Sei  $\Omega$  sternförmig und  $\vec{w}, \vec{b}$  Vektorpotentiale von  $\vec{v}$ . Dann ist  $\text{rot}(\vec{w} - \vec{b}) = \text{rot}(\vec{w}) - \text{rot}(\vec{b}) = \vec{v} - \vec{v} = 0$ . Aus [Satz 8.1.2/14](#) folgt,  $\vec{w} - \vec{b} = \text{grad } \Phi$ .

#### Satz 8.1.3/3

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  sternförmig und  $\vec{v}$  ein  $C^1$ -Vektorfeld auf  $\Omega$ . Dann existiert genau dann ein Vektorpotential, wenn  $\text{div } \vec{v} = 0$  auf  $\Omega$ .

## 8 Vektoranalysis, Integralsätze

BEWEIS:

Wir zeigen für  $\Omega = \mathbb{R}^3$ :  $\operatorname{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow \exists \vec{w}$  mit  $\operatorname{rot}(\vec{w}) = \vec{v}$ .

$$w_1(x, y, z) := \int_0^z v_2(x, y, t) dt - \int_0^y v_3(x, t, 0) dt$$

$$w_2(x, y, z) := - \int_0^z v_1(x, y, t) dt$$

$$w_3(x, y, z) := 0$$

$$\Rightarrow \partial_2 w_3 - \partial_3 w_2 = -(-v_1(x, y, z)) = v_1(x, y, z)$$

$$\partial_3 w_1 - \partial_1 w_3 = v_2(x, y, z)$$

$$\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1 = - \int_0^z \partial_1 v_1(x, y, t) dt - \int_0^z \partial_2 v_2(x, y, t) dt + v_3(x, y, 0)$$

Nebenrechnung: Da  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  gilt:  $-\partial_1 v_1 - \partial_2 v_2 = \partial_3 v_3 \Rightarrow \int_0^z \partial_3 v_3(x, y, t) dt + v_3(x, y, 0) = v_3(x, y, t)|_{t=0}^z + v_3(x, y, 0) = v_3(x, y, z) \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{w} = \vec{v}$  ■

## 8.2 Integralsätze

### 8.2.1 Die Greensche Formel im $\mathbb{R}^2$

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, einen Zusammenhang zwischen dem Flächenintegral und dem Kurvenintegral herzustellen:

Sei  $B \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega$  offen,  $B$  kompakt,  $\vec{v}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein  $C^1$ -Vektorfeld:

$$\Rightarrow \int_B (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) dx = \int_{\partial B} \vec{v} d\vec{x}$$

#### Lemma 8.2.1/1

Sei  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen,  $(x, t) \in G$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $\exists \frac{\partial f}{\partial t}$  stetig auf  $G$ ,  $B \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und jordanmessbar<sup>3</sup>,  $B \times [\alpha, \beta] \subset G$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt} \int_B f(x, t) dx}_{=: F(t)} = \int_B \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$$

<sup>3</sup>Die Funktion  $f$  ist über  $B$  integrierbar.

BEWEIS:

$$(8.2) \quad \left| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - \int_B \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx \right| \leq \int_B \underbrace{\left| \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right|}_{\frac{\partial f}{\partial x}(x, t+\theta h) \text{ mit } 0 < \theta < 1} dx$$

$$(8.3) \quad \leq \int_B \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t+\theta h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right|}_{\leq \varepsilon \text{ falls } |h| \leq \delta(\varepsilon)} dx \leq \varepsilon \mu(B)$$

Die Folgerung in [Gleichung 8.2](#) ergibt sich nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung und [Gleichung 8.3](#) folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit. ■

**Folgerung 8.2.1/2**Für  $n = 1$  im obigen Lemma folgt:

$$\frac{d}{dt} \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x, t) dx = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx + f(\psi(t), t) \dot{\psi}(t) - f(\varphi(t), t) \dot{\varphi}(t)$$

BEWEIS:

Mittels der Hilfsfunktion:  $F(u, v, t) := \int_u^v f(x, t) dx$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x, t) dx &= \frac{d}{dt} F(\varphi(t), \psi(t), t) \\ &= \frac{\partial F}{\partial u}(\varphi(t), \psi(t), t) \dot{\varphi}(t) + \frac{\partial F}{\partial v}(\varphi(t), \psi(t), t) \dot{\psi}(t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\varphi(t), \psi(t), t) \\ &= -f(\varphi(t), t) \dot{\varphi}(t) + f(\psi(t), t) \dot{\psi}(t) + \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dt \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Wir betrachten nun einen Normalbereich  $B \subset \mathbb{R}^2$ . Es gilt,  $B = \{(x_1, x_2) : a \leq x_1 \leq b \vee \varphi(x_1) \leq x_2 \leq \psi(x_1)\}$ , wobei  $\varphi, \psi : [a, b]$  stetig differenzierbar sind. Für den Rand von  $B$  gilt  $\partial B = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ . Die Orientierung ist in mathematisch positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn). Wir schreiben:

$$\begin{aligned} \Gamma: \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad t \in [a, b] \\ \int_{\Gamma} \vec{v} d\vec{x} &= \int_a^b v_1(x_1(t), x_2(t)) \underbrace{\dot{x}_1(t) dt}_{dx_1} + \int_a^b v_2(x_1(t), x_2(t)) \underbrace{\dot{x}_2(t) dt}_{dx_2} \\ &\Rightarrow \int_{\Gamma} \vec{v} d\vec{x} = \int_{\Gamma} v_1 dx_1 + \int_{\Gamma} v_2 dx_2 \end{aligned}$$

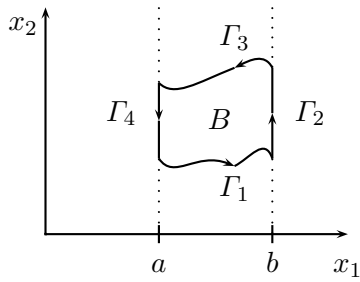


Abbildung 8.3: Normalbereich im  $\mathbb{R}^2$

**Satz 8.2.1/3**

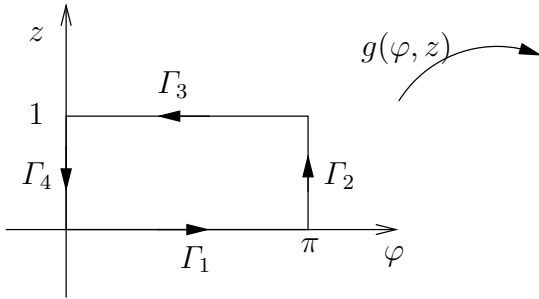
Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  offen,  $B \subset \Omega$  ein Normalbereich und  $\vec{v}$  ein  $C^1$ -Vektorfeld auf  $\Omega$ . Dann gilt:

$$\int_B (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) dx = \int_{\partial B} \vec{v} d\vec{x}$$

BEWEIS:

Nach dem Satz von Fubini für Normalbereiche gilt:

$$\begin{aligned} \int_B \partial_1 v_2 dx &= \int_a^b \left( \int_{\varphi(x_1)}^{\psi(x_1)} \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_a^b \left( \frac{d}{dx_1} \int_{\varphi(x_1)}^{\psi(x_1)} v_2(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 + \int_a^b v_2(x_1, \varphi(x_1)) \dot{\varphi}(x_1) dx_1 \\ &\quad - \int_a^b v_2(x_1, \psi(x_1)) \dot{\psi}(x_1) dx_1 \\ &= \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} v_2(b, x_2) dx_2 - \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} v_2(a, x_2) dx_2 + \int_{\Gamma_1} v_2 dx_2 + \int_{\Gamma_3} v_2 dx_2 \\ &= \int_{\Gamma_2} v_2 dx_2 + \int_{\Gamma_4} v_2 dx_2 + \int_{\Gamma_1} v_2 dx_2 + \int_{\Gamma_3} v_2 dx_2 = \int_{\partial B} v_2 dx_2 \end{aligned}$$



der, Höhe 1, radius 1

todo: gnuplot-Bild mit einem halben Zylinder

Abbildung 8.4: Abbildung des Normalbereichs auf die Zylindermantelfläche

Außerdem ist:

$$\begin{aligned}
 - \int_B \partial_2 v_1 dx &= \int_a^b \left( \int_{\varphi(x_1)}^{\psi(x_1)} \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 \\
 &= - \int_a^b v_1(x_1, \psi(x_1)) dx_1 + \int_a^b v_1(x_1, \varphi(x_1)) dx_1 = \int_{\Gamma_3} v_1 dx_1 + \int_{\Gamma_1} v_1 dx_1
 \end{aligned}$$

Der letzte Schluss ergibt sich daraus, dass  $\int_{\Gamma_2} v_1 dx_1 = \int_{\Gamma_4} v_1 dx_1 = 0$  ist. ■

#### Bemerkung 8.2.1/4

- [Satz 8.2.1/3](#) gilt auch für allgemeinere Gebiete. Dabei reicht es, wenn  $\varphi$  und  $\psi$  nur stückweise differenzierbar sind.
- Der Flächeninhalt kann als Kurvenintegral über den Rand der Flächen interpretiert werden:

$$\begin{aligned}
 \vec{v} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} &\Rightarrow \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 = 2 \Rightarrow 2 \int_B dx = \int_{\partial B} \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mu(B) \\
 \mu(B) &= 1/2 \int_{\partial B} (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)
 \end{aligned}$$

#### 8.2.2 Der Satz von Stokes (im $\mathbb{R}^3$ )

$$\int_S \text{rot } \vec{v} d\vec{s} = \int_{\partial S} \vec{v} d\vec{x} \left( = \int_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} ds \right)$$

**Beispiel 8.2.2/1 (Zylindermantel)**

$$S: \left. \begin{array}{l} x_1 = \cos \varphi \\ x_2 = \sin \varphi \\ x_3 = z \end{array} \right\} x = g(\varphi, z) \quad \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq z \leq 1 \end{array}$$

$B$  ist ein Normalbereich. Der Rand des Normalbereichs ist  $\partial B = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ . Der Rand von  $S$  ist  $\partial S = g(\Gamma_1) + g(\Gamma_2) + g(\Gamma_3) + g(\Gamma_4)$ .

Der Normalenvektor auf  $S$  ist

$$\vec{n} = \frac{g_\varphi \times g_z}{\|g_\varphi \times g_z\|} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad g_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g_3}{\partial \varphi} \end{bmatrix}, g_z = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial z} \\ \frac{\partial g_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{k}: \int_S \vec{k} d\vec{S} &= \int_B \vec{k}(g(\varphi, z)) \cdot g_\varphi \times g_z d(\varphi, z) \\ &= \int_B \vec{k}(g(\varphi, z)) \cdot \vec{n}(\varphi, z) \underbrace{\|g_\varphi \times g_z\|}_{=1} d(\varphi, z) \\ &= \int_S \vec{k} \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

**Bemerkung 8.2.2/2**

(vergleiche mit Definition 7.3.1/3) Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  ein offenes Gebiet und  $g: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine stetig differenzierbare Abbildung. Die Teilmenge  $B \subseteq G$  sei kompakt und Jordan-messbar (z. B. Normalbereich)

- (1)  $S := g(B) = \{g(u, v) : (u, v) \in B\}$   
 ( $S, g$ ) ist eine *kompakte Fläche*  $:\Leftrightarrow \exists N \subseteq B$  *Jordansche Nullmenge*<sup>4</sup> mit
- (a)  $g$  injektiv auf  $B \setminus N$  und
  - (b)  $g$  ist regulär auf  $B \setminus N$ , d. h. der Rang auf  $B \setminus N$  ist

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \\ \frac{\partial g_3}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial v} \end{bmatrix} = 2$$

(oder anders:  $g_u \times g_v \neq 0$  auf  $B \setminus N$ )

<sup>4</sup>Eine Menge  $J \subset \mathbb{R}^n$  heißt Jordansche Nullmenge im  $\mathbb{R}^n$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  endlich viele Quader  $Q_k$  gibt, so dass  $J \subset \bigcup_{k=1}^N Q_k$  und  $\sum_{k=1}^N |Q_k| < \varepsilon$  ist.

*kompakte Fläche*  
*Jordansche*  
*Nullmenge*



(2)  $(S, g)$  kompakte Fläche

$$g_u := \begin{bmatrix} \partial_u g_1 \\ \partial_u g_2 \\ \partial_u g_3 \end{bmatrix}, g_v := \begin{bmatrix} \partial_v g_1 \\ \partial_v g_2 \\ \partial_v g_3 \end{bmatrix}, \vec{n} := \frac{g_u \times g_v}{\|g_u \times g_v\|}$$

auf  $B \setminus N$  Normalenvektor

**Definition 8.2.2/3**

Sei  $(S, g)$  eine kompakte Fläche wie oben,  $B$  ein Normalbereich mit Rand  $\partial B = \Gamma$  orientiert wie in [Abschnitt 8.2.1](#) („ $B$  links von  $\partial B$ “). Dann heißt  $g(\Gamma) = g(\partial S)$  *Rand* von  $S$ . Bezeichnung  $\partial S = g(\partial B)$ .

**Bemerkung 8.2.2/4 (Parametrisierung von  $\partial S$ )**

(1)

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \\ x_2 &= g_2(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \\ x_3 &= g_3(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \end{aligned}$$

wobei  $\varphi: [a, b] \rightarrow \partial B$  und  $a \leq t \leq b$  Parametrisierung von  $\partial B$ .

(2) Beispiel Kugeloberfläche

$$\begin{aligned} g: x_1 &= r \cos \varphi \sin \theta & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ x_2 &= r \sin \varphi \sin \theta & 0 \leq \theta \leq \pi \\ x_3 &= r \cos \theta \end{aligned}$$

$S$  nennt man eine *Fläche ohne Rand* oder auch *geschlossene Fläche*.

*Fläche ohne Rand  
geschlossene Fläche*

Ist  $S$  eine geschlossene Fläche, dann erhält man für das Randintegral  $\int_{\partial S} \vec{K} d\vec{x} = 0$ .

**Satz 8.2.2/5 (Satz von Stokes)**

Sei  $S = g(B)$  eine kompakte Fläche. Der Rand von  $S$  sei definiert als  $\partial S = g(\partial B)$ . Wir betrachten ein  $C^1$ -Vektorfeld  $\vec{v}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  auf einem offenen Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  und  $S \subseteq \Omega$ .

Dann gilt:

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{v} d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{v} d\vec{x}$$

BEWEIS:

Zurückführung auf die Greensche Formel aus [Satz 8.2.1/3](#)

(1)

$$\int_{\partial S} \vec{v} d\vec{x} = \sum_{j=1}^4 \int_{g(\Gamma_j)} \vec{v} d\vec{x} \quad \Gamma_j: [a, b] \rightarrow (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \text{ stetig differenzierbar}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{g(\Gamma_j)} \vec{v} d\vec{x} &= \int_a^b \vec{v}(g(\varphi(t))) \frac{d}{dt}(g(\varphi(t))) dt \\ &= \int_a^b \sum_{l=1}^3 v_l(g(\varphi(t))) (\partial_u g_l(\varphi(t)) \dot{\varphi}_1(t) + \partial_v g_l(\varphi(t)) \dot{\varphi}_2(t)) dt \\ &= \int_a^b \underbrace{\sum_{l=1}^3 v_l(g(\varphi(t))) \partial_u g_l(\varphi(t)) \dot{\varphi}_1(t)}_{=: w_1(\varphi(t))} + \int_a^b \underbrace{\sum_{l=1}^3 v_l(g(\varphi(t))) \partial_v g_l(\varphi(t)) \dot{\varphi}_2(t)}_{=: w_2(\varphi(t))} dt \\ &= \int_a^b \vec{w}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) dt = \int_{\Gamma_j} (w_1 du + w_2 dv) \end{aligned}$$

ist das Kurvenintegral von  $\vec{w}$  längs  $\Gamma_j$ .

Mit  $w_1 := \sum_{l=1}^3 v_l(g(u, v)) \partial_u g_l(u, v)$  und  $w_2 := \sum_{l=1}^3 v_l(g(u, v)) \partial_v g_l(u, v)$  und  $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1(u, v) \\ w_2(u, v) \end{bmatrix} : G \rightarrow \mathbb{R}^2$   $C^1$ -Vektorfeld

Satz 8.2.1/3 liefert

$$(8.4) \quad \int_{\partial S} \vec{v} d\vec{x} = \int_{\Gamma=\partial B} (w_1 du + w_2 dv) = \int_B \partial_u w_2 - \partial_v w_1 d(u, v)$$

(2)

$$\int_S \text{rot } \vec{v} d\vec{S} = \int_B \underbrace{\text{rot } \vec{v}(g(u, v)) \cdot (g_u \times g_v)(u, v)}_{=: f(u, v) = \partial_u w_2 - \partial_v w_1} d(u, v)$$

Es gilt:

$$(8.5) \quad \partial_u w_2 - \partial_v w_1 = \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_l}{\partial x_j}(g(u, v)) (\partial_u g_j(u, v) \partial_v g_l(u, v) - \partial_v g_j \partial_u g_l)$$

Andererseits ist:

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \operatorname{rot} \vec{v}(g(u, v)) \cdot g_u \times g_v \\ &= (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2)(g(u, v))(\partial_u g_2 \partial_v g_3 - \partial_v g_2 \partial_u g_3) + \dots + \dots \end{aligned}$$

Dieses stimmt mit dem Ausdruck in [Gleichung 8.5](#) überein. ■

### Bemerkung 8.2.2/6

(1)

$$\int_{\partial S} \vec{v} d\vec{x} = \int_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

(2) Das Integral einer geschlossenen Fläche  $S$  ist 0

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0$$

(3) Für eine Fläche  $S \subseteq \mathbb{R}^2 \times \{0\}$  und ein  $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1(x_1, x_2) \\ v_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$  ergibt sich genau die *Greensche Formel* ([Satz 8.2.1/3](#)). Die Greensche Formel ist also ein Spezialfall des Stokes'schen Satzes ([Satz 8.2.2/5](#)). *Greensche Formel*

### 8.2.3 Der Satz von Gauß-Ostrogradski – „Divergenzsatz“

#### Bemerkung 8.2.3/1

Wir betrachten  $n = 2$ . Es sei also  $B$  ein Normalbereich und  $\vec{n}$  sei der äußere Normaleinheitsvektor. Wir definieren wieder ein  $C^1$ -Vektorfeld  $\vec{v}: G \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $B \subseteq G$  offen. Wir wollen uns dann überlegen, dass

$$\int_B \operatorname{div} \vec{v} dx = \int_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n} ds$$

( $ds$  ist das skalare Linienelement)

Abbildung 8.5: **todo: Bild**

help: Wie sieht das aus?

BEWEIS:

$$\vec{w} := \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = \partial_1 w_2 - \partial_2 w_1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int_B \operatorname{div} \vec{v} \, dx &= \int_B \partial_1 w_2 - \partial_2 w_1 \, dx = \int_{\partial B} \vec{w} \, dx && \text{nach Satz 8.2.1/3} \\ &= \int_a^b v_1(\varphi(t)) \dot{\varphi}_2(t) - v_2(\varphi(t)) \dot{\varphi}_1(t) \, dt \\ &= \int_a^b \vec{v}(\varphi(t)) \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_2(t) \\ -\dot{\varphi}_1(t) \end{bmatrix}}_{=\vec{n}(\varphi(t)) \cdot \|\dot{\varphi}(t)\|} \, dt = \int_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Bemerkung 8.2.3/2**

Wir setzen im folgenden voraus:

$$G = \{(x_1, x_2) : a \leq x_1 \leq b, \varphi(x_1) \leq x_2 \leq \psi(x_1)\}$$

wobei  $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar.  $G \subseteq U$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $g, h: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g, h \in C^1(U)$

$$B := \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in G, g(x_1, x_2) \leq x_3 \leq h(x_1, x_2)\}$$

Normalbereich im  $\mathbb{R}^3$  (Jordan-messbar)**Bemerkung 8.2.3/3**

Parametrisierung:

- (1) Wir betrachten zuerst den Normalbereich  $G$  in der Ebene (s. [Abbildung 8.5](#)). Der Rand  $\partial G$  setzt sich aus bis zu vier Teilkurven ( $\Gamma_2$  und  $\Gamma_4$  können zu einem Punkt entarten) zusammen.  $\partial G = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ .  $\Gamma_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \varphi(x_1) \end{bmatrix}$ ,  $a \leq x_1 \leq b$ . Der Normalenvektor an  $\varphi$  ist

$$\vec{v}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi'(x_1))^2}} \begin{bmatrix} \varphi'(x_1) \\ -1 \end{bmatrix}$$

analog:  $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$

- (2) Der Normalbereich  $B$  ist ein säulenförmiger Körper im  $\mathbb{R}^3$  dessen Querschnitt  $G$  ist. Der Rand  $\partial B$  von  $B$  sind 6 Flächen. Bezeichnen wir den Boden mit  $S^u$ , den Deckel mit  $S^o$  und die verbleibenden Flächen mit  $S^1 \dots S^4$ .

$$\partial B = S^u + S^o + S^1 + S^2 + S^3 + S^4$$

Die Normalenvektoren  $\vec{n}^u, \vec{n}^o, \vec{n}^1, \dots, \vec{n}^4$  der Flächen müssen jeweils so orientiert werden, dass sie nach außen (vom Körper weg) zeigen.

$$S^o: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ h(x_1, x_2) \end{bmatrix}, (x_1, x_2) \in G$$

$$\vec{n}^o = \frac{1}{\sqrt{1 + \partial_1 h^2 + \partial_2 h^2}} \begin{bmatrix} -\partial_1 h \\ \partial_2 h \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{n}^o dS = \begin{bmatrix} -\partial_1 h \\ -\partial_2 h \\ 1 \end{bmatrix} d(x_1, x_2) \quad (\text{Oberflächenelement})$$

$$-S^u: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ g(x_1, x_2) \end{bmatrix}, (x_1, x_2) \in G$$

$$\vec{n}^u dS = \begin{bmatrix} -\partial_1 g \\ -\partial_2 g \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Oberflächenelement})$$

$$S^1: \begin{bmatrix} x_1 \\ \varphi(x_1) \\ x_3 \end{bmatrix}, a \leq x_1 \leq b$$

Wir erhalten für  $S^1$  in der  $x_1$ - $x_3$ -Ebene einen Normalbereich

$$A := \{(x_1, x_3) : a \leq x_1 \leq b, g(x_1, \varphi(x_1)) \leq x_3 \leq h(x_1, \varphi(x_1))\}$$

$$\text{Das Oberflächenelement } \vec{n} dS = \begin{bmatrix} \varphi'(x_1) \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} d(x_1, x_3)$$

analog:  $S^2, S^3$  und  $S^4$ .

**Satz 8.2.3/4 (Gauß für  $n = 3$ )**

Sei  $B$  Normalbereich,  $\partial B$  Rand,  $\vec{n}$  äußerer Normaleneinheitsvektor an  $\partial B$ ,  $B \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $\Omega$  offen,  $\vec{v}$  ein  $C^1$ -Vektorfeld auf  $\Omega$ .

Dann gilt:

$$\int_B \operatorname{div} \vec{v} dx = \int_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

8 Vektoranalysis, Integralsätze

BEWEIS:  $\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$   
 Sei  $\vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ . Es reicht, zu zeigen

$$\int_B \operatorname{div} \vec{v} \, dx = \int_B \sum_{l=1}^3 \partial_l v_l \, dx = \int_{\partial B} v_l n_l \, dS$$

Wir brauchen also nur zu zeigen, dass die Gleichheit für jeweils einen Summanden gilt. Sei o. B. d. A.  $l = 1$ . Dann ist

$$\int_B \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \, dx = \int_G \underbrace{\left( \int_{g(x_1, x_2)}^{h(x_1, x_2)} \frac{\partial}{\partial x_1} v_1(x_1, x_2, x_3) \right)}_{=: f(x_1, x_2)} d(x_1, x_2)$$

Aus Lemma 8.2.1/1 folgt mit  $F(u, v, x_1, x_2) := \int_u v_1(x_1, x_2, x_3) \, dx_3$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{g(x_1, x_2)}^{h(x_1, x_2)} v_1(x_1, x_2, x_3) \, dx_3 &= -v_1(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) \partial_1 g \\ &+ v_1(x_1, x_2, h(x_1, x_2)) \partial_1 h + \underbrace{\int_{g(x_1, x_2)}^{h(x_1, x_2)} \frac{\partial}{\partial x_1} v_1(x_1, x_2, x_3) \, dx_3}_{=: f(x_1, x_2)} \end{aligned}$$

einsetzen:

$$\begin{aligned} \int_B \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \, dx &= \int_G v_1(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) \partial_1 g(x_1, x_2) d(x_1, x_2) \\ &- \int_G v_1(x_1, x_2, h(x_1, x_2)) \partial_1 h(x_1, x_2) d(x_1, x_2) \\ &+ \int_G \frac{\partial}{\partial x_1} \underbrace{\int_{g(x_1, x_2)}^{h(x_1, x_2)} v_1(x) \, dx_3}_{=: w_1(x_1, x_2)} d(x_1, x_2) \\ &= \int_{S^u} v_1 n_1^u \, dS - \int_{S^o} v_1 n_1^o \, dS + \int_G \partial_1 w_1 d(x_1, x_2) \\ &= \int_{S^u + S^o} v_1 n_1^u \, dS + \int_G \partial_1 w_1 d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Nach [Bemerkung 8.2.3/1](#) (Gauß für  $n = 2$ ) gilt:

$$\int_G \partial_1 w_1 d(x_1, x_2) = \int_{\partial G} w_1 \cdot \nu_1 dS$$

wir zeigen:

$$\int_{\partial G} w_1 \cdot \nu_1 dS = \int_{S^1 + \dots + S^4} v_1 \cdot n_1 dS$$

Es ist:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} w_1 \cdot \nu_1 dS &= \int_a^b w_1(x_1, \varphi(x_1)) \cdot \varphi'(x_1) dx_1 = \int_a^b \int_{g(x_1, x_2)}^{h(x_1, x_2)} v_1(x_1, \varphi(x_1), x_3) dx_3 \varphi'(x_1) dx_1 \\ &= \int_A v_1(x_1, \varphi(x_1), x_3) \varphi'(x_1) d(x_1, x_3) = \int_{S^1} v_1 n_1 dS \end{aligned}$$

analog zeigt man  $\int_{\Gamma_i} w_i \nu_i dS = \int_{S^i} v_i n_i dS$  für  $i = 2, 3, 4$  ■

### Bemerkung 8.2.3/5

- (1) Der [Satz 8.2.3/4](#) gilt für alle  $n \geq 2$  und für allgemeine Bereiche  $B$ !
- (2) Als einen *zulässigen Bereich* bezeichnen wir einen Bereich, für den der Gauß'sche *zulässigen Bereich* Satz ([Satz 8.2.3/4](#)) gilt
- (3) Für  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$  ist  $\operatorname{div} \vec{v} = 1$  und es folgt:

$$\underbrace{\int_B dx}_{=\mu(B)} = \int_{\partial B} x_3 \cdot n_3 dS = \frac{1}{3} \int_{\partial B} x \cdot \vec{n} dS$$

Dabei ist  $\mu(B)$  das Volumen des Körpers

### Satz 8.2.3/6 (Die Green'schen Sätze)

Es sei  $B \subseteq \Omega$  ein zulässiger Bereich in einer offenen Menge  $\Omega$ .  $u, v \in C^2(\Omega)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_B u \Delta v dx &= \int_{\partial B} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} dS - \int_B \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v dx \\ \int_B (u \Delta v - v \Delta u) dx &= \int_{\partial B} u \cdot \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS \end{aligned}$$

BEWEIS:

Die zweite Gleichung folgt sofort aus der ersten, indem man einmal  $u$  und  $v$  vertauscht und die beiden von einander anzieht.

Die erste Gleichung ergibt sich durch Anwendung des Satz von Gauß (Satz 8.2.3/4) auf das Vektorfeld  $\vec{w} := u \operatorname{grad} v \Rightarrow \operatorname{div} \vec{w} = u \Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v$  ■

## 8.3 Ergänzungen

### 8.3.1 Flächenintegrale im $\mathbb{R}^n$ und die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$

Bisher hatten wir für Flächen im  $\mathbb{R}^3$  die folgenden Definitionen getroffen:

- $S = g(B)$  mit  $B \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^2$ , wobei  $B$  eine kompakte Menge und  $G$  eine offene Menge ist, und der  $C^1$ -Abbildung  $g: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ , wobei  $g$  injektiv auf  $B \setminus N$  (Jordansche Nullmenge)

$$\operatorname{Rang} Dg = \operatorname{Rang} \begin{bmatrix} \partial_u g_1 & \partial_v g_1 \\ \partial_u g_2 & \partial_v g_2 \\ \partial_u g_3 & \partial_v g_3 \end{bmatrix} = 2 \text{ auf } B \setminus N$$

•

$$\begin{aligned} dS &= \|g_u \times g_v\| d(u, v) && \text{Oberflächenelement} \\ &= \sqrt{\begin{vmatrix} g_u \cdot g_u & g_u \cdot g_v \\ g_u \cdot g_v & g_v \cdot g_v \end{vmatrix}} d(u, v) && \text{Lemma 7.3.2/3} \end{aligned}$$

$$\int_S F dS := \int_B F(g(u, v)) \sqrt{\begin{vmatrix} g_u \cdot g_u & g_u \cdot g_v \\ g_u \cdot g_v & g_v \cdot g_v \end{vmatrix}} d(u, v)$$

in expliziter Darstellung  $S = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in B\}$

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2} d(x_1, x_2) \\ \vec{n} &= \frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix} g_u \cdot g_u & g_u \cdot g_v \\ g_u \cdot g_v & g_v \cdot g_v \end{vmatrix}}} \begin{bmatrix} -f_{x_1} \\ -f_{x_2} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Jetzt wollen wir  $m$ -Flächen im  $\mathbb{R}^n$  mit  $m < n$  beschreiben.  $S = g(B)$  mit  $B \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^m$  ( $G$  ist dabei eine offene Menge und  $B$  ein Normalbereich)  $g: G \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -Abbildung, injektiv,  $\text{Rang } Dg = m$

$$dS := \sqrt{\det(g_{ik})} d(u_1, \dots, u_m)$$

wobei

$$g_{ik} = \left\langle \frac{\partial g}{\partial u_i}, \frac{\partial g}{\partial u_k} \right\rangle \quad i, k = 1, \dots, m$$

Damit können wir das Integral über eine  $m$ -Fläche  $S$  erklären:

$$\int_S F dS = \int_B F(g(u_1, \dots, u_m)) \sqrt{\det(g_{ik})} d(u_1, \dots, u_m)$$

Für den Fall  $m = n - 1$  spricht man von einer  $(n - 1)$ -dimensionale *Hyperfläche*. Dieser Fall tritt z. B. auf, wenn man den Rand  $S = \partial\Omega$  eines Normalbereichs  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  betrachtet. Oder für den Fall, dass die Fläche eine explizite Darstellung  $S = \{x: x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}, f(x') = x_n\}$  erhält man

*Hyperfläche*

$$dS = \sqrt{1 + f_{x_1}^2 + \dots + f_{x_{n-1}}^2} d(x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$\vec{n} := \frac{1}{\sqrt{\dots}} \begin{bmatrix} -f_{x_1} \\ -f_{x_2} \\ \vdots \\ -f_{x_{n-1}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{äußerer Normalenvektor}$$

$$\int_S F dS = \int_B F(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})) \sqrt{\dots} d(x_1, \dots, x_{n-1})$$

Der Satz von Gauß (Satz 8.2.3/4) und alle Folgerungen daraus lassen sich auch für den  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinern.  $\vec{v}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \Omega$  Normalbereich

$$\int_{\Omega} \text{div } \vec{v} dx = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle dS$$

**Die Oberfläche der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$** 

Die Oberfläche der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$  wurde beschrieben mit  $\omega_n := \{x: x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ . Wir führen dazu die Polarkoordinaten im  $\mathbb{R}^n$  ein

$$\begin{aligned}\Phi: \quad x_1 &= r \cos \varphi \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \\ x_2 &= r \sin \varphi \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \\ x_3 &= r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r \cos \theta_{n-3} \sin \theta_{n-2} \\ x_n &= r \cos \theta_{n-2}\end{aligned}$$

wobei  $r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi$ . Daraus ergibt sich  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = r^2$ . Für Beweise und weitere Ausführungen siehe Walter, Analysis 2, Seite 254.

Noch ein paar Worte zur Jacobi-Determinante:

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})} = r^{n-1} \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^{n-2} \theta_{n-2}$$

Auf die Einheitskugel bezogen ergibt sich so das Oberflächenelement als

$$\begin{aligned}d\omega_n &= \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^{n-2} \theta_{n-2} d\varphi d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} \\ \int_{\omega_n} F d\omega_n &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} F(\Phi(1, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})) \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{n-2} d\varphi d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} \\ |\omega_n| &:= \int_{\omega_n} 1 d\omega_n \quad \text{Flächeninhalt von } \omega_n\end{aligned}$$

Folgerungen daraus:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} F dx &= \int_0^\infty \int_{\omega_n} r^{n-1} F(\Phi(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})) d\omega_n dr \\ \tilde{f} = f(r), r = \|x\| &\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f} dx = |\omega_n| \int_0^\infty r^{n-1} f(r) dr\end{aligned}$$

**Satz 8.3.1/1**

$n \geq 2$ . Dann gilt:

$$|\omega_n| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} = 2\pi^{n/2} \begin{cases} \frac{1}{(\frac{n}{2}-1)!} & : n \text{ gerade} \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)\dots\frac{1}{2}} & : n \text{ ungerade} \end{cases}$$

*Gammafunktion*

Dabei ist  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$  für  $x > 0$  die *Gammafunktion*. Es gilt  $\Gamma(x+1) = \Gamma(x) \cdot x$ .

BEWEIS:

Aus Analysis 2 wissen wir bereits

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \pi^{\frac{n}{2}} &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right)^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx \end{aligned} \quad \text{nach Satz von Fubini}$$

$$\begin{aligned} |\omega_n| \int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-r^2} dr &= \frac{1}{2} |\omega_n| \int_0^{\infty} e^{-\rho} \rho^{\frac{n}{2}-1} d\rho \quad \text{mit } r^2 = \rho, 2r dr = d\rho \\ &= \frac{1}{2} |\omega_n| \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$  Außerdem ist  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ , da

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr \quad \blacksquare$$

### Bemerkung 8.3.1/2

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\omega_n| = 0$

(2)  $|\omega_2| = 2\pi, |\omega_3| = 4\pi, |\omega_4| = 2\pi^2, |\omega_5| = \frac{8}{3}\pi^2, |\omega_6| = \pi^3, |\omega_7| = \frac{16}{15}\pi^3 = \max_n |\omega_n|$

### 8.3.2 Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Für  $n = 3$  betrachten wir *krummlinige Koordinaten* auf  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  mit  $\Omega$  offen:  $g: G \rightarrow \Omega$  bijektive  $C^1$ -Abbildung (*Diffeomorphismus*), d. h.  $x = g_1(u, v, w), y = g_2(u, v, w), z = g_3(u, v, w)$

*krummlinige  
Koordinaten  
Diffeomorphismus*

setzen:

$$\partial_u g = \begin{bmatrix} \partial_u g_1 \\ \partial_u g_2 \\ \partial_u g_3 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_u = \frac{1}{\|\partial_u g\|} \partial_u g$$

analog:  $\partial_v g, \vec{e}_v, \partial_w g, \vec{e}_w$

8 Vektoranalysis, Integralsätze

mit:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} > 0 \text{ auf } G$$

Schreibweise:  $h_u := \|\partial_u g\|, h_v := \|\partial_v g\|, h_w := \|\partial_w g\|$

*orthogonal*

Die Koordinaten  $(u, v, w)$  (wie oben) heißen *orthogonal*  $:\Leftrightarrow$

$$\forall u, v, w: \langle \partial_u g, \partial_v g \rangle = 0, \langle \partial_u g, \partial_w g \rangle = 0, \langle \partial_v g, \partial_w g \rangle = 0$$

*Orthonormalsystem*

dann bilden  $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$  ein *Orthonormalsystem* im  $\mathbb{R}^3$ .

**Satz 8.3.2/1**

Für ein skalares Feld  $f = f(u, v, w)$  bezüglich der Koordinaten  $(u, v, w)$  und ein Vektorfeld  $\vec{F} = F_u \vec{e}_u + F_v \vec{e}_v + F_w \vec{e}_w$  ebenfalls bezüglich der Koordinaten  $(u, v, w)$  gilt:

$$(8.6) \quad \text{grad } f = \frac{1}{h_u} \partial_u f \vec{e}_u + \frac{1}{h_v} \partial_v f \vec{e}_v + \frac{1}{h_w} \partial_w f \vec{e}_w$$

$$(8.7) \quad \text{div } \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} (\partial_u (h_v h_w F_u) + \partial_v (h_u h_w F_v) + \partial_w (h_u h_v F_w))$$

$$(8.8) \quad \Delta f = \text{div grad } f = \frac{1}{h_u h_v h_w} (\partial_u (\frac{h_v h_w}{h_u} \partial_u f) + \partial_v (\frac{h_u h_w}{h_v} \partial_v f) + \partial_w (\frac{h_u h_v}{h_w} \partial_w f))$$

$$\text{rot } \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{bmatrix} h_u \vec{e}_u & \partial_u & h_u F_u \\ h_v \vec{e}_v & \partial_v & h_v F_v \\ h_w \vec{e}_w & \partial_w & h_w F_w \end{bmatrix} \quad \text{formal!}$$

BEWEIS:

zur [Gleichung 8.6](#):  $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w\}$  ist ein Orthonormalsystem. Es ist also zu zeigen, dass

$$\frac{1}{h_u} \partial_u f = \langle (\text{grad } f), \vec{e}_u \rangle, \dots$$

Da  $g$  bijektiv ist, gelten die folgenden Beziehungen:

$$f(u, v, w) = f(g^{-1}(x, y, z)) =: \tilde{f}(x, y, z) = \tilde{f}(g(u, v, w))$$

und wir erhalten dann

$$\text{grad } f = \text{grad } \tilde{f} = \begin{bmatrix} \partial_x \tilde{f} \\ \partial_y \tilde{f} \\ \partial_z \tilde{f} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle (\text{grad } f), \vec{e}_u \rangle &= \frac{1}{h_u} (\partial_x \tilde{f} \partial_u g_1 + \partial_y \tilde{f} \partial_u g_2 + \partial_z \tilde{f} \partial_u g_3) \\ &= \frac{1}{h_u} \partial_u f(u, v, w) \end{aligned}$$

mit Kettenregel

analog für  $v, w$

[Gleichung 8.7](#) + [Gleichung 8.8](#) Übungsserie 32 **todo: ergänzen** ■

Wir betrachten als ersten Spezialfall ein gedrehtes Koordinatensystem, also eine lineare Transformation.

**Folgerung 8.3.2/2**

$T \in SO(3)$  *Drehung* (orthogonale Matrix,  $\det T = 1$ ). Damit sind  $h_u = h_v = h_w = 1$ . *Drehung*  
Daraus folgt, dass der Divergenz, Gradient, Rotation und der Laplace-Operator invariant bezüglich einer Drehung sind.

**Folgerung 8.3.2/3 (Der Laplace-Operator für Kugelkoordinaten)**

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta \\ \Rightarrow h_r &= 1, h_\theta = r, h_\varphi = r \sin \theta\end{aligned}$$

(Beweis Übungsserie 32 **todo: ergänzen**)

$\Rightarrow$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r f) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta f) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 f$$

**Folgerung 8.3.2/4 (Der Laplace-Operator für Zylinderkoordinaten)**

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z \\ \Rightarrow h_\rho &= 1, h_\varphi = \rho, h_z = 1 \\ \Rightarrow \Delta f &= \frac{1}{\rho} (\partial_\rho (\rho \partial_\rho f)) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2 f + \partial_z^2 f\end{aligned}$$

**Folgerung 8.3.2/5 (Der Laplace-Operator für Polarkoordinaten)**

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \\ \Rightarrow \Delta f &= \frac{1}{r} (\partial_r (r \partial_r f)) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 f\end{aligned}$$

### 8.3.3 Die Maxwell'schen Gleichungen

Wir betrachten gewisse Vektorfelder  $\vec{E}(x, t)$  (elektrische Feldstärke),  $\vec{B}(x, t)$  (magnetische Induktion),  $\vec{D}(x, t)$  (dielektrische Verschiebung) und  $\vec{H}(x, t)$  (magnetische Feldstärke), die von einem Ortsvektor  $x$  und der Zeit  $t$  abhängen. Dazu sind einige Quellen  $\vec{j}(x, t)$  (Stromdichte) und  $\vec{\rho}(x, t)$  (Ladungsdichte) gegeben, mit denen man das Verhalten der Vektorfelder über die Zeit hin betrachten will.

Materialgleichungen mit den Stoffkonstanten  $\varepsilon_0$  und  $\mu_0$

$$\begin{aligned}\vec{D}(x, t) &= \varepsilon_0 \vec{E}(x, t) \\ \vec{B}(x, t) &= \mu_0 \vec{H}(x, t)\end{aligned}$$

**Grundgleichungen von Maxwell (1864)**

$$(8.9) \quad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0$$

$$(8.10) \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$(8.11) \quad \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \vec{j}$$

$$(8.12) \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

**Bemerkung 8.3.3/1 (Integrale Form der Maxwell'schen Gleichung)**

Mithilfe des Satz von Stokes ([Satz 8.2.2/5](#)) kann man die [Gleichung 8.9](#) auch mit Integralen schreiben:

$$\int_{\partial S} \vec{E} d\vec{x} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

[Gleichung 8.10](#) Satz von Gauß ([Satz 8.2.3/4](#))

$$\int_{\partial \Omega} \langle \vec{D}, \vec{n} \rangle d\vec{S} = \int_{\Omega} \rho dx$$

**Bemerkung 8.3.3/2 (Elektrostatik (Zeitunabhängigkeit, keine Ströme))**

[Gleichung 8.9](#) und [Gleichung 8.10](#) wird zu

$$(8.13) \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$(8.14) \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho(x)$$

$$(8.15) \quad \vec{D}(x) = \varepsilon_0 \vec{E}(x)$$

Aus [Abschnitt 8.1.2](#) wissen wir, dass wenn die Rotation 0 ist ([Gleichung 8.13](#)), wir ein konservatives Vektorfeld haben und damit ein Potential  $u(x)$  existiert.  $\vec{E}(x) = -\operatorname{grad} u(x)$ . Mithilfe der Materialgleichung [Gleichung 8.15](#) ergibt sich  $-\operatorname{grad} u(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{D}(x)$ . Mithilfe von [Gleichung 8.14](#) ergibt sich eine partielle Differentialgleichung  $-\Delta u = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x)$  (*Laplace-Poisson-Gleichung, Potentialgleichung*)

*Laplace-Poisson-  
Gleichung  
Potentialgleichung*

**Bemerkung 8.3.3/3 (allgemeiner Fall der Maxwell'schen Gleichungen)**

( $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ ) Dann ergibt sich aus [Gleichung 8.9–Gleichung 8.12](#)

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} u - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \rho(x, t) \quad \text{Wellengleichung im } \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = \vec{j}(x, t)$$

# 9 Partielle Differentialgleichungen

In diesem Kapitel wollen wir partielle Differentialgleichungen genauer untersuchen. Dies sind Differentialgleichungen, die partielle Ableitungen enthalten. In der Regel werden diese Gleichungen in der Physik zur Modellierung von Vorgängen benutzt. Denn viele physikalische Prozesse hängen sowohl von Ort als auch von der Zeit ab. Wenn man beispielsweise die Bewegung eines Massepunktes nur nach der Ableitung der Zeit erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung. Wenn man aber nun Wellen betrachtet, die durch einen herabfallenden Wassertropfen entstehen, muss sowohl die Ableitung nach der Zeit wie auch die nach dem Raum betrachtet werden. Hier benötigt man dann eine partielle Differentialgleichung.

## 9.1 Die Laplace-Poisson-Gleichung

Die Laplace-Poisson-Gleichung beschreibt ein Randwertproblem. Hierbei sind die Ableitungen eines Vektorfelds auf der Oberfläche eines Volumens gegeben. Ein Anwendungsgebiet ist die Elektrostatik in Form des Gaußschen Gesetzes. Die homogene Form der Laplace-Poisson-Gleichung wird als Laplace-Gleichung bezeichnet.

### 9.1.1 Einleitung

- Laplace-Gleichung:  $\Delta u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
- Laplace-Poisson-Gleichung:  $-\Delta u(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (f \text{ gegeben})$
- Helmholtzgleichung:  $\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{auf } \Omega$

Man betrachtet die folgenden Spezialfälle der Helmholtzgleichung gesondert:

$$-\operatorname{div}(A(x) \operatorname{grad} u(x)) + \vec{b}(x) \operatorname{grad} u(x) + c(x)u(x) = f(x)$$

wobei:  $A(x) = (A_{ij}(x)), \vec{b}(x) = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n(x) \end{bmatrix}, c(x), f(x)$

heißt *elliptische Differentialgleichung 2. Ordnung*, falls die Matrix  $A(x)$  positiv definit auf  $\Omega$  ist.

*elliptische  
Differentialgleichung  
2. Ordnung*

## 9 Partielle Differentialgleichungen

Randwertproblem oder Dirichlet-Problem:

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad x \in \Omega \quad u|_{\partial\Omega} = g$$

Randwertp  
Dirichlet-P

Neumann-Problem

Neumann-Problem:

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad x \in \Omega \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = g$$

### 9.1.2 Die Green'sche Darstellungsformel

#### Bemerkung 9.1.2/1

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein zulässiges Gebiet, d. h. es gilt der Satz von Gauß (Satz 8.2.3/4)

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{w} \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{w}, \vec{n} \rangle \, dS$$

#### Bemerkung 9.1.2/2

$$C^m(\Omega) := \{u : \exists D^\alpha u, |\alpha| \leq m, \text{ stetig auf } \Omega\}$$

$\Omega$  offen und  $m \in \mathbb{N}_0$

$$C^m(\overline{\Omega}) := \{u \in C^m(\Omega) : \forall \alpha, |\alpha| \leq m, \exists \text{ stetige Fortsetzung auf dem Rand } \partial\Omega\}$$

dann:  $D^\alpha u(x^0) := \lim_{x \rightarrow x^0} D^\alpha u(x)$  für  $x^0 \in \partial\Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x^0) := \langle \nabla u(x^0), \vec{n} \rangle, \quad |\vec{n}| = 1$$

#### Bemerkung 9.1.2/3

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein zulässiges Gebiet. Nach Satz 8.2.3/4 ist (vgl. Abschnitt 8.2.3)

$$(1) \quad u \in C^2(\overline{\Omega}), v \in C^1(\overline{\Omega}) \Rightarrow$$

$$(9.1) \quad \int_{\Omega} v \Delta u \, dx = - \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, dS$$

BEWEIS:

$$\vec{w} = v \nabla u \Rightarrow \operatorname{div} \vec{w} = \langle \nabla v, \nabla u \rangle + v \Delta u \Rightarrow v \Delta u = \operatorname{div} \vec{w} - \langle \nabla u, \nabla v \rangle \quad \blacksquare$$

$$(2) \quad u, v \in C^2(\overline{\Omega}) \Rightarrow$$

$$(9.2) \quad \int_{\Omega} v \Delta u - u \Delta v \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \, dS$$

Dies folgt sofort aus der Anwendung von Gleichung 9.1.



**Definition 9.1.2/4**

Sei wieder  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein offenes Gebiet. Eine Funktion  $u$  heißt *harmonisch* auf  $\Omega$  : $\Leftrightarrow u \in C^2(\Omega)$  und  $\Delta u(x) = 0$  auf  $\Omega$ .

**Bemerkung 9.1.2/5 (Beispiele für harmonische Funktionen)**

$$\begin{aligned} u(x) &= x_i^2 - x_j^2 \Rightarrow \Delta u = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \\ u(x) &= x_1 x_2 x_3 \Rightarrow \Delta u = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Harmonische Funktionen bilden einen Vektorraum. Jetzt: Alle harmonischen Funktionen der Form:  $u(x) = v(|x|)$ ,  $r = |x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$

**Lemma 9.1.2/6**

Für  $n \geq 2$  ist  $u(x) = v(|x|)$  harmonisch auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$   $\Leftrightarrow$

$$u(x) = \begin{cases} b \ln r + c & : n = 2 \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c & : n > 2 \end{cases}$$

wobei  $b, c \in \mathbb{C}$ .

BEWEIS:

Es gilt  $\partial_j r = \frac{\partial}{\partial x_j} (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} = \frac{x_j}{r}$ . Somit folgt:

$$\begin{aligned} \partial_j u &= v'(r) \partial_j r = v'(r) \frac{x_j}{r} \\ \partial_j^2 u &= \partial_j \left( v'(r) \frac{x_j}{r} \right) = v''(r) \frac{x_j^2}{r} + v'(r) \left( \frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3} \right) \\ \Rightarrow \Delta u &= v''(r) + v'(r) \left( \frac{n}{r} - \frac{1}{r} \right) = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Wir setzen  $v' = w$  und erhalten eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen:  $w'(r) + \frac{n-1}{r} w = 0$ . Für  $n = 2$  erhalten wir als Lösung  $w = \frac{b}{r}$  und können  $v$  als Stammfunktion von  $w$  bestimmen:  $v(r) = b \ln r + c$ .

Im Fall von  $n > 2$  erhalten  $w(r) = \frac{b'}{r^{n-1}}$  und  $v(r) = \frac{b}{r^{n-2}} + c$ . ■

**Definition 9.1.2/7**

Für  $x \neq y$  setzen wir:

$$\Gamma(x, y) = \Gamma(|x - y|) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x - y| & : n = 2 \\ -((n-2)\omega_n)^{-1} |x - y|^{2-n} & : n > 2 \end{cases}$$

*Achtung:  $\Gamma$  ist nicht die Gammafunktion!*  $\omega_n$  bezeichnet die Oberfläche der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$ ; siehe [Abschnitt 8.3.1](#)

$\Gamma$  heißt *Fundamentallösung* der Laplace-Gleichung.

*Fundamentallösung*

**Bemerkung 9.1.2/8**

- (1)  $\Gamma(x, y)$  ist harmonisch auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$  (als Funktion von  $x$ )
- (2)  $\Gamma(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{y\})$
- (3)  $\frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma(x, y)$  und  $\frac{\partial}{\partial \vec{n}} \Gamma(x, y)$  sind harmonisch auf  $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{y\})$
- (4) Das Integral  $\int_{K_1(y)} \Gamma(x, y) dx$  existiert als uneigentliches Integral

$$\int_{K_1(y)} \Gamma(x, y) dx = \begin{cases} \int_{|x| \leq 1} \ln|x| dx = 2\pi \int_0^1 r \ln r dr < \infty & n = 2 \\ \int_{|x| \leq 1} \frac{1}{|x|^{n-2}} dx = |\omega_n| \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{r^{n-2}}}_{=r} r^{n-1} dr < \infty & n > 2 \end{cases}$$

**Satz 9.1.2/9 (Greensche Darstellungsformel)**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein zulässiges Gebiet,  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ ,  $\vec{n}(x)$  äußerer Normalenvektor an  $x \in \partial\Omega$ . Dann gilt für alle  $y \in \Omega$

$$(9.3) \quad u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{n}(x)}(x, y) - \Gamma(x, y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS(x) + \int_{\Omega} \Gamma(x, y) \Delta u(x) dx$$

BEWEIS:

Da die Singularität (Problemstelle  $y$ ) Probleme bereitet, legen wir eine Kugel  $\overline{K_\varepsilon(y)} \subset \Omega$  um  $y$  (für hinreichend kleines  $\varepsilon$ ) und betrachten  $\Omega \setminus \overline{K_\varepsilon(y)}$ . Dies ist ein zulässiges Gebiet, da wir den Rand  $\partial\Omega$  um den Rand der Kugel erweitern und den Normalenvektor auf diesem Stück in Richtung  $y$  zeigen lassen. Es gilt:

$$\int_{\Omega} \Gamma(x, y) \Delta u(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus \overline{K_\varepsilon(y)}} \Gamma(x, y) \Delta u(x) dx$$

Wir wenden [Gleichung 9.2](#) auf  $\Omega \setminus \overline{K_\varepsilon(y)}$  an. Da  $\Gamma(x, y)$  harmonisch ist, entfällt der zweite Summand unter Integral und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \overline{K_\varepsilon(y)}} \Gamma(x, y) \Delta u(x) dx &= \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) - u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{n}}(x, y) dS(x) \\ &+ \int_{\partial K_\varepsilon(y)} \Gamma(x, y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) - u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{n}}(x, y) dS(x) \end{aligned}$$

Auf  $\partial K_\varepsilon(y)$  ist  $\Gamma(x, y) = \Gamma(|x - y|) = \Gamma(\varepsilon) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial K_\varepsilon(y)} \Gamma(x, y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) dS(x) \right| &\leq \Gamma(\varepsilon) \sup_{x \in \Omega} |\nabla u(x)| \varepsilon^{n-1} |\omega_n| \\ &\leq \sup_{x \in \Omega} |\nabla u(x)| \begin{cases} \varepsilon \ln \varepsilon & n = 2 \\ \frac{1}{n-2} \varepsilon & n > 2 \end{cases} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

noch zu zeigen: ( $y$  fest)

$$- \int_{\partial K_\varepsilon(y)} u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{n}(x)}(x, y) dS(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u(y)$$

$\vec{n}(x) = \frac{y-x}{|x-y|}$  äußere Normale,  $\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{n}(x)} = \langle \nabla_x \Gamma(x, y), \vec{n}(x) \rangle$ . Es gilt für  $n > 2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (|x-y|^{-n+2}) &= (-n+2)|x-y|^{-n+1} \frac{1}{2} \frac{1}{|x-y|} 2(x_j - y_j) = -(n-2) \frac{x_j - y_j}{|x-y|^n} \\ \Rightarrow \nabla_x \Gamma(x, y) &= \frac{1}{|\omega_n|} \frac{x-y}{|x-y|^n} \end{aligned}$$

Für  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (\ln|x-y|) &= |x-y|^{-1} \frac{x_j - y_j}{|x-y|} = \frac{x_j - y_j}{|x-y|^2} \\ \Rightarrow \nabla_x \Gamma(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \frac{x-y}{|x-y|^2} \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich für  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{n}(x)} &= \frac{1}{|\omega_n|} \frac{x-y}{|x-y|^n} \frac{y-x}{|x-y|} = -\frac{1}{|\omega_n|} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \left( = -\frac{1}{|\omega_n|} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \text{ auf } \partial K_\varepsilon(y) \right) \\ \Rightarrow - \int_{\partial K_\varepsilon(y)} u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{n}(x)}(x, y) dS(x) &= \frac{1}{|\omega_n| \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial K_\varepsilon(y)} u(x) dS(x) \\ &= \frac{1}{|\partial K_\varepsilon(y)|} \int_{\partial K_\varepsilon(y)} u(x) dS(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u(y) \end{aligned}$$

denn

$$\left| u(y) - \frac{1}{|\partial K_\varepsilon(y)|} \int_{\partial K_\varepsilon(y)} u(x) dS(x) \right| \leq \frac{1}{|\partial K_\varepsilon(y)|} \int_{\partial K_\varepsilon(y)} \underbrace{|u(y) - u(x)|}_{\leq \delta \text{ für kleine } \varepsilon} dS(x) \leq \delta \quad (\forall \delta) \blacksquare$$

**Folgerung 9.1.2/10**

Für harmonische Funktionen  $u$  auf  $\Omega$  (d. h.  $\Delta u = 0$ ) gilt ( $y \in \Omega$ )

$$u(y) = \int_{\partial \Omega} u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{n}}(x, y) - \Gamma(x, y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) dS$$

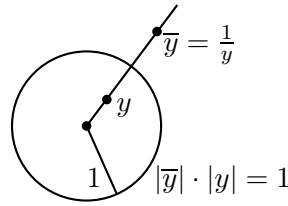


Abbildung 9.1: Spiegelung an Einheitskugel

**Folgerung 9.1.2/11**

Sei  $\Omega$  ein zulässiges Gebiet und wir definieren eine zusätzliche komplexwertige Funktion  $\Phi$  auf  $\Omega \times \Omega$  mit  $\Phi(x, y) \in C^2(\overline{\Omega})$  als Funktion von  $x$  bei festem  $y$ . Zusätzlich soll  $\Phi$  harmonisch sein, d. h.  $\Delta_x \Phi(x, y) = 0$  für alle  $y \in \Omega$ .

Wir setzen  $G(x, y) := \Gamma(x, y) + \Phi(x, y)$  für alle  $y, x \in \overline{\Omega}, x \neq y$ .

Dann gilt die Greensche Darstellungsformel mit  $G$  anstelle von  $\Gamma$

$$(9.4) \quad u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(x, y) - G(x, y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) dS + \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(x) dx$$

BEWEIS:

folgt aus [Gleichung 9.3](#) und [Gleichung 9.2](#) mit  $v(x) = \Phi(x, y)$  ■

**Bemerkung 9.1.2/12**

Wählen  $\Phi$  in [Folgerung 9.1.2/11](#), so daß  $G(x, y) = 0$  für  $y \in \Omega$  und  $x \in \partial\Omega$ . Für  $\Delta u = 0$  gilt:

$$(9.5) \quad \left. \begin{aligned} u(y) &= \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}(x)}(x, y) dS(x) \\ \Delta u &= 0 \\ u|_{\partial\Omega} &= \varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow u(y) = \int_{\partial\Omega} \varphi(x) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}(x)}(x, y) dS(x)$$

**9.1.3 Die Green'sche Funktion für die Kugel und das Poisson-Integral**

**Definition 9.1.3/1**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  zulässiges Gebiet und  $\Phi: \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\Phi(x, y) \in C^2(\overline{\Omega})$  für jedes  $y \in \Omega$  (als Funktion von  $x$ ) und  $\Phi(x, y)$  sei harmonisch auf  $\Omega$  für jedes  $y \in \Omega$  (als Funktion von  $x$ ). Dann heißt  $G(x, y) := \Gamma(x, y) + \Phi(x, y)$  *Green'sche Funktion* für  $\Omega$  : $\Leftrightarrow G(x, y) = 0$  für alle  $y \in \Omega$  und  $x \in \partial\Omega$ .

*Green'sche Funktion*

**Lemma 9.1.3/2 (Green'sche Funktion für die Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$ )**

Es sei  $K = \{y: |y| < 1\}$ . Es sei  $\bar{y} := \frac{y}{|y|^2}$  für  $y \neq 0$ . (siehe [Abbildung 9.1](#))

Dann gilt:

$$G(x, y) = \begin{cases} \Gamma(|x - y|) - \Gamma(|y||x - \bar{y}|) & : y \neq 0 \\ \Gamma(|x|) - \Gamma(1) & : y = 0 \end{cases}$$

ist die *Green'sche Funktion* für die Einheitskugel.

*Green'sche Funktion*

BEWEIS:

$$\Phi(x, y) = - \begin{cases} \Gamma(|y||x - \bar{y}|) & : y \neq 0 \\ \Gamma(1) & : y = 0 \end{cases}$$

ist harmonisch auf  $K$  für alle  $y \in K$ . Überprüfen, ob Randbedingung erfüllt: Wenn  $|x| = 1$  und  $y = 0$ , dann ist  $G(x, y) = G(x, 0) = \Gamma(1) - \Gamma(1) = 0$ . Für  $|x| = 1$  und  $0 < |y| < 1 \Rightarrow (|y||x - \bar{y}|)^2 = |y|^2(x - \bar{y})(x - \bar{y}) = |y|^2(|x|^2 - 2x\bar{y} + |\bar{y}|^2) = |y|^2(\underbrace{|x|^2}_{=1} - 2\frac{xy}{|y|^2} + \frac{1}{|y|^2}) = |y|^2 - 2xy + |x|^2 = |x - y|^2$  (drandenken: wir haben Skalarprodukte)  $\Rightarrow G(x, y) = 0$  ■

**Lemma 9.1.3/3**

Sei  $u$  eine zweimal stetig fortsetzbare Funktion auf dem Rand der Einheitskugel ( $u \in C^2(\bar{K})$ ) und harmonisch auf  $K$ . Dann gilt:

$$(9.6) \quad u(y) = \frac{1 - |y|^2}{|\omega_n|} \int_{\partial K} \frac{u(x)}{|x - y|^n} dS(x) \quad y \in K$$

BEWEIS:

Sei  $G$  Green'sche Funktion für  $K \Rightarrow$  es gilt [Gleichung 9.5](#)

Es gilt auf  $\partial K$ :  $\frac{\partial G}{\partial \vec{n}(x)}(x, y) = \langle \nabla_x G(x, y), x \rangle$ ,  $\vec{n}(x) = x$ :

$$\begin{aligned} \nabla_x G(x, y) &= \nabla_x(\Gamma(|x - y|) - \nabla_x(\Gamma(|y||x - \bar{y}|))) \\ &= \nabla_x(\Gamma(|x - y|)) - |y|^{-(n-2)} \nabla_x(\Gamma(|x - \bar{y}|)) \\ &\stackrel{\text{Beweis von Lemma 9.1.3/2}}{=} \frac{1}{|\omega_n|} \left( \frac{x - y}{|x - y|^n} - |y|^{-n+2} \frac{x - \bar{y}}{|x - \bar{y}|^n} \right) \\ &= \frac{1}{|\omega_n|} \left( \frac{x - y}{|x - y|^n} - \frac{(x - \bar{y})|y|^2}{(|y||x - \bar{y}|)^n} \right) \\ &= \frac{1}{|\omega_n|} \frac{1}{|x - y|^n} (x - y - x|y|^2 + y) = \frac{x(1 - |y|^2)}{|\omega_n||x - y|^n} \end{aligned}$$

Für den Rand der Kugel ( $|x| = 1$ ) ist

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}(x)}(x, y) = \frac{1 - |y|^2}{|\omega_n||x - y|^n} \quad \blacksquare$$

**Satz 9.1.3/4 (Poisson'sche Darstellungsformel)**

Dies ist auch die Lösung des Dirichlet-Problems für die Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$ .

Es sei  $\varphi: \partial K \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und es sei

$$u(y) = \frac{1 - |y|^2}{|\omega_n|} \int_{\partial K} \frac{\varphi(x)}{|x - y|^n} dS(x) \quad \forall y \in K$$

Dann gilt:

- (1)  $u$  ist harmonisch auf  $K$ :  $\Delta u(y) = 0$
- (2)  $\forall y^0 \in \partial K$ :  $\lim_{y \rightarrow y^0} u(y) = \varphi(y^0)$  Das heißt,  $u$  lässt sich stetig auf dem Rand als  $\varphi$  fortsetzen.

BEWEIS:

- (1)  $\varphi(x)$  in [Gleichung 9.6](#) statt  $u(x)$  Laplace-Operator unter das Integral, für  $\varphi(x)$  ohne Wirkung, da Laplace nach  $y$ , Anwendung auf  $G$ , geht weil  $G$  harmonisch  $\Rightarrow$  alles harmonisch  $\rightarrow$  Weltfrieden :)

$$\begin{aligned} \Delta u(y) &= \Delta_y \int_{\partial K} \frac{1 - |y|^2}{|\omega_n| |x - y|^n} \varphi(x) dS(x) \\ &= \int_{\partial K} \Delta_y \left( \underbrace{\frac{1 - |y|^2}{|\omega_n| |x - y|^n}}_{\frac{\partial}{\partial \bar{n}(x)} G(x, y)} \right) \varphi(x) dS(x) \end{aligned}$$

Aus der Tatsache unterhalb der Klammer folgt nun wegen der Greenschen Funktion:  $\frac{\partial}{\partial \bar{n}} \Delta_y G(x, y) = 0$ .

- (2) Für  $u(x) = 1$  folgt für alle  $x \in K$  aus [Lemma 9.1.3/3](#):

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\partial K} \frac{1 - |y|^2}{|\omega_n| |x - y|^n} dS(x) \\ \Rightarrow |u(y) - \varphi(y^0)| &= \left| \int_{\partial K} \varphi(x) - \varphi(y^0) \frac{1 - |y|^2}{|\omega_n| |x - y|^n} dS(x) \right| \end{aligned}$$

Wir wählen ein  $S_1$  so, dass  $\max_{x \in S_1} |\varphi(x) - \varphi(y^0)| \leq \varepsilon$  ist. Dies funktioniert, da die  $\varphi$  stetig in  $y^0$  sind. Weiterhin wählen wir ein  $\rho$  so, dass  $1 - |y|^2 \leq \varepsilon$  für  $y \in K \cap \rho(y^0) \cap K =: A$  und  $|y - x| \geq c > 0$  für  $y \in A$  und  $x \in S_2$ . Dabei ist  $c$  eine

Konstante und es gilt für  $y \in A$ :

$$\begin{aligned}
 |u(y) - \varphi(y^0)| &\leq \int_{S_1} \underbrace{|\varphi(x) - \varphi(y^0)|}_{\leq \varepsilon} \underbrace{\frac{1 - |y|^2}{|\omega||x - y|^n}}_{=1} dS(x) \\
 &\quad + \int_{S_2} \underbrace{|\varphi(x) - \varphi(y^0)|}_{\leq 2 \max_{\partial K} |\varphi(x)|} \frac{1 - |y|^2}{|\omega||x - y|^n} dS(x) \\
 &\leq \varepsilon + 2 \max_{\partial K} |\varphi(x)| \frac{1}{|\omega|} \varepsilon \frac{1}{c^n} \underbrace{\int_{S_2} 1 dS(x)}_{\leq |\omega_n|} \\
 &\leq \varepsilon \underbrace{\left(1 + 2 \max_{\partial K} |\varphi(x)| \frac{1}{|\omega|} \frac{1}{c^n} |\omega_n|\right)}_{=c} \leq \varepsilon c \\
 &\Rightarrow \lim_{y \rightarrow y^0} u(y) = \varphi(y^0) \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Folgerung 9.1.3/5**

$$\varphi: \partial K_R \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{|\omega_n|R} \int_{\partial K_R} \frac{\varphi(x)}{|x - y|^n} dS(x)$$

ist die Lösung von  $\Delta u = 0$  auf  $K_R$  und  $u = \varphi$  auf  $\partial K_R$ . Denn sei  $\Delta v = 0$  mit  $v(y) = \varphi(Ry) = \psi(y)$  für  $|y| = 1$ . Wegen der Kettenregel in der Ableitung und  $u(y) = v(\frac{y}{R})$  folgt, dass  $\Delta u = 0$ :

$$\begin{aligned}
 |y| = R &\Rightarrow u(y) = v\left(\frac{y}{R}\right) = \varphi\left(R \frac{y}{R}\right) = \varphi(y) \\
 &\Rightarrow u(y) = v\left(\frac{y}{R}\right) = \frac{R^2 - |y|^2}{|\omega_n|R^2} \int_{\partial K} \frac{\varphi(Rx)}{\left|x - \frac{y}{R}\right|^n} dS(x) \\
 &= \frac{R^2 - |y|^2}{|\omega_n|R} \underbrace{\int_{\partial K} \frac{\varphi(Rx)}{|Rx - y|^n} R^{n-1} dS(x)}_{\int_{\partial K_R} \frac{\varphi(x)}{|x - y|^n} dS(x)}
 \end{aligned}$$

**Satz 9.1.3/6**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $u \in C^2(\Omega)$  harmonisch auf  $\Omega$ . Dann gilt, dass  $u$  beliebig oft differenzierbar ist ( $u \in C^\infty(\Omega)$ ).

BEWEIS:

Wir betrachten  $v(z) := u(y + z)$ . Diese ist harmonisch in  $K_r(0)$ , wenn  $v$  beliebig oft differenzierbar ist. Weiter ist  $v$  stetig auf  $u \in C^2(K_r(0))$ . Aus [Lemma 9.1.3/3](#) folgt:

## 9 Partielle Differentialgleichungen

$v(z) = \frac{r^2 - |z|^2}{|\omega_n| r} \int_{\partial K_r} \frac{v(x)}{|x-z|^n} dS(x)$ . Da nun  $\frac{1}{|x-y|^n} \in C^\infty(K_r(x)) \Rightarrow v \in C^\infty(K_r(0)) \Rightarrow u \in C^\infty(K_r(y))$ . ■

### Bemerkung 9.1.3/7

Die Existenz der Greenschen Funktionen für allgemeine  $\Omega$  ist schwierig und hängt von den Eigenschaften des Randes  $\partial\Omega$  ab.

### 9.1.4 Mittelwerteigenschaften

#### Definition 9.1.4/1

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $u \in C^2(\Omega)$ .

*subharmonisch*

(1)  $u$  heißt genau dann *subharmonisch*, wenn gilt:  $\Delta u(x) \geq 0$  auf  $\Omega$ .

*superharmonisch*

(2)  $u$  heißt genau dann *superharmonisch*, wenn gilt:  $\Delta u(x) \leq 0$  auf  $\Omega$ .

#### Satz 9.1.4/2

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $u \in C^2(\Omega)$  mit  $\Delta u \geq 0$  auf  $\Omega$ .<sup>1</sup> Dann gilt für jede Kugel  $K_R(y)$  mit  $\overline{K_R(y)} \subseteq \Omega$ :

*sphärische Mittelwerteigenschaft*

(1) *sphärische Mittelwerteigenschaft*:

$$u(y) \leq \frac{1}{|\partial K_R|} \int_{\partial K_R} u(x) dS(x)$$

*Kugelmittelwerteigenschaft*

(2) *Kugelmittelwerteigenschaft*:

$$u(y) \leq \frac{1}{|K_R|} \int_{K_R} u(x) d(x)$$

Wobei hier gilt, dass  $|K_R| = \frac{R^n |\omega_n|}{n}$  das Volumen der Kugel ist und  $|\partial K_R| = R^{n-1} |\omega_n|$  die Oberfläche der Kugel.

BEWEIS:

Für den Beweis ist es ausreichend,  $\Delta u \geq 0$  zu betrachten. Es sei nochmals in Erinnerung gerufen, dass aus der Tatsache, dass  $\Omega$  ein zulässiges Gebiet ist und  $u \in C^2(\overline{\Omega_0})$  ist, folgt:

$$(9.7) \quad \int_{\Omega_0} \Delta u dx = \int_{\partial \Omega_0} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS$$

<sup>1</sup>Dieser Satz gilt gleichermaßen für die Beziehung  $\leq$  und  $=$ .



1. Schritt Sei  $\overline{K_R(y)} \subset \Omega$ . Aus [Gleichung 9.7](#) folgt für  $\Delta u > 0$ :  $\int_{\partial \overline{K_R(y)}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS > 0$ .  
Wir setzen  $v(x) = u(x+y)$  und es folgt,  $\int_{K_r(0)} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(x) dS > 0$  für  $0 < r < R$ . Weiter gilt für das  $r$ :

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_r(0)} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} dS &= \int_{|x|=r} \nabla v(x) \underbrace{\vec{n}}_{\frac{x}{r}} dS = r^{n-1} \int_{|x|=r} \underbrace{\nabla v(rx)}_{\frac{d}{dr}(v(rx))} x dS \\ &= r^{n-1} \frac{d}{dr} \int_{|x|=r} v(rx) dS = r^{n-1} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^{n-1}} \int_{|x|=r} v(x) dS \right) > 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{|\omega_n| r^{n-1}} \int_{|x|=r} v(x) dS \text{ streng monoton wachsend auf } (0, R) \\ &\Rightarrow v(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|\omega_n| r^{n-1}} \int_{|x|=r} v(x) dS < \frac{1}{|\omega_n| R^{n-1}} \int_{|x|=R} v(x) dS \\ &\Rightarrow u(y) < \frac{1}{|\omega_n| r^{n-1}} \int_{|x|=R} u(y) dS = \frac{1}{|\partial K_R|} \int_{K_R(u)} u(x) dS(x) \end{aligned}$$

2. Schritt Aus erstens folgt zweitens. Denn für  $0 < r < R$  folgt:

$$\begin{aligned} u(y) &\leq \frac{1}{|\omega_n| r^{n-1}} \int_{|x-y|=r} u(x) dS \\ &\Rightarrow u(y) |\omega_n| r^{n-1} \leq \int_{|x-y|=r} u(x) dS \\ &\Rightarrow u(y) \underbrace{|\omega_n| \frac{R^n}{n}}_{|K_R|} \leq \int_0^R \int_{|x-y|=r} u(x) dS dr = \int_{K_r(y)} u(x) dx \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Folgerung 9.1.4/3**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $u \in C^2(\Omega)$  erfülle für alle  $\overline{K_R(y)} \subset \Omega$  die sphärische Mittelwerteigenschaft. Dann ist  $\Delta u(y) \geq 0$  auf  $\Omega$ , d.h. subharmonisch (Analog gilt dies auch für  $\leq$  bzw.  $=$ ). Insbesondere ist  $u$  auf  $\Omega$  genau dann harmonisch, wenn gilt,  $u(y) = \frac{1}{|\partial K_R|} \int_{\partial K_R(y)} u(x) dS$  für alle  $\overline{K_R(y)} \subset \Omega$ .

BEWEIS:

Wir nehmen an, die Beziehung  $\Delta u(y) \geq 0$  gelte nicht. Damit folgt, dass ein  $y \in \Omega$  existiert für das  $\Delta u(y) < 0$  gilt. Weiterhin folgt, es existiert ein  $R$  mit  $\overline{K_R(y)} \subset \Omega$  und  $\Delta u < 0$  auf  $\overline{K_R(y)}$ . Dies gilt wegen der Stetigkeit von  $\Delta u$ . Aus [Satz 9.1.4/2](#) folgt damit  $u(y) > \frac{1}{|\partial K_R|} \int_{\partial K_R(y)} u(x) dS$ . Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Voraussetzung.  $\blacksquare$

**Bemerkung 9.1.4/4**

Sei  $u \in C^2(\Omega)$  und für alle  $\overline{K_R(y)} \subset \Omega$  gelte  $u(y) = \frac{1}{|K_R|} \int_{K_R(y)} u(x) dx$ . Dann gilt für alle  $\overline{K_R(y)} \subset \Omega$  die sphärische Mittelwerteigenschaft.

BEWEIS:

siehe Übungsserie 35 **todo: Beweis hinzufügen** ■

**Folgerung 9.1.4/5**

Sei  $u \in C^2(\Omega)$ . Dann ist  $u$  genau dann harmonisch auf  $\Omega$ , wenn für alle  $\overline{K_R(y)} \subset \Omega$ :  $u(y) = \frac{1}{|K_R|} \int_{K_R(y)} u(x) dx$  gilt.

**9.1.5 Maximum- und Minimumprinzipien**

**Satz 9.1.5/1**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein offenes und zusammenhängendes Gebiet.

- (1) Sei  $u \in C^2(\Omega)$  mit  $\Delta u \geq 0$  auf  $\Omega$ . Ferner existiere  $y^0 \in \Omega$  mit  $u(y^0) = \sup_{y \in \Omega} u(y)$ . Dann ist  $u$  konstant.
- (2) Sei  $u \in C^2(\Omega)$  mit  $\Delta u \leq 0$  auf  $\Omega$ . Ferner existiere  $y^0 \in \Omega$  mit  $u(y^0) = \inf_{y \in \Omega} u(y)$ . Dann ist  $u$  konstant.

BEWEIS:

Es ist zu zeigen, dass aus dem ersten Punkt der zweite folgt. Denn man braucht nur  $-u$  statt  $u$  zu betrachten.

Sei  $y^0 \in \Omega$ ,  $u(y^0) = \sup_{\Omega} u =: M$ ,  $\overline{K_r(y^0)} \subset \Omega$ . Nach **Satz 9.1.4/2** gilt:

$$\begin{aligned} u(y^0) &\leq \frac{1}{|K_r|} \int_{K_r(y^0)} u(x) dx \\ &\Rightarrow \forall y \in K_r(y^0): 0 = u(y^0) - M \leq \frac{1}{|K_r|} \int_{K_r(y^0)} u(x) dx - \frac{1}{|K_r|} \int_{K_r(y^0)} M dx \\ &= \frac{1}{|K_r|} \int_{K_r(y^0)} \underbrace{(u(x) - M)}_{\leq 0} dx = 0 \\ &\Rightarrow \int_{K_r(y^0)} (u(x) - M) dx = 0 \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit gilt für alle  $x$  aus  $K_r(y^0)$ , dass  $u(x) = M$  und somit konstant ist.

Sei nun  $y \in \Omega$  und  $\Gamma$  ein stetiger Polygonzug von  $y^0$  nach  $y$ . Dieser existiert immer, da  $\Omega$  ein zusammenhängendes Gebiet ist und es existiert auch ein  $d = \text{dist}(\Gamma, \partial\Omega) > 0$ . Denn  $\Gamma \subset \Omega$  und  $\Gamma$  sind kompakt. Weiterhin ist  $\Omega$  offen. Somit existieren aber endlich viele Kugeln  $K_r(y^j)$  mit  $r < d$ ,  $y^j \in \Gamma$ ,  $y^j \in \overline{K_r(y^{j-1})}$  und  $\bigcup_j K_r(y^j) \supset \Gamma$ . Durch die iterative Anwendung des obigen Arguments erhält man dann den Schluss  $u(y) = u(y^0) = M$ . ■

**Folgerung 9.1.5/2**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ . Dann folgt:

- $u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u$  für alle  $x \in \Omega$ , falls  $\Delta u \geq 0$  auf  $\Omega$
- $u(x) \geq \min_{\partial\Omega} u$  für alle  $x \in \Omega$ , falls  $\Delta u \leq 0$  auf  $\Omega$
- $\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u$  auf  $\Omega$ , falls  $\Delta u = 0$

**Folgerung 9.1.5/3**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein (nicht notwendigerweise beschränktes) Gebiet und  $u \in C^2(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ . Dann folgt für  $\Delta u = 0$  auf  $\Omega$ , dass  $\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u$ .

**Satz 9.1.5/4 (Satz von Liouville)**

Sei  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$  beschränkt und harmonisch auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist  $u$  konstant.

BEWEIS:

siehe Übung 34 **todo: Beweis einfügen** ■

**Satz 9.1.5/5**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $\partial\Omega \neq \emptyset$ ,  $f \in C(\Omega)$  und  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  Lösungen der Laplace-Poissongleichung  $-\Delta u = f$  auf  $\Omega$ .

- (1)  $\forall y \in \partial\Omega: u(y) \leq v(y) \Rightarrow \forall x \in \Omega: u(x) \leq v(x)$
- (2)  $\forall y \in \partial\Omega: u(y) = v(y) \Rightarrow \forall x \in \Omega: u(x) = v(x)$

BEWEIS:

- (1) Wir setzen  $w(x) := v(x) - u(x) \Rightarrow \Delta w = \Delta(u - v) = 0$  auf  $\Omega$ . Da  $y \in \partial\Omega$  folgt, dass  $w(y) \geq 0$  und es folgt weiter, dass das Infimum über dem Rand von  $\Omega$  existiert und größer als Null ist. Wegen der [Folgerung 9.1.5/2](#) gilt für alle  $x \in \Omega: w(x) \geq \inf_{\partial\Omega} w \geq 0$ .
- (2) Wenn  $u(y) = v(y) \Rightarrow \inf_{\partial\Omega} w = 0 \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} w \Rightarrow w(x) = 0$  ■

**Bemerkung 9.1.5/6**

Sei  $-\Delta u = f$  mit  $f \in C(\Omega)$  und  $u|_{\partial\Omega} = g$  mit  $g \in C(\partial\Omega)$ . Dann folgt, dass das Randwertproblem (Dirichletproblem) höchstens eine Lösung besitzt.

**Bemerkung 9.1.5/7**

Das Randwertproblem ist nicht immer lösbar. Sei beispielsweise  $\Delta u = 0$  auf  $K_1(0) \setminus \{0\}$  und  $u(y) = 0$  für  $|y| = 1$  sowie  $u(0) = 1$  die Randbedingungen. Dann ist das in unserem Sinne nicht lösbar.

**Folgerung 9.1.5/8 (Stabilität, stetige Abbildung von Randwerten)**

Es seien  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  Lösungen von  $-\Delta u = f$  auf  $\Omega$  mit  $u|_{\partial\Omega} = \varphi$  und  $v|_{\partial\Omega} = \psi$ . Es gelte  $\sup_{y \in \partial\Omega} |\varphi(y) - \psi(y)| \leq \varepsilon \Rightarrow \forall x \in \Omega: |u(x) - v(x)| \leq \varepsilon$ .

BEWEIS:

Sei  $\Delta(u - v) = 0$  auf  $\Omega$  und  $(u - v)(y) = \varphi(y) - \psi(y)$ . Aus der [Folgerung 9.1.5/2](#) kann man schließen, dass  $-\varepsilon \leq \inf_{\partial\Omega} (u(y) - v(y)) \leq u(x) - v(x) \leq \sup_{\partial\Omega} (u(y) - v(y)) \leq \varepsilon \Rightarrow |u(x) - v(x)| \leq \varepsilon$  für  $x \in \Omega$ . ■

### 9.1.6 Das Newton-Potential

#### Bemerkung 9.1.6/1

Ziel dieses Abschnittes ist es die folgende Gleichung für ein gegebenes  $f$  zu lösen.

$$-\Delta u = f \text{ auf } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

Annahme:  $u$  ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger ( $u \in C^2(\Omega)$ ,  $\text{supp } u \subset \Omega$  kompakt). Die Greensche Formel (Satz 9.1.2/9) liefert uns

$$(9.8) \quad u(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x, y) \Delta u(y) dy$$

Die Vermutung ist, dass die Lösung von  $-\Delta u = f$  sich so darstellen lässt

$$u(x) = - \int_{\Omega} \Gamma(x, y) f(y) dy$$

#### Definition 9.1.6/2

$f \in C(\overline{\Omega})$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  zulässiges Gebiet im  $\mathbb{R}^n$  definieren wir die folgende Funktion, die man als *Newton-Potential* bezeichnet.

*Newton-Potential*

$$u(x) = \int_{\Omega} \Gamma(|x - y|) f(y) dy$$

Für  $y \rightarrow x$  geht  $\Gamma$  gegen unendlich  $\rightarrow$  Singularität  $\rightarrow$  uneigentliches Integral, aber es geht, da die Singularität schwach ist und wir können darüber integrieren. Das Integral existiert also für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Insbesondere sind

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} f(y) \ln|x - y| dy \quad , n = 2$$

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{f(y)}{|x - y|} dy \quad , n = 3$$

#### Lemma 9.1.6/3

Wenn  $f$  eine stetig differenzierbare Funktion ist und  $u$  das Newton-Potential, dann können wir folgendes beweisen:

- (1)  $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$
- (2)  $\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma(|x - y|) f(y) dy$
- (3) für  $n \geq 3$  ist  $\lim_{|x| \rightarrow 0} u(x) = 0$

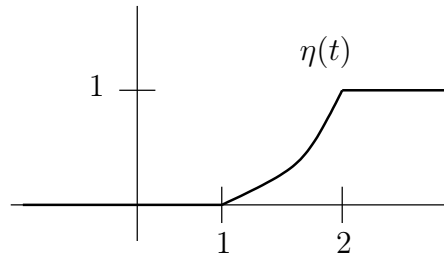


Abbildung 9.2: Abschneidefunktion

BEWEIS:

Es gilt  $|\frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma(|x-y|)| \leq \frac{1}{|\omega_n|} \frac{1}{|x-y|^{n-1}}$ . Daraus folgt, dass die Singularität schwach ist und wir darüber integrieren können. Es existiert also das Integral  $\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma(|x-y|) f(y) dy$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  (als uneigentliches Integral, falls  $x \in \overline{\Omega}$ ).

Wir wählen uns eine Hilfsfunktion  $\eta(t)$ , die im Bereich  $[0, 1]$  beliebig oft differenzierbar ist, auf  $(-\infty, 0]$  ist  $\eta(t) = 0$  sowie  $\eta(t) = 1$  auf  $[2, \infty)$ . Siehe [Abbildung 9.2](#)

Wir betrachten jetzt  $\eta(\frac{|x-y|}{\varepsilon})$ . **todo: nettes Bildchen davon malen.**

$\eta$  ist eine *Abschneidefunktion*.

*Abschneidefunktion*

Es sei für  $\varepsilon > 0$

$$u_{\varepsilon}(x) = \int_{\Omega} \Gamma(|x-y|) \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) f(y) dy$$

$$v_j(x) := \int_{\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j}(|x-y|) f(y) dy$$

$u_{\varepsilon}(x)$  ist  $\in C^1(\mathbb{R}^n)$  und  $\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_j} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma(|x-y|) \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) \right) f(y) dy$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 |u_\varepsilon(x) - u(x)| &\leq \int_{\Omega} \left| \Gamma(|x-y|) \left| \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) - 1 \right| \underbrace{|f(x)|}_{\leq c} \right| dy \\
 &= c \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon} |\Gamma(|x-y|)| dy \leq c \begin{cases} \varepsilon^2 & n > 2 \\ \varepsilon^2 |1 + \ln 2\varepsilon| & n = 2 \end{cases} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \\
 \left| v_j(x) - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}(x) \right| &\leq \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma(|x-y|) (1 - \eta(\frac{|x-y|}{\varepsilon}))) \right| |f(y)| dy \\
 &\leq \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma(|x-y|) \right| + |\Gamma(|x-y|)| \frac{1}{\varepsilon} c dy \\
 &\leq c \begin{cases} \varepsilon & n > 2 \\ \varepsilon(1 + |\ln 2\varepsilon|) & n = 2 \end{cases} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0
 \end{aligned}$$

(Hinweis: Integrale mit Kugelkoordinaten ausrechnen.)

Damit haben wir gezeigt, dass  $u_\varepsilon(x)$  gleichmäßig<sup>2</sup> auf jeder kompakten Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  gegen  $u(x)$  konvergiert und  $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}$  gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  gegen  $v_j(x)$  konvergiert. Aus einem Satz von früher folgt dann, dass die Ableitung  $\frac{\partial u}{\partial x_j}$  auf  $\mathbb{R}^n$  existiert und  $\frac{\partial u}{\partial x_j} = v_j$  ist. Damit ist (1) und (2) gezeigt. ■

**Satz 9.1.6/4 (Eigenschaften des Newton-Potentials)**

Die Funktion  $f$  sei einmal stetig differenzierbar auf  $\Omega$  (zulässiges Gebiet) und stetig auf dem Abschluß  $\overline{\Omega}$  ( $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ).  $u$  sei das Newton-Potential von  $f$ . Dann gilt:

- (1)  $u \in C^2(\Omega)$  und  $\Delta u(x) = f(x)$  für alle  $x \in \Omega$ .
- (2)  $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$
- (3)  $u$  ist eine harmonische Funktion außerhalb von  $\Omega$  ( $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ ) und  $\Delta u = 0$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ .

**Bemerkung 9.1.6/5**

Dirichlet-Problem für Poissongleichung:

$$(9.9) \quad \begin{aligned}
 -\Delta u &= f \quad \text{auf } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ beschränkt} \\
 u|_{\partial\Omega} &= g \quad \text{auf } \Omega
 \end{aligned}$$

Annahme:  $\exists w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  mit  $-\Delta w = f$  auf  $\Omega$ . Dann Ansatz:  $u = v + w$ . (Bestimme  $v$ , so dass  $u$  in Gleichung 9.9 erfüllt ist.)

$u$  erfüllt die Gleichung 9.9  $\Leftrightarrow \Delta v = 0$  auf  $\Omega$  und  $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} + w|_{\partial\Omega} = g \Leftrightarrow v|_{\partial\Omega} = g - w|_{\partial\Omega} = \varphi$ .

---

<sup>2</sup>Abschätzung unabhängig von  $x$

**Folgerung 9.1.6/6**

Sei  $\Omega$  eine Kugel  $K_R(0)$  mit Radius  $R$  um  $0$  und  $g$  eine stetige Funktion  $g: \partial K_R \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f \in C^1(K_R) \cap C(\overline{K_R})$ . Dann ist

$$w(x) = - \int_{\Omega} \Gamma(|x-y|) f(y) dy \quad (\text{Newton-Potential})$$

$$v(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{|\omega_n|R} \int_{|x-y|=R} \frac{g(y) - w(y)}{|x-y|^n} dS(y)$$

$\Rightarrow u(x) = v(x) + w(x)$  ist die Lösung des Dirichlet-Problems ([Gleichung 9.9](#)) für die Kugel.

## 9.2 Cauchy-Probleme

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Cauchy- oder Anfangswertproblemen.

### 9.2.1 Die Wärmeleitungsgleichung

Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  ein Punkt im  $\mathbb{R}^n$  (Ortskoordinate) und  $t \in \mathbb{R}$  (Zeit) sowie  $u = u(x, t)$

Gegeben ist  $f(x, t)$  und gelöst werden soll folgende Gleichung:

$$(9.10) \quad u_t(x, y) - a^2 \Delta u(x, t) = f(x, t)$$

Die Gleichung heißt *Wärmeleitungsgleichung* oder *Diffusionsgleichung*.

Gesucht ist  $u(x, t)$  mit  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $t > 0$ .

Diese Gleichung ist ein Spezialfall einer *parabolischen Differentialgleichung*:

$$u_t - \operatorname{div} K \operatorname{grad} u + \langle \vec{b}, \operatorname{grad} u \rangle + cu = f(x, t)$$

*Wärmeleitungsgleichung*  
*Diffusionsgleichung*  
*parabolischen Differentialgleichung*

**Definition 9.2.1/1 (Cauchyproblem für Wärmeleitungsgleichung)**

Gegeben sei  $f(x, t)$  und  $u_0(x)$  und gesucht ist  $u(x, t)$ , so dass

$$u_t - \Delta u = f(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

Damit ist ein *Anfangswertproblem* beschrieben.

*Anfangswertproblem*

o. B. d. A. ist  $a^2 = 1$ , sonst muss man noch eine Koordinatentransformation durchführen  $u(x, t) = u(\frac{x}{a}, t)$ ,  $\tilde{f}(x, t) = f(\frac{x}{a}, t)$ .

## 9 Partielle Differentialgleichungen

### Lemma 9.2.1/2 (Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung)

Sei  $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ . Wir definieren eine Funktion

$$\Phi(x, t) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Dann gilt:

- (1)  $\Phi_t(x, t) - \Delta\Phi(x, t) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $t > 0$
- (2) Für alle  $t > 0$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1$$

BEWEIS:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) &= -\frac{n}{2} t^{-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \frac{|x|^2}{4t^2} \\ &= t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left( \frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) &= t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left( -\frac{2x_j}{4t} \right) = t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left( -\frac{x_j}{2t} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left( t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) &= t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left( \frac{x_j^2}{4t^2} - \frac{1}{2t} \right) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Laplace-Operator

$$\Delta \left( t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left( \frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t} \right)$$

$$\Rightarrow \Phi_t = \Delta(\Phi)$$

Es ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{4t}} dx$$

$$= \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_j^2}{4t}} dx_j$$

Nach Satz von Fubini

$$= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4t}} dr \right)^n$$

$$\text{Subst.: } \frac{r}{2\sqrt{t}} = \rho, dr = 2\sqrt{t}d\rho$$

$$= \left( 2\sqrt{t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho \right)^n = 2^n t^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} = (4\pi t)^{\frac{n}{2}} \quad \blacksquare$$



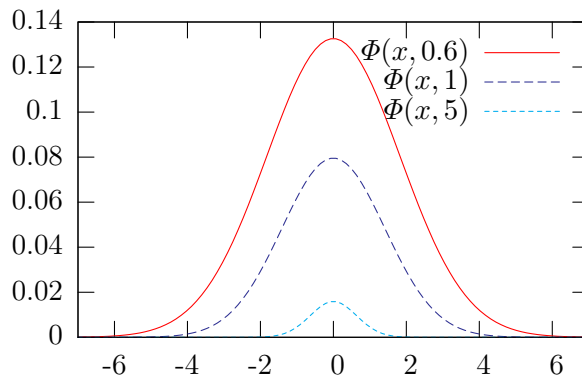


Abbildung 9.3: Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung (Lemma 9.2.1/2) im  $\mathbb{R}^3$  für verschiedene  $t$

**Bemerkung 9.2.1/3**

Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung  $\Phi(x, t)$  geht für  $t \rightarrow +0$  — wenn man sich also immer mehr zum Startzeitpunkt zurück begibt — für  $x = 0$  gegen Unendlich und für  $x \neq 0$  gegen 0. Es findet ein Temperatúrausgleich mit der Umgebung statt. Siehe [Abbildung 9.3](#)

$$\Phi(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

**Satz 9.2.1/4 (Cauchyproblem für die homogene Wärmeleitungsgleichung)**

Es sei  $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$  beschränkt. Es sei  $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t)u_0(y) dy$  mit  $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ . Dann gilt

(9.11)  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$  beschränkt

(9.12)  $u_t - \Delta u = 0$  auf  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$

(9.13)  $\lim_{(x,t) \rightarrow (x^0,0)} u(x, t) = u(x^0) \quad \forall x^0 \in \mathbb{R}^n$

$u$  ist eine Lösung des Cauchyproblems, d. h.

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy$$

BEWEIS:

Als ersten Schritt zeigen wir [Gleichung 9.11](#) und [Gleichung 9.12](#).  $|u_0(x)| \leq M$  auf  $\mathbb{R}^n \Rightarrow |u(x, t)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t)|u_0(y)| dy \leq M$  nach [Lemma 9.2.1/2](#).  $\Phi(x - y, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$  als Funktion von  $x$  und  $t$  für jedes  $y \in \mathbb{R}^n$ . Alle Ableitungen sind schnell fallend für  $|y| \rightarrow \infty$ . Das erlaubt uns die Ableitung unter das Integral zu ziehen.  $\Rightarrow \exists D_x^\alpha \Delta_t^\beta u(x, t) =$

## 9 Partielle Differentialgleichungen

$\int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha \Delta_t^\beta u(x, t) \Phi(x - y, t) u(y) dy$  für alle  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, b \in \mathbb{N}_0$  stetig und  $\Rightarrow u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$  und  $u_t - \Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} (\Phi_t(x - y, t) - \Delta \Phi(x - y, t)) u_0(y) dy = 0$  (nach Lemma 9.2.1/2) auf  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ .

Im zweiten Schritt zeigen wir noch Gleichung 9.13. **todo: schönes Bildchen mit Rechteck**

$u_0$  ist gleichmäßig stetig auf  $K_1(x^0)$ . Es sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert ein  $\delta(\varepsilon)$  und es gilt:  $|u_0(x) - u_0(y)| \leq \varepsilon$ , falls  $x, y \in K_1(x^0)$  und  $|x - y| \leq \delta(\varepsilon)$ . Außerdem können wir folgendermaßen argumentieren:

$$|u(x, t) - u_0(x)| = \text{Lemma 9.2.1/2} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Phi(y, \frac{1}{4})}_{=\pi^{-n/2} e^{-|y|^2}} u_0(x) dy \right|$$

Substitution im ersten Integral:  $\frac{x-y}{\sqrt{4t}} = z \Leftrightarrow y = x - \sqrt{4t}z$  und  $dy = (4t)^{n/2} dz$

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u_0(x)| &\leq \pi^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} |u_0(x - \sqrt{4t}z) - u_0(x)| dz \\ &= \pi^{-n/2} \int_{|z| \leq R} e^{-|z|^2} \underbrace{|u_0(x - \sqrt{4t}z) - u_0(x)|}_{\leq \varepsilon \text{ falls } t < t_0(\varepsilon)} dz + \pi^{-n/2} \underbrace{\int_{|z| > R} e^{-|z|^2} 2M dz}_{< \varepsilon, R \geq R(\varepsilon)} \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

wobei  $t_0(\varepsilon)$ , so dass  $\sqrt{4t}R(\varepsilon) \leq \delta(\varepsilon)$

Dann ist

$$|u(x, t) - u_0(x^0)| \leq \underbrace{|u(x, t) - u_0(x)|}_{< 2\varepsilon} + \underbrace{|u_0(x) - u_0(x^0)|}_{< \varepsilon} = 3\varepsilon$$

$|x - x^0| < \delta(\varepsilon), t < t_0(\varepsilon)$  ■

### Bemerkung 9.2.1/5

Aus  $u_0(x) \neq 0$  und  $u_0(y) \geq 0$  (Träger von  $u$  ist kompakt) folgt,  $u(x, t) > 0$  für alle  $x, t$ , d. h. unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

### Bemerkung 9.2.1/6

Die Lösung von Gleichung 9.10 ist i. A. nicht eindeutig. Beispielsweise gilt für die Gleichung

$$u(x, t) = \sum \frac{g^n(t)}{(2n)!} x^{2n} \text{ mit } g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^k}} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases} \text{ mit } k > 1 \text{ für alle } x:$$

$$u_t - u_{xx} = 0$$

$$u(x, 0) = 0$$

Aus der Zusatzbedingung  $u(x, t) \leq M e^{\lambda|x|^2}$  für alle  $x, t$  folgt die Eindeutigkeit der Lösung.

**Satz 9.2.1/7 (Cauchyproblem für die inhomogene Wärmeleitungsgleichung)**

Sei  $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  und beschränkt. Weiter sei:

$$\begin{aligned} u(x, t) &:= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t - s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y, s) dy ds \end{aligned}$$

Dann gilt:

- (1)  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$
- (2)  $u_t - \Delta u = f(x, t)$  auf  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$
- (3)  $\lim_{(x,t) \rightarrow (x^0, 0), x \in \mathbb{R}^n, t > 0} u(x, t) = 0$

BEWEIS:

Wir wenden *Duhamels Prinzip* an. Für  $0 < s < t$  ist  $v(x, t, s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy$  *Duhamels Prinzip*  
 Lösung des Anfangswertproblems. Für festes  $s$  ist  $v_t - \Delta v = 0$  und für  $t = s$  ist  $v(x, s, s) = f(x, s)$ . Dann ist  $u(x, t) = \int_0^t v(x, t, s) ds$  eine Lösung von  $u_t - \Delta u = f(x, t)$ . Wir zeigen dies für  $f \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$  und  $\text{supp } f$  kompakt. Der Beweis wird dabei nicht allgemein geführt, sondern wir machen einige Einschränkungen.

Es gilt:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) dy ds$$

9 Partielle Differentialgleichungen

durch Differentiation erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 u_t(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \frac{\partial}{\partial t} (f(x - y), t - s) dy ds \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy \\
 \Rightarrow u_t - \Delta u &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) (f(x - y, t - s)) dy ds \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy \\
 &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \left( -\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x - y, t - s) dy ds \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy \\
 &= \underbrace{\int_{\varepsilon}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \left( -\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x - y, t - s) dy ds}_{=: A_\varepsilon} \\
 &\quad + \underbrace{\int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \left( -\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) dy ds}_{=: B_\varepsilon} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy}_{=: C_0} \\
 &= A_\varepsilon + B_\varepsilon + C_0
 \end{aligned}$$

Es gilt  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varepsilon = 0$  und  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon = f(x, t) - C_0$ .

$$\begin{aligned}
 |B_\varepsilon| &= \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) ds dy \sup_{y,s} \left| \frac{\partial f}{\partial s} + \Delta f(y, s) \right| \\
 &\leq \varepsilon \sup_{y,s} \left| \frac{\partial f}{\partial s} + \Delta f(y, s) \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \\
 A_\varepsilon &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_y \Phi(y, s) f(x-y, t-s) dy ds + \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial s} \Phi(y, s) f(x-y, t-s) dy ds \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \varepsilon) f(x-y, t-\varepsilon) dy - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x-y, 0) dy}_{=C_0} \\
 \Rightarrow A_\varepsilon &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left| \frac{\partial}{\partial s} - \Delta \right| \Phi(y, s) f(x-y, t-s)}_{=0} dy ds - C_0 + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \varepsilon) f(x-y, t-s) dy \\
 \Rightarrow A_\varepsilon &= -C_0 + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, \varepsilon) f(y, t-\varepsilon) dy \\
 &= -C_0 + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, \varepsilon) (f(y, t-\varepsilon) - f(y, t)) dy + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, \varepsilon) f(y, t) dy}_{\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(y, t)} \\
 &\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(x-y, \varepsilon)| \underbrace{|f(y, t-\varepsilon) - f(y, t)|}_{\leq \delta} dy \leq \delta \\
 |u(x, t)| &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Phi(x-y, t-s)}_{=1} dy ds \sup_{y,s} |f(y, s)| \\
 &\leq t \sup_{y,s} |f(y, s)| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0
 \end{aligned}$$

■

**Bemerkung 9.2.1/8**

Betrachten das Cauchyproblem  $u_t - \Delta u = f, u(x, 0) = u_0$ . Ansatz:  $u = v + w$  mit:

$$\begin{array}{ll}
 v_t - \Delta v = 0 & w_t - \Delta w = f \\
 \underbrace{v(x, 0) = u_0(x)} & \underbrace{w(x, 0) = 0} \\
 \Rightarrow \text{Satz 9.2.1/4} & \Rightarrow \text{Satz 9.2.1/7}
 \end{array}$$

### 9.2.2 Die eindimensionale Wellengleichung

Gegeben sei das Cauchyproblem mit  $c > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$  und vorgegebenem  $f, u_0, u_1$ :

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta u &= f(x, t) \\ u(x, 0) &= u_0(x) & u_t(x, 0) &= u_1(x) \end{aligned}$$

Gesucht ist  $u(x, t)$ .

#### Satz 9.2.2/1 (Allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung, Formel von d'Alembert)

Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $u: \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $u \in C^2(\mathbb{R} \times I)$ .  $u$  ist genau dann eine Lösung von  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ , wenn gilt:

$$u(x, t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct) \quad \varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R}) \text{ beliebig}$$

BEWEIS:

Wir machen eine Koordinatentransformation.

$$\begin{aligned} \xi &= x - ct \sim x = 1/2(\xi + \tau) \\ \tau &= x + ct \sim t = 1/2c(\tau - \xi) \\ \Rightarrow u(x, t) &= u(1/2(\xi + \tau), 1/2c(\tau - \xi)) = v(\xi, \tau) \\ \Rightarrow u_x &= v_\xi + v_\tau \Rightarrow u_{xx} = v_{\xi\xi} + v_{\xi\tau} + v_{\tau\xi} + v_{\tau\tau} \\ \Rightarrow u_t &= v_\xi(-c) + v_\tau(c) \Rightarrow u_{tt} = v_{\xi\xi}c^2 + v_{\xi\tau}(-c^2) + v_{\tau\xi}(-c^2) + v_{\tau\tau}c^2 \\ \Rightarrow u_{tt} &= c^2 u_{xx} \Leftrightarrow v_{\xi\tau} = 0 \\ \Leftrightarrow v_\xi &= \tilde{\varphi}(\xi) \Leftrightarrow v(\xi, \tau) = \varphi(\xi) + \psi(\tau) \\ \Leftrightarrow u(x, t) &= \varphi(x - ct) + \psi(x + ct) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

#### Bemerkung 9.2.2/2

todo: Bild mit zwei Glockenkurven, linke ist  $\varphi(x)$ , rechte um  $ct$  verschoben

#### Satz 9.2.2/3

Sei  $f \in C(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ ,  $u_0, u_1 \in C(\mathbb{R})$

Das Cauchyproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= f(x, t) & (x \in \mathbb{R}, t > 0) \\ u(x, 0) &= u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x) & (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

besitzt höchstens eine Lösung  $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$

BEWEIS:

Für die Differenz zweier Lösungen  $w = u - v$  gilt:

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \quad w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0$$

Nach [Satz 9.2.2/1](#) ist

$$w(x, t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct) \quad (\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R}))$$

mit  $w(x, 0) = 0$  ergibt sich

$$\varphi(x) + \psi(x) = 0 \Rightarrow \varphi'(x) + \psi'(x) = 0$$

mit  $w_t(x, 0)$  ist

$$-c\varphi'(x) + c\psi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi'(x) = \psi'(x)$$

Diese beiden Bedingungen sind nur erfüllt, wenn  $\varphi'(x) = \psi'(x) = 0$  sind.  $\varphi$  und  $\psi$  sind also Konstanten, wobei  $\varphi(x) = a$  und  $\psi(x) = -a$ . ■

#### Bemerkung 9.2.2/4 (Lösungsansatz des Cauchy-Problems)

Wir verwenden  $u = v + w$  mit:

$$(9.14) \quad \begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} &= 0 \\ v(x, 0) &= u_0(x) \\ v_t(x, 0) &= u_1(x) \end{aligned}$$

$$(9.15) \quad \begin{aligned} w_{tt} - c^2 w_{xx} &= f \\ w(x, 0) &= 0 \\ w_t(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

zu [Gleichung 9.14](#):

$$(9.16) \quad \begin{aligned} v(x, t) &= \varphi(x - ct) + \psi(x + ct) \\ v(x, 0) &= \varphi(x) + \psi(x) = u_0 \\ v_t(x, 0) &= -c\varphi'(x) + c\psi'(x) = u_1(x) \\ \implies c\varphi'(x) + c\psi'(x) &= cu_0'(x) \wedge -c\varphi'(x) + c\psi'(x) = u_1(x) \\ \implies 2c\psi'(x) &= cu_0'(x) + u_1(x) \\ \implies \psi(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(y) dy + a \end{aligned}$$

$\implies$  mit [Gleichung 9.16](#)

$$\varphi(x) = u_0(x) - \psi(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(y) dy - a$$

⇒

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{1}{2}u_0(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} u_1(y) dy + \frac{1}{2}u_0(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} u_1(y) dy \\ &= \frac{1}{2}(u_0(x - ct) + u_0(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy \end{aligned}$$

**Satz 9.2.2/5**

Es seien  $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ . Dann ist

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x - ct) + u_0(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Cauchy-Problems

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 & (x \in \mathbb{R}, t > 0) \\ u(x, 0) &= u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x) & (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

**Bemerkung 9.2.2/6**

Für die Lösung  $u(x, t)$  in einem Punkt benötigt man nur die Information von  $u_0$  in den Punkten  $(x - ct, 0)$  und  $(x + ct, 0)$  und die Summe der Werte von  $u_1$  auf der  $x$ -Achse zwischen  $(x - ct, 0)$  und  $(x + ct, 0)$ . Alle Werte für die Lösung liegen also in der „Vergangenheit“ –  $u(x, \tilde{t})$  wird nur von  $u_0$  und  $u_1$  für  $t < \tilde{t}$  beeinflusst.

$u_0$  hat nur in einem Intervall  $t \in [t_0, t_1]$  auf die Lösung einen Einfluss.  $u_1$  hingegen hat einen Einfluss ab einem bestimmten Zeitpunkt  $t \geq t_0$ .

todo: Bild vom „Vergangenheitskegel“

**Satz 9.2.2/7**

Es sei  $f \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ . Dann ist

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy ds$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Cauchy-Problems

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= f(x, t) \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0 \end{aligned}$$



BEWEIS:

Um zu überprüfen, ob die gegebene Gleichung wirklich die Lösung ist, prüfen wir, ob sie die Bedingungen des Cauchy-Problems erfüllt. Dabei sind die Ableitungen von  $u(x, t)$  notwendig, was sich etwas aufwendig gestaltet, da  $x$  und  $t$  in beiden Integralen vorkommen. Daher formen wir zuvor etwas um:

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} F(x, t, t), \text{ wobei } F(x, t, z) = \int_0^z \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy ds$$

Für die Ableitungen bzgl.  $x$  ergibt sich also

$$F_x = \int_0^z f(x+c(t-s), s) - f(x-c(t-s), s) ds$$

$$F_{xx} = \int_0^z f_x(x+c(t-s), s) - f_x(x-c(t-s), s) ds$$

mit  $z = t$  ergibt sich

$$c^2 u_{xx}(x, t) = \frac{c}{2} \int_0^t f_x(x+c(t-s), s) - f_x(x-c(t-s), s) ds$$

Für die Ableitungen nach  $t$  ist zu beachten, dass  $z$  eine Funktion von  $t$  ist.

$$u_t = \frac{1}{2c} \int_0^z f(x+c(t-s), s)c - f(x-c(t-s), s)(-c) ds \Big|_{z=t} + \underbrace{\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, z) dy}_{=0} \Big|_{z=t}$$

$$u_{tt} = \frac{1}{2} \int_0^z f_x(x+c(t-s), s)c + f_x(x-c(t-s), s)(-c) ds \Big|_{z=t}$$

$$+ \frac{1}{2c} \left[ f(x+c(t-s), s)c + f(x-c(t-s), s)c \right]_{s=t}$$

$$= c^2 u_{xx} + f(x, t) \Rightarrow f(x, t) = u_{tt} - c^2 u_{xx}$$

$\Rightarrow$  Wellengleichung erfüllt.

Anfangsbedingung: Für Ableitung gegen  $x$  braucht man nur die Umgebung von  $x$  zu untersuchen. Dazu wählen wir ein endliches Rechteck  $Q$  ( $\Rightarrow$  kompakt). Damit ist  $f$  beschränkt ( $|f(y, s)| \leq M$  auf  $Q$ ) und  $f_x$  ist beschränkt ( $|f_x(y, s)| \leq M$  auf  $Q$ ). Nach [Bemerkung 9.2.2/6](#) benötigt man für die Berechnung des Wertes nur Werte aus dem Gebiet  $Q$  („Vergangenheitskegel“).

$$|u(x, t)| \leq \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} \underbrace{|f(y, s)|}_{\leq M \text{ auf } Q} dy ds \leq M \int_0^t (t-s) ds = M \frac{t^2}{2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

In einem solchen lokalen Gebiet  $Q$  kann man eine solche Abschätzung produzieren und die Anfangsbedingung  $u(x, 0)$  ist 0.

Für die Ableitung gilt:

$$|u_t(x, t)| \leq \frac{1}{2c} \int_0^t \underbrace{|f(x+c(t-s), s) + f(x-c(t-s), s)|}_{\leq 2M} ds = Mt \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Damit ist auch die zweite Anfangsbedingung erfüllt. ■

**Bemerkung 9.2.2/8**

Analog zu [Bemerkung 9.2.2/6](#): Für die Lösung in einem Punkt  $u(x, t)$  sind nur die Werte der Funktion innerhalb des Vergangenheitskegels notwendig. Alles, was außerhalb des Kegels liegt, wird für die Lösung nicht benötigt.

todo: Bild vom Vergangenheitskegel

**9.2.3 Die dreidimensionale Wellengleichung**

Cauchy-Problem:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta u &= f(x, t) && (x \in \mathbb{R}^3, t > 0) \\ u(x, 0) &= u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x) && (x \in \mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

o. B. d. A.  $c=1$ , sonst  $\tilde{u}(x, t) = u(x, \frac{t}{c}) \Leftrightarrow u(x, t) = \tilde{u}(x, ct)$

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta u = f(x, t) &\Leftrightarrow c^2 \tilde{u}_{tt}(x, ct) - c^2 \Delta \tilde{u}(x, ct) = f(x, t) \\ &\Leftrightarrow \tilde{u}_{tt} - \Delta \tilde{u} = \frac{1}{c^2} f(x, ct) = \tilde{f}(x, t) \end{aligned}$$

ohne Beweis: Das Cauchy-Problem hat höchstens eine Lösung!

**Satz 9.2.3/1**

Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:  $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3), u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ . Dann ist

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-y|=t} u_1(y) dS(y) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \int_{|x-y|=t} u_0(y) dS(y) \right)$$

(Anm.: mit  $|x - y| = t$  wird über den Rand der Kugel  $K_t(x)$  integriert.) die (eindeutig bestimmte) Lösung des Cauchy-Problems  $u_{tt} - \Delta u = 0$  mit den Anfangsbedingungen  $u(x, 0) = u_0(x)$  und  $u_t(x, 0) = u_1(x)$  ( $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$ ).

Die Gleichung heißt *Kirchhoff'sche Formel*.

*Kirchhoff'sche Formel*

**Bemerkung 9.2.3/2 (Betrachtungen zur Kirchhoff'schen Formel)**

Formt man die Kirchhoff'sche Formel etwas um, so erhält man

$$u(x, t) = t \underbrace{\left( \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|x-y|=t} u_1(y) dS \right)}_{=Mu_1(x,t)} + \frac{\partial}{\partial t} \left( t \underbrace{\left( \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|x-y|=t} u_0(y) dS \right)}_{=Mu_0(x,t)} \right)$$

wobei

$$Mg(x, t) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|x-y|=t} g(y) dS = \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=1} g(x + ty) dS$$

Diese Darstellung ist vorteilhaft, da der Parameter  $t$  nicht mehr in den Integralgrenzen auftaucht und nur noch unter dem Integral steht. Dies wird später vorteilhaft sein, wenn wir Ableitungen bilden müssen.

Diese Formel nennt man den *sphärischen Mittelwert* von  $g$ .

*sphärischen Mittelwert*

BEWEIS:

1. Schritt: Anfangsbedingungen sind erfüllt. Es gilt:

$$u(x, t) = t \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=1} u_1(x + ty) dS + \frac{\partial}{\partial t} \left( t \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=1} u_0(x + ty) dS \right)$$

Für  $t \rightarrow 0$  bekommen wir:

$$u(x, 0) = 0 \cdot u_1(x) + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{|y|=1} u_0(x) dS}_{=u_0(x)} + \left[ t \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|y|=1} u_0(x + ty) dS \right]_{t=0}$$

Überzeugen wir uns noch davon, dass der dritte Summand Null ist. Dafür muss der Integrand konstant sein, damit das Produkt mit  $t$  gegen Null geht.

$$(9.17) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{|y|=1} u_0(x + ty) dS = \int_{|y|=1} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x + ty) \cdot y_j dS$$

## 9 Partielle Differentialgleichungen

für  $t = 0$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{|y|=1} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) \cdot y_j dS &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \int_{|y|=1} y_j dS \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) \int_{|y|=1} \vec{e}_j \vec{n} dS \stackrel{\text{nach Gauß}}{=} \int_{|y|\leq 1} \operatorname{div} \vec{e}_j dy = 0 \end{aligned}$$

Es bleibt also  $u(x, 0) = u_0(x)$ .

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=1} u_1(x + ty) dS + t \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{|y|=1} u_1(x + ty) dS \right)}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \text{ nach Gleichung 9.17}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=1} u_0(x + ty) dS \right)}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \text{ nach Gleichung 9.17}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left( t \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|y|=1} u_0(x + ty) dS \right)}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \text{ nach Gleichung 9.17}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|y|=1} u_0(x + ty) dS}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \text{ nach Gleichung 9.17}} + \underbrace{\frac{t}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{|y|=1} u_0(x + ty) dS}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0} \end{aligned}$$

für  $t \rightarrow 0$  bleibt also  $u_t(x, 0) = u_1(x) + 0$ .

2. Schritt: Wir zeigen,  $u$  erfüllt homogene Wellengleichung

$$u(x, t) = \underbrace{tMu_1(x, t)}_{=:v(x,t)} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \underbrace{tMu_0(x, t)}_{=:w(x,t)} \right)$$

Wir zeigen:  $v$  und  $\frac{\partial}{\partial t}w$  erfüllen die homogene Wellengleichung.

Es gilt:

$$\begin{aligned} v_t &= Mu_1(x, t) + t \frac{\partial}{\partial t} Mu_1(x, t) \\ v_{tt} &= 2 \frac{\partial}{\partial t} Mu_1(x, t) + t \frac{\partial^2}{\partial t^2} Mu_1(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} Mu_1(x, t) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|y|=1} u_1(x + ty) dS \stackrel{\text{Gleichung 9.17}}{=} \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|x-y|=t} \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}} dS \end{aligned}$$

Wiederholung der Green'schen Sätze (Satz 8.2.3/6)

$$\int_B u \Delta v \, dy = \int_{\partial B} u \cdot \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \, dS - \int_B \nabla u \cdot \nabla v \, dy$$

mit  $u = 1$  ergibt sich

$$\int_B \Delta v \, dy = \int_{\partial B} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \, dS$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(Mu_1)(x, t) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{|y|=1} u_1(x + ty) \, dS \right) \\ &= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|x-y|=t} \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}} \, dS = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|x-y|\leq t} \Delta u_1 \, dy \end{aligned}$$

und weil es schon schön war, das ganze nochmal

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(Mu_1)(x, t) = -\frac{1}{2\pi t^3} \int_{|x-y|\leq t} \Delta u_1(y) \, dy + \frac{1}{4\pi t^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \underbrace{\int_0^t \int_{|x-y|=\rho} \Delta u_1(y) \, dS \, d\rho}_{=\int_{|x-y|=t} \Delta u_1(y) \, dS} \right)$$

$$(9.18) \quad t \frac{\partial^2}{\partial t^2} Mu_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi t^2} \int_{|x-y|\leq t} \Delta u_1(y) \, dy + \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-y|=t} \Delta u_1(y) \, dS$$

Aus Gleichung 40 und Gleichung 9.18 folgt

$$v_{tt} = \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-y|=t} \Delta u_1(y) \, dS$$

bleibt noch zu zeigen, dass  $v_{tt} = \Delta v$ . Andererseits ist

$$\begin{aligned} \Delta v(x, t) &= \frac{t}{4\pi} \Delta \left( \int_{|y|=1} u_1(x + ty) \, dS \right) = \frac{t}{4\pi} \int_{|y|=1} (\Delta u_1)(x + ty) \, dS \\ &= \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-y|=t} \Delta u_1(y) \, dS \\ &\Rightarrow \Delta v = v_{tt} \end{aligned}$$

## 9 Partielle Differentialgleichungen

$v$  und  $w$  unterscheiden sich nur darin, dass in  $v$   $u_1$  verwendet wird und in  $w$   $u_0$ . Die ganze Rechnung lässt sich also ebenso für  $w$  durchführen und es ergibt sich, dass  $w$  auch eine Lösung der Wellengleichung ist:  $w_{tt} = \Delta w$ . Wir wollen aber zeigen, dass  $w_t$  eine Lösung der Wellengleichung ist:

$$(w_t)_{tt} = (w_{tt})_t = (\Delta w)_t = \Delta w_t$$

(mit Hilfe des Satzes von Schwarz)

Also ergibt sich als Gesamtergebnis:  $v + w_t$  ist Lösung der homogenen Wellengleichung. ■

### Bemerkung 9.2.3/3 (Die Huygensche Eigenschaft – Schallausbreitung)

Modellierung:  $u(x, t) = p(x, t) - p_0$  mit  $p$  als Druck und  $p_0$  als Normalendruck,  $u_0(x)$  und  $u_1(x)$  sind dann die Abweichungen von  $p_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ .

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-y|=t} u_1(y) dS + \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|x-y|=t} \frac{\partial u_0}{\partial \vec{n}} dS + \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|x-y|=t} u_0(y) dS$$

Da nur über den Rand der Kugel um  $x$  integriert wird, wirken sich lokale Störungen ( $u_0$  oder  $u_1 \neq 0$ ) nur zu den Zeitpunkten aus, die  $u_0$  und  $u_1$  berücksichtigen. Bei einem beschränkten Träger von  $u_0$  bzw.  $u_1$  ist also eine lokale Störung nur in einem beschränkten Zeitraum wahrnehmbar – davor und danach nicht.

### Bemerkung 9.2.3/4 (Inhomogene Wellengleichung)

Vergleiche hierzu für  $n = 1$  den [Satz 9.2.2/7](#) und die Wärmeleitungsgleichung aus [Satz 9.2.1/7](#). Wir wenden wieder Duhamels Prinzip an:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f(x, t) & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0 & (x \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Für  $n = 1$  gilt nach [Satz 9.2.2/7](#):

$$u(x, t) = \int_0^t \underbrace{\left( \frac{1}{2} \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(y, s) dy \right)}_{=v(x, t, s)} ds$$

mit  $v_{tt} - \Delta v = 0$ , wobei  $\Delta v = v_{xx}$ , da  $n = 1$ , auf  $\mathbb{R} \times [s, \infty)$  für alle  $t > s \Leftrightarrow t - s > 0$ .

$$v(x, s, s) = 0 \quad v_t(x, s, s) = f(x, s)$$

Für  $n = 3$  machen wir den Ansatz:

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t, s) ds$$

wobei  $v(x, t, s) = \frac{1}{4\pi(t-s)} \int_{|x-y|=t-s} f(y, s) dS$ . Nach [Satz 9.2.3/1](#) ist  $v_{tt} - \Delta v = 0$  auf  $\mathbb{R}^3 \times (s, \infty)$  und  $v(x, s, s) = 0, v_{t(x,s,s)} = f(x, s)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) &= 0 \\
 u_t(x, t) &= \underbrace{v(x, t, t)}_{=0} + \int_0^t v_t(x, t, s) ds \Rightarrow u_t(x, 0) = 0 \\
 u_{tt} &= v_t(x, t, t) + \int_0^t v_{tt}(x, t, s) ds \\
 (9.19) \quad &= f(x, t) + \int_0^t v_{tt}(x, t, s) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\Delta u &= - \int_0^t \Delta v(x, t, s) ds \\
 (9.20) \quad &= - \int_0^t v_{tt}(x, t, s) ds
 \end{aligned}$$

Aus [Gleichung 9.19](#) und [Gleichung 9.20](#) folgt,  $u_{tt} - \Delta u = f(x, t)$ . Es ist:

$$u(x, t) = \int_0^t \left( \frac{1}{4\pi} \int_{|x-y|=t-s} \frac{f(y, s)}{t-s} dS(y) \right) ds$$

Wir substituieren:  $t - s = r \Leftrightarrow s = t - r, ds = -dr$ . Die neuen Grenzen sind nun  $t \rightarrow 0$ . Damit kann man auch das Integral rundrehen:  $\int_0^t = -\int_t^0$  und das  $-$  hebt sich mit dem  $-$  von  $-dr$  weg.

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^t \left( \int_{|x-y|=r} \frac{f(y, t - |x-y|)}{|x-y|} dy \right) dr \\
 (9.21) \quad &\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|x-y| \leq t} \frac{f(y, t - |x-y|)}{|x-y|} dy
 \end{aligned}$$

Man bezeichnet [Gleichung 9.21](#) auch als *retardiertes Potential*.

*retardiertes  
Potential*

**Satz 9.2.3/5**

Sei  $f \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ . Dann ist  $u(x, t)$  aus [Gleichung 9.21](#) die eindeutig bestimmte Lösung des Cauchyproblems  $u_{tt} - \Delta u = f(x, t)$  mit  $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$  und  $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ .

**Bemerkung 9.2.3/6**

**todo:** Bild vom Abhängigkeitsgebiet nur Wert von  $f(y, s)$  auf dem Kegelmantel werden zur Berechnung von  $u(x, t)$  benötigt.

### 9.2.4 Die zweidimensionale Wellengleichung

*Hadamardsche  
Abstiegsmethode*

Die Idee ist, eine „Abstiegsmethode“, die so genannte *Hadamardsche Abstiegsmethode*<sup>3</sup>, für homogene Gleichungen anzuwenden.

Es sei  $x = (x_1, x_2)$ . Weiter ist  $u(x, t)$  Lösung des Cauchyproblems  $u_{tt} - \Delta u = 0$  mit  $u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = u_1(x)$ . Wir setzen:

$$\begin{aligned} v(x, x_3, t) &:= u(x, t) && \forall (x, x_3) \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ v_0(x, x_3) &:= u_0(x) && \forall (x, x_3) \in \mathbb{R}^3 \\ v_1(x, x_3) &:= u_1(x) && \forall (x, x_3) \in \mathbb{R}^3 \\ \Rightarrow v_{tt} - \Delta v &= u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \\ v(x, x_3, 0) &= u_0(x) = v_0(x, x_3) \\ v_t(x, x_3, 0) &= u_1(x) = v_1(x, x_3) \end{aligned}$$

Aus [Satz 9.2.3/1](#) folgt:

$$u(x, t) = v(x, 0, t) = t(Mv_1)(\underbrace{x, 0}_{\bar{x}}, t) + \frac{\partial}{\partial t}(t(Mv_0)(\underbrace{x, 0}_{\bar{x}}, t))$$

Es gilt:

$$(Mv_1)(\bar{x}, t) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|y-\bar{x}|=t} v_1(y, y_3) dS = \dots = \frac{1}{2\pi t} \int_{|y-\bar{x}| \leq t} \frac{u_1(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy$$

Hieraus ergibt sich der folgende:

#### **Satz 9.2.4/1**

Es sei  $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2), u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Dann ist

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|x-y| \leq t} \frac{u_1(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi} \int_{|x-y| \leq t} \frac{u_0(y)}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} dy$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Cauchyproblems mit  $u_{tt} - \Delta u = 0$  für  $x \in \mathbb{R}^2, t > 0$  und  $u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x)$ .

Die inhomogene Gleichung ist wie in [Bemerkung 9.2.3/4](#):

$$\begin{aligned} v(x, t, s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|x-y| \leq t-s} \frac{f(y, s)}{\sqrt{(t-s)^2 - |x-y|^2}} dy \\ u(x, t) &= \int_0^t v(x, t, s) ds \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>benannt nach dem französischen Mathematiker Jacques Salomon Hadamard (1865–1963)



**Satz 9.2.4/2**

Es sei  $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ . Dann ist

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{|x-y| \leq t-s} \frac{f(y, s)}{\sqrt{(t-s)^2 - |x-y|^2}} dy ds$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Cauchyproblems  $u_{tt} - \Delta u = f(x, t)$  mit  $x \in \mathbb{R}^2, t > 0$  und  $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ .

**Bemerkung 9.2.4/3**

- (1) zu Satz 9.2.4/1 **todo: Bild von Abhängigkeitsgebiet**
- (2) zu Satz 9.2.4/2 **todo: Bild von Abhängigkeitsgebiet**

**9.3 Separationsansätze (Fourier'sche Methode)**

**9.3.1 Wellengleichung – schwingende Saite**

Wir betrachten das Anschlagen oder Zupfen einer Saite eines Instruments der Länge  $l$ . Die Anfangsauslenkung sei durch  $u_0(x)$  und die Anfangsgeschwindigkeit durch  $u_1$  gegeben. Wie verändert die Saite ihre Lage über die Zeit?

- (1)  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (x \in (0, l), t > 0)$
- (2)  $u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (t > 0)$  ist die Randbedingung und  $u_1(x)$  die Anfangsgeschwindigkeit
- (3)  $u(x, 0) = u_0(x) \quad (x \in (0, l))$  und  $u_t(x, 0) = u_1(x)$  sind die Anfangsbedingungen.

Diesen Typ von Fragestellungen bezeichnen wir als *Rand-Anfangswert-Problem* für die homogene Wellengleichung. *Rand-Anfangswert-Problem*

Noch einige Bezeichnungen:  $c = \sqrt{\frac{s}{\rho}}$ , wobei  $s$  die Spannung und  $\rho$  die Dichte der Saite ist.

**Separation**

Man finde alle Lösungen der Form  $u(x, t) = X(x)T(t)$  von Punkt 1 und Punkt 2!

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = XT'' - c^2 X''T = 0 \Leftrightarrow c^2 X''T = XT'' \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = \lambda$$

Solch ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  existiert für alle  $x$  und  $t$ .

## 9 Partielle Differentialgleichungen

Die obigen Gleichungen sind zwei gewöhnliche Differentialgleichungen. Wir lösen die linke und die rechte Seite separat (Daher der Name „Separationsansatz“). In beiden Fällen muss  $\lambda$  herauskommen.

Man löse das Randwertproblem (1) „Bestimme  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so dass  $X'' = \lambda X$  auf  $(0, l)$  und  $X(0) = X(l) = 0$ “ und die gewöhnliche Differentialgleichung (2)  $T'' = c^2 \lambda T$  für  $\lambda$  aus dem Randwertproblem (1).

### Lösen des Randwertproblems (1)

Ansatz:  $X = e^{\mu x} \Rightarrow$  charakteristisches Polynom:  $\mu^2 = \lambda$

1. Fall: Für  $\lambda > 0$  ergibt sich  $\mu_{1/2} = \pm\sqrt{\lambda}$ . Die allgemeine Lösung lautet also  $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ . Die Randbedingung (Punkt 2)  $X(0) = X(l) = 0$  liefert  $c_1 + c_2 = 0$  und  $c_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0$ . Da  $c \geq 0$  (nach Definition), kann nur gelten  $c_1 = c_2 = 0$ .

Dieses Ergebnis ist jedoch uninteressant, da dies bedeutet, dass die Spannung der Saite Null ist.

2. Fall: Für  $\lambda = 0$  ergibt sich analog  $c_1 = c_2 = 0$ .

3. Fall: Für  $\lambda < 0$  ergibt sich  $\mu_{1/2} = \pm i\sqrt{-\lambda}$ . Daraus folgt dann die allgemeine Lösung:  $X = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$  für  $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ .

$X(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$  und  $X(l) = 0 \Leftrightarrow c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}l) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0^4$  oder  $\sqrt{-\lambda}l = k\pi$  bzw.  $\lambda = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$  für  $(k \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow$  Lösung für  $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $X_k(x) = c_k \sin \frac{k\pi}{l}x$  ( $c_k \in \mathbb{R}$ )

### Lösen der Differentialgleichung (2) für $\lambda = \lambda_k$

$$T_k'' + c^2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 T_k = 0$$

Ansatz:  $T_k = e^{\rho t} \Rightarrow \rho^2 + \left(\frac{ck\pi}{l}\right)^2 = 0, \rho_{1/2} = \pm i\frac{ck\pi}{l}$

$\Rightarrow T_k(t) = A_k \cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ck\pi}{l}t\right)$  mit  $k \in \mathbb{N}, A_k, B_k \in \mathbb{R}$

Damit können wir jetzt das gesamte Problem lösen – Lösungen der Separation:

$$U_k(x, t) = \left(a_k \cos \frac{ck\pi}{l}t + b_k \sin \frac{ck\pi}{l}t\right) \sin \frac{k\pi}{l}x$$

mit den Freiheitsgraden  $k \in \mathbb{N}$  und  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ .

---

<sup>4</sup>Allerdings soll  $c_1 \neq c_2$  sein. Ansonsten hätten alle Fälle nur triviale Lösungen. Wir suchen aber andere Lösungen.

**Bemerkung 9.3.1/1**

$\sum_{\text{endl}} u_k(x, t)$  ist ebenfalls Lösung der Separation.

Jetzt Übergang zu einer unendlichen Reihe: Ist  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t)$  eine Lösung? Für  $u_k = 0$  ist natürlich auch die Summe 0 und somit eine Lösung der Differentialgleichung. Die Frage ist nun, ob man  $a_k$  und  $b_k$  so bestimmen kann, dass sie der Randbedingung genügen.

**Superposition**

Man finde  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ , so dass

$$u(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{ck\pi}{l} t + b_k \sin \frac{ck\pi}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

die Anfangsbedingung (Punkt 3) erfüllt!

d. h.

$$(9.22) \quad u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x = u_0(x)$$

$$(9.23) \quad u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{ck\pi}{l} b_k}_{=: \tilde{b}_k} \sin \frac{k\pi}{l} x = u_1(x)$$

Beim Ableiten von  $u$  nach  $t$  haben wir den Konvergenzradius der Reihe ignoriert (nicht betrachtet oder halt o. B. d. A. machbar)

Wir haben jetzt zwei gleiche Probleme gefunden: einmal für  $u_0$  mit  $a_k$  und  $u_1$  mit  $\tilde{b}_k$ .

**Berechnung der Fourierkoeffizienten  $a_k, b_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ )**

Verwende:

$$\int_0^l \sin \left( \frac{k\pi}{l} x \right) \sin \frac{j\pi}{l} x dx = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \frac{l}{2} & j = k \end{cases}$$

denn:

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \sin\frac{j\pi}{l}x \, dx &= \frac{l}{\pi} \int_0^\pi \sin kx \sin jx \, dx \\ &= \frac{l}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2}(\cos(k-j)x - \cos(k+j)x) \, dx \\ &= \frac{l}{2\pi} \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \int_0^\pi (1 - \cos 2kx) \, dx = \pi & k = j \end{cases} \end{aligned}$$

Machen wir erstmal eine Analyse, was wir erhalten: Annahme [Gleichung 9.22](#) gilt, dann haben wir

$$\begin{aligned} \int_0^l \left(\sin \frac{k\pi}{l}\right)x u_0(x) \, dx &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j \int_0^l \sin\left(\frac{j\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \, dx & (k \in \mathbb{N}) \\ &= a_k \int_0^l \left(\sin \frac{k\pi}{l}x\right)^2 \, dx = a_k \frac{l}{2} \end{aligned}$$

Wenn es also möglich ist, dann müssen die Koeffizienten so aussehen:

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{k\pi}{l}x \, dx \quad (k \in \mathbb{N})$$

Nehmen wir an [Gleichung 9.23](#) gilt und wir bekommen heraus, dass

$$b_k = \frac{2}{ck\pi} \int_0^l u_1(x) \sin \frac{k\pi}{l}x \, dx \quad (k \in \mathbb{N})$$

$a_k$  und  $b_k$  bezeichnet man als die Fourierkoeffizienten von  $u_0$  und  $u_1$ .

### Interpretation der Theorie der Fourierreihen

Von der Musik her kennen wir Schwingungen, die sich dadurch auszeichnen, dass sie periodisch sind, d. h.  $f(t + T) = f(t)$ . Das kleinste  $T$  bezeichnet man als die Schwingungsdauer und  $\nu = \frac{1}{T}$  als die (Grund-)Frequenz<sup>5</sup>. Die Fouriertheorie besagt, dass sich  $f$  durch Teilschwingungen  $f_k$  beschreiben lässt. (Wichtige Aussage der Fouriertheorie:

---

<sup>5</sup> $\omega = 2\pi\nu$  ist die Kreisfrequenz.

### 9.3 Separationsansätze (Fourier'sche Methode)

Jede Schwingung lässt sich als Summe (Überlagerung) von Einzelschwingungen darstellen)

$$f_k(t) = a_k \cos \frac{ck\pi}{l}t + b_k \sin \frac{ck\pi}{l}t$$

$\Rightarrow T_k = \frac{2l}{c}k$  mit  $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \nu_k = \frac{c}{2l}k$ . Dabei ist  $\frac{c}{2l}$  die Grundfrequenz und  $2l$  muss ganzzahlig sein. Den Wert  $k = 1$  bezeichnet man als den Grundton und  $k > 1$  als Obertöne. Dies entspricht der  $k$ -fachen Frequenz der Frequenz des Grundtons.

Wandeln wir unser Rand-Anfangswertproblem etwas ab und setzen für [Punkt 1](#)  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t)$  mit  $x \in (0, l)$  und  $t > 0$ .

Machen wir dazu den Ansatz:  $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ , wobei

- (1)  $w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0$
- (2)  $w(0, t) = w(l, t) = 0$
- (3)  $w(x, 0) = u_0(x)$  und  $w_t(x, 0) = u_1(x)$

Dieses Problem ist wieder das ursprüngliche Problem.

Als weiterer Fall ergibt sich:

- (1)  $v_{tt} - c^2 v_{xx} = f(x, t)$  (inhomogene Differentialgleichung!)
- (2)  $v(0, t) = v(l, t) = 0$
- (3)  $v(x, 0) = v_t(x, 0) = 0$

Dafür machen wir folgenden Ansatz:

$$v(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi}{l}x$$

Man entwickle  $f(x, t)$  bei festem  $t$  in eine Sinusreihe, d. h.

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l}x$$

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{k\pi}{l}x dx$$

( $k \in \mathbb{N}, t > 0$ )

Dann ist  $v(x, t)$  Lösung  $\Leftrightarrow T_k'' + c^2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 T_k = f_k(t)$  und  $T_k(0) = T_k'(0) = 0$  mit  $k \in \mathbb{N}$ . Denn wenn wir einen Koeffizientenvergleich machen, erhalten wir  $v_{tt} - c^2 v_{xx} = f(x, t) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (T_k'' \sin(\frac{k\pi}{l}x) - c^2 (\frac{k\pi}{l})^2 T_k \sin(\frac{k\pi}{l}x)) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin(\frac{k\pi}{l}x)$ .

Das heißt, wir führen die Lösung des Randwertproblem auf eine Fourierreihenentwicklung und ein Randwertproblem zurück.

**(C) Rand-Anfangswert-Problem**

$$(9.24) \quad u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t) \quad x \in (0, l), t > 0$$

$$(9.25) \quad \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t) \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \quad t > 0 \text{ (Randbedingung inhomogen)}$$

$$(9.26) \quad \begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) \\ u_t(x, 0) &= u_1(x) \end{aligned} \quad x \in (0, l) \text{ (Anfangsbedingung inhomogen)}$$

$$(9.27)$$

**Lösungsmethode**

Ansatz:  $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ , wobei  $w(x, t) := \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)) \Rightarrow w(x, t)$  erfüllt die Randbedingung (Gleichung 9.25) und  $w_{xx} = 0$ .

$\Rightarrow u(x, t)$  ist Lösung des Rand-Anfangswert-Problems  $\Leftrightarrow v$  die untenstehenden Bedingungen erfüllt.

$$(9.28) \quad v_{tt} - c^2 v_{xx} = f(x, t) - w_{tt}(x, t)$$

neue Randbedingung:

$$(9.29) \quad v(0, t) = v(l, t) = 0$$

neue Anfangsbedingung:

$$(9.30) \quad v(x, 0) = u_0(x) - w(x, 0)$$

$$(9.31) \quad v_t(x, 0) = u_1(x) - w_t(x, 0)$$

Dieses neue Rand-Anfangswert-Problem entspricht dem Problem (B).

**9.3.2 Fourierreihen**

**Das trigonometrische System**

Sei  $l > 0$  und wir betrachten die Funktionen, die auf dem Intervall  $[-l, l]$  (vorzugsweise  $l = \pi$ ) Riemann-integrierbar sind. Wir betrachten diesen Raum  $R([-l, l])$  als einen euklidischen Vektorraum mit

### 9.3 Separationsansätze (Fourier'sche Methode)

- dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-l}^l f(x) \overline{g(x)} dx \quad f, g \in R([-l, l])$$

- und der Norm

$$\|f\| := \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \left( \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Man kann jetzt leicht zeigen, dass all diese Integrale existieren (da Riemann-integrierbar), das Skalarprodukt alle Bedingungen eines Skalarprodukts und die Norm alle Bedingungen einer Norm erfüllt. Also ist  $R([-l, l])$  ein normierter linearer Raum.

In einem solchen Raum konvergiert  $f_j \rightarrow f$  in  $R([-l, l])$  genau dann, wenn  $\|f_j - f\| = (\int_{-l}^l |f_j(x) - f(x)|^2 dx)^{1/2}$  gegen 0 (für  $j \rightarrow \infty$ ) konvergiert.

Wir betrachten ein Orthonormalsystem in dem Raum

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}} \right\}_{=:\varphi_0} \cup \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x}_{=:\varphi_k}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x}_{=:\psi_k} : k \in \mathbb{N} \right\}$$

d. h. es gilt für  $j \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}$

$$\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

$$\langle \psi_j, \psi_k \rangle = \delta_{jk}$$

$$\langle \varphi_j, \psi_k \rangle = 0$$

Der Wunsch ist nun:

$$f = \langle f, \varphi_0 \rangle \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k + \langle f, \psi_k \rangle \psi_k)$$

im Sinne der Konvergenz bezüglich  $\|\cdot\|$ .

## 9 Partielle Differentialgleichungen

Fourierkoeffizienten: Es ist

$$\begin{aligned}\langle f, \varphi_0 \rangle \varphi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2l}} \int_{-l}^l f(x) \frac{1}{\sqrt{2l}} dx = \frac{1}{l} \underbrace{\int_{-l}^l f(x) dx}_{=: a_0} \cdot \frac{1}{2} \\ \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k &= \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \\ &= \frac{1}{l} \underbrace{\int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx}_{=: a_k, k \in \mathbb{N}} \cos \frac{k\pi}{l} x \\ \langle f, \psi_k \rangle \psi_k &= \frac{1}{l} \underbrace{\int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx}_{=: b_k, k \in \mathbb{N}} \sin \frac{k\pi}{l} x\end{aligned}$$

*Fourierkoeffizienten*  $a_k$  und  $b_k$  heißen *Fourierkoeffizienten* von  $f$ .

*Fourierreihe* *Fourierreihe* zur Rekonstruktion der Funktion mithilfe der Fourierkoeffizienten:

$$s_n f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left( a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right)$$

ist die  $n$ -te Partialsumme der Fourierreihe, wobei  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Es gilt (ohne Beweis):  $\|s_n f - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , d. h.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right) = f$$

im Sinne der Normkonvergenz. Somit kann, im Sinne der Konvergenz, jede riemann-integrierbare Funktion als Fourierreihe dargestellt werden.

*Parseval'sche Gleichung*

Für Fourierreihen gilt die *Parseval'sche Gleichung*: Es gilt (ohne Beweis)  $f \in R([-l, l]) \Rightarrow \|f\|^2 = |\langle f, \varphi_0 \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|\langle f, \varphi_k \rangle|^2 + |\langle f, \psi_k \rangle|^2)$  d. h.

$$(9.32) \quad \|f\|^2 = l \left( \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \right)$$

(das ist die Parseval'sche Gleichung)



### 9.3 Separationsansätze (Fourier'sche Methode)

Stellt man eine weitere Anforderung (punktweise Konvergenz  $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < \infty$ ) an die Fourierkoeffizienten, so erhält man eine gleichmäßige Konvergenz für die Fourierreihe

$$\sup_{x \in [-l, l]} |s_n f(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

da  $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < \infty$  eine obere Majorante für die Fourierreihe ist.

Da jedes Folgenglied stetig ist, ist auch  $f$  stetig und jedes Folgenglied periodisch ( $f(-l) = f(l)$ ). Somit muss auch die Funktion periodisch sein:  $f \in C_{\text{periodisch}}([-l, l])$ .

Die Umkehrung gilt nicht! Es existiert ein  $f \in C_{\text{periodisch}}([-l, l])$  mit  $(S_n f(x_0))_n$  divergent.

Mithilfe weiterer Bedingungen an die Funktion  $f$  kann man sichern, dass die Fourierreihe punktweise konvergiert; z. B.:  $x_0 \in [-l, l]$

$$\begin{aligned} \exists f'_+(x_0) &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h} \\ \exists f'_-(x_0) &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x_0 - 0) - f(x_0 - h)}{h} \end{aligned}$$

Die Funktion muss nicht stetig und nicht differenzierbar sein, aber es genügt, wenn sie links- und rechtsseitig differenzierbar ist.

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$$

**Differentiation und Integration von Fourierreihen** Man darf Fourierreihen *differenzieren* und *integrieren*, falls zusätzliche Bedingungen an die Funktion erfüllt sind.

*Fourierr. diff. u. int.*

*Sinus-Reihen* und *Cosinus-Reihen* (vgl. [Abschnitt 9.3.1](#)): Betrachten eine Funktion  $f$ , die nur auf  $[0, l]$  definiert ist. Setzen wir  $f$  gerade ( $f(-x) = f(x)$ ) auf  $[-l, l]$  fort, so sind die Koeffizienten  $b_k = 0$ . Die Koeffizienten  $a_k \neq 0$ . Die Funktion  $f$  ist eine reine *Cosinus-Reihe*

*Sinus-Reihen*  
*Cosinus-Reihen*

*Cosinus-Reihe*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{l} x$$

Für eine ungerade Funktion sind die  $a_k = 0$  und die  $b_k \neq 0$ , so dass sich  $f$  als reine *Sinus-Reihe* darstellen lässt.

*Sinus-Reihe*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x$$

**Beispiel 9.3.2/1**

$l = \pi$  Hutfunktion

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

gesucht ist eine Sinusreihe von  $f$  auf  $[0, \pi]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin kx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \sin kx \, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \left[ -x \frac{\cos kx}{k} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k} \cos kx \, dx + \left[ -(\pi - x) \frac{\cos kx}{k} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{k} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos kx \, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{2}{k^2} \sin \frac{k\pi}{2} = \frac{4}{\pi k^2} \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ (-1)^l & k \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)^2} \sin(2l+1)x \quad x \in [0, \pi]$$

für  $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)^2} \underbrace{\sin(l\pi + \pi/2)}_{(-1)^l} \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2}$$

**Orthonormalbasen im Hilbertraum**

**Definition 9.3.2/2 (Hilbertraum)**

*Hilbertraum*

Als *Hilbertraum*  $H$  bezeichnet man einen Vektorraum (i. A. einen unendlichdimensionalen) mit folgenden Eigenschaften

- es ist ein Skalarprodukt  $\langle f, g \rangle$  definiert
- es gibt eine Norm  $\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$  ( $\Rightarrow$  Metrik, Konvergenz)
- $H$  vollständig, d. h. jede Cauchyfolge ist in  $H$  konvergent

**Bemerkung 9.3.2/3**

Der Raum  $R([-l, l])$  aus dem letzten Abschnitt ist bezüglich der Norm nicht vollständig:  $\|f\| = (\int_{-l}^l |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ . Wir können aber zu dem vollständigen Raum  $L_2([-l, l]) := \{f: \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx < \infty\} \supset R([-l, l])$  übergehen. Das Integral im  $L_2$  ist das Lebesgue-Integral.

**Definition 9.3.2/4 (Orthonormalbasis)**

Eine Menge  $\{v_j\}_{j \in J} \subset H$  heißt Orthonormalbasis (ONB)  $:\Leftrightarrow$

- $\forall j, k \in J: \langle v_j, v_k \rangle = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$  (Orthonormalsystem/ONS)
- $\forall v \in H$  gilt  $v = \sum_{j \in J} \langle v, v_j \rangle v_j$  konvergent in  $H$

Ein Beispiel für eine Orthonormalbasis ist das trigonometrische System.

**Bemerkung 9.3.2/5**

$\{v_j\}_{j \in J}$  sei ein Orthonormalsystem. Dann sind äquivalent:  $\forall v \in H$  gilt  $v = \sum_{j \in J} \langle v, v_j \rangle v_j$  konvergent in  $H$

$$\Leftrightarrow \|v\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle v, v_j \rangle|^2 \quad \forall v \in H$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in H: \langle v, v_j \rangle = 0 \forall j \in J \Leftrightarrow v = 0$$

todo: weitermachen

**9.3.3 Die Wärmeleitungsgleichung**

Rand-Anfangswert-Problem:

(9.33)  $u_t - u_{xx} = f(x, t) \quad x \in (0, \pi), t > 0$

(9.34)  $u(0, t) = \mu_1(t), u(\pi, t) = \mu_2(t) \quad t > 0$

(9.35)  $u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in (0, \pi)$

Gleichung 9.33 partielle DGL, Gleichung 9.34 Randbedingung, Gleichung 9.35 Anfangsbedingung

**(A)  $f(x, t) = 0, \mu_1(t) = \mu_2(t) = 0$**

(1) Separation: Finde alle  $u(x, t) = X(x)T(t)$  mit Gleichung 9.33 und Gleichung 9.34. Analog zu Abschnitt 9.3.1.

(a)  $X'' - \lambda X = 0$  und  $X(0) = X(\pi) = 0$  (Bestimme alle  $\lambda, X$ )

Lösung:  $\lambda_k = -k^2$  für  $k \in \mathbb{N}$  und  $X_k = c_k \sin kx$

## 9 Partielle Differentialgleichungen

(b)  $T' - \lambda T = 0$  für alle  $\lambda$  aus [Punkt 1a](#).

Lösung:  $T' = -k^2 T, T_k(t) = d_k e^{-k^2 t}$ , wobei  $k \in \mathbb{N}$

Lösung:  $k \in \mathbb{N}: u_k(x, t) = b_k \sin kx e^{-k^2 t}$

(2) Superposition: Bestimme  $b_k \in \mathbb{C}$ , so dass

$$u(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx e^{-k^2 t}$$
$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

Das haben wir bereits gelöst. Die  $b_k$  müssen die Fourierkoeffizienten sein.

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin kx \, dx$$

**(B)**  $f(x, t) \neq 0, \mu_1(t) = \mu_2(t) = 0, u_0(x) = 0$

Ansatz:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin kx$$

dazu:

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin kx$$

für festes  $t$  mit  $f_k$  als Fourierkoeffizienten

$$f_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x, t) \sin kx \, dx$$

$u(x, t)$  ist Lösung, falls:  $T_k' + k^2 T_k = f_k(t)$  und  $T_k(0) = 0$  für  $k \in \mathbb{N}$ .

**(C) allgemeiner Fall**

Wie [Abschnitt 9.3.1](#) und in den Übungen.

### 9.3.4 Die Laplace-Poisson-Gleichung

Dirichlet-Problem:

$$\begin{aligned}\Delta u &= f \quad \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R} \text{ beschränkt} \\ u|_{\partial\Omega} &= g \quad (\text{Randbedingung})\end{aligned}$$

Modellfall  $n = 2$  und  $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$  **todo: Bildchen für die Nummerierung der Randstücke** link  $\Gamma_1$ , unten  $\Gamma_3$ , rechts  $\Gamma_2$ , oben  $\Gamma_4$ ,  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_4$ .

#### (A) $f = 0$ Laplace-Gleichung

$$(9.36) \quad \Delta u(x, y) = 0 \quad (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi)$$

$$(9.37) \quad u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \quad y \in [0, \pi]$$

$$(9.38) \quad u(x, 0) = 0, u(x, \pi) = g(x) \quad x \in [0, \pi]$$

$u$  ist also Null auf  $\Gamma_1, \Gamma_2$  (Gleichung 9.37) und  $\Gamma_3$  (Gleichung 9.38).

- (1) Separation: Finde  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  mit Gleichung 9.36 und Gleichung 9.37, sowie  $u(x, 0) = 0$  aus Gleichung 9.38.

(a)  $X'' - \lambda X = 0$  und  $X(0) = X(\pi) = 0$

(b)  $Y'' + \lambda Y = 0$  und  $Y(0) = 0$

Lösung:  $u_k(x, y) = b_k \sin kx \sinh ky$  mit  $k \in \mathbb{N}$ , wobei  $\sin kx$  die Lösung von (a) und  $\sinh ky$  die Lösung von (b) bezeichnet.

- (2) Superposition: Bestimme  $b_k$ , so dass

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \sinh ky$$

eine Lösung von (A) sind.  $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}u(x, \pi) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh k\pi \sin kx = g(x) & x \in [0, \pi] \\ \Leftrightarrow b_k \sinh k\pi &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin kx \, dx & k \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

siehe Übungsaufgaben 6+7 in Serie 39.

**(B) Die Poisson-Gleichung:  $f \neq 0, g = 0$**

$$(9.39) \quad -\Delta u(x, y) = f \quad \text{auf } \Omega$$

$$(9.40) \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

Idee:  $f = \sum_j a_j u_j$ , wobei  $(u_j)_j$  sind ein Orthonormalsystem bzgl.  $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx$ , d. h.  $a_j = \langle f, u_j \rangle$ .

Lösungsansatz:

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} b_j u_j$$

$u$  erfüllt [Gleichung 9.39](#) und [Gleichung 9.40](#)  $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^{\infty} b_j \Delta u_j &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j \\ u_j|_{\partial\Omega} &= 0 \quad \forall j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

erfüllt, falls:

$$\begin{aligned} -\Delta u_j &= \frac{a_j}{b_j} u_j \quad j \in J \\ u_j|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

d. h.  $\lambda_j = \frac{a_j}{b_j}$  ist ein Eigenwert und  $u_j$  zugehörige Eigenfunktion.

Lösungsmethode:

(1) Eigenwerte und Eigenfunktionen:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \\ u_j|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\lambda_j)_j$  Eigenwerte und  $u_j$  Eigenfunktionen und  $(u_j)_j$  ist ein Orthonormalsystem.

(2) Superposition

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, u_j \rangle u_j \Rightarrow u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle f, u_j \rangle}{\lambda_j} u_j$$

ist Lösung.

**Beispiel 9.3.4/1**

$$\begin{aligned}\Omega &= (0, \pi) \times (0, \pi) \\ -\Delta u &= f \\ u_j|_{\partial\Omega} &= 0\end{aligned}$$

(1) Eigenwerte und Eigenfunktionen:

$$\begin{aligned}-\Delta u &= \lambda u \\ u_j|_{\partial\Omega} &= 0\end{aligned}$$

Wir machen wieder für die Separation den Ansatz  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  mit  $X(0) = X(\pi) = 0$  und  $Y(0) = Y(\pi) = 0$  und bekommen die zwei Teilproblem:

(a)  $Y'' - \mu Y = 0$  und  $Y(0) = Y(\pi) = 0$  für alle  $\mu$ .

Lösung:

$$\begin{aligned}\mu &= -n^2 & n \in \mathbb{N} \\ Y_n &= c_n \sin ny & n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

(b)  $X'' + (\lambda + \mu)X = X'' + (\lambda - n^2)X = 0$  und  $X(0) = X(\pi) = 0$  für  $\mu = -n^2$  aus [Punkt 1a.](#)

Lösung:

$$\begin{aligned}X'' + (\lambda - n^2)X &= 0 \\ X(0) &= X(\pi) = 0\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$  für jedes  $n$  gilt:  $-(\lambda - n^2) = -m^2$  mit beliebigem  $m \in \mathbb{N}$  und festem  $n$  oder anders geschrieben:  $\lambda_{m,n} = m^2 + n^2 \Rightarrow X_m = d_n \sin mx$

Daraus folgt für die Eigenwerte:  $\lambda_{m,n} = m^2 + n^2$  mit  $m, n \in \mathbb{N}$  und für die Eigenfunktionen  $u_{m,n}(x, y) = b_{m,n} \sin mx \sin ny$ .

(2) Superposition: Es ist leicht zu sehen, dass sich die beiden Sinusterme orthogonal zueinander sind und wir können in eine Doppelreihe entwickeln.

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{m,n} \sin mx \sin ny \Leftrightarrow \\ b_{m,n} &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) \sin mx \sin ny \, dx dy \\ \Leftrightarrow u(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{m,n}}{m^2 + n^2} \sin mx \sin ny\end{aligned}$$

# 10 Komplexe Funktionen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit differenzierbaren komplexwertigen Funktionen komplexer Variablen. Dieser Bereich ist in sehr vielen Teilbereichen der Mathematik nützlich. Insbesondere wird man diesen in der Zahlentheorie und der angewandten Mathematik wiederfinden.

## 10.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Der Differenzierbarkeitsbegriff der eindimensionalen reellen Analysis wird in der Funktionentheorie zur komplexen Differenzierbarkeit erweitert.

### 10.1.1 Definition und Grundregeln

#### Bemerkung 10.1.1/1

- (1)
  - Wir kennen bereits den vollständig normierten Raum der komplexen Zahlen  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ .
  - topologische Grundbegriffe: offen, abgeschlossen, kompakt, Rand, Häufungspunkt
  - Konvergenz und Grenzwert für Folgen und Reihen

- (2) Eine Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  mit dem Wertebereich  $G \subset \mathbb{C}$  offen nennen wir eine *komplexe Funktion*. Bereits bekannt ist:  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ ,  $f$  stetig in  $z_0$ , Sätze über stetige Funktionen

*komplexe Funktion*

$f(z) = \Re f(z) + i\Im f(z)$ , Vereinbarung: für  $z = x + iy$  kann man schreiben:

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

wobei  $u, v: G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Menge  $\{(x, y): x + iy \in G \subset \mathbb{C}\} = \tilde{G} \subset \mathbb{R}^2$  kann auch mit einer Menge von komplexen Zahlen identifiziert werden ( $\cong G$ ). Wir fassen also  $G$  als Gebiet im  $\mathbb{R}^2$  und in  $\mathbb{C}$  auf.

#### Beispiel 10.1.1/2

- (1)  $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$  – Strahlen werden auf Strahlen abgebildet, Sektoren auf Sektoren



- (2) für  $z \neq 0$  sei  $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  – Kreise werden auf Kreise abgebildet
- (3)  $f(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots = e^x \cos y + ie^x \sin y$  – Ein Streifen der Breite  $2\pi i$  wird auf die komplexe Ebene ohne den Nullpunkt abgebildet.

**Definition 10.1.1/3**

Wir betrachten eine Menge  $D \subset \mathbb{C}$  und einen inneren Punkt  $z_0 \in D^0 \neq \emptyset$ . Wir nennen  $f$  *komplex differenzierbar* in  $z_0$  : $\Leftrightarrow$  der Grenzwert des Differenzenquotient existiert und eine komplexe Zahl ist. Diesen Grenzwert bezeichnen wir dann als *Ableitung* von  $f$  an der Stelle  $z_0$ .

*komplexdiff'bar*  
*Ableitung*

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C} \implies f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

**Beispiel 10.1.1/4**

- (1)  $f(z) = z^n$  für  $n \in \mathbb{N} \implies f'(z) = nz^{n-1} \forall z$
- (2)  $f(z) = \frac{1}{z}$  ist komplex differenzierbar in allen Punkten  $z \neq 0$ ,  $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$
- (3)  $f(z) = \Re z$  nirgends komplex differenzierbar: läuft man auf der Geraden  $z = x + iy_0$  auf  $z_0$  zu, so ergibt sich für den Differenzenquotienten  $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$ . Nähert man sich dem Punkt auf der Geraden  $z = x_0 + iy$  erhält man für den Differenzenquotienten  $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{x_0-x_0}{y-y_0} = 0$ . Die beiden Grenzwerte sind nicht gleich und damit existiert der Limes nicht.
- (4)  $f(z) = e^z$  komplex differenzierbar,  $(e^z)' = e^z$

$$e^z - e^{z_0} = e^{z_0}(e^{z-z_0} - 1) = e^{z_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{k!} = e^{z_0}(z - z_0) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{k-1}}{k!}}_{\xrightarrow{z \rightarrow z_0} 1}$$

**Satz 10.1.1/5**

Sei  $f$  wie in [Definition 10.1.1/3](#). Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1)  $f$  ist komplex differenzierbar in  $z_0$
- (2)  $\exists c \in \mathbb{C}$  und  $\frac{f(z)-f(z_0)-c(z-z_0)}{z-z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$ . Dann ist  $c = f'(z_0)$ .
- (3)  $\exists h: D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig in  $z_0$  mit  $f(z) = f(z_0) + h(z)(z - z_0)$  (Differenzenquotienten anders aufgeschrieben). Dann ist  $f'(z_0) = h(z_0)$ .

BEWEIS:

wie im reellen Fall. ■

**Folgerung 10.1.1/6**

Wenn  $f$  differenzierbar in  $z_0$ , dann ist  $f$  auch stetig in  $z_0$ .

**Bemerkung 10.1.1/7**

Wie im reellen Fall gelten die bekannten Differentiationsregeln:

## 10 Komplexe Funktionen

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- $(f \circ g)' = f'(g)g'$

### 10.1.2 Die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  mit  $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

#### Satz 10.1.2/1

Ist  $f$  wie oben gegeben und  $z_0 = x_0 + iy_0 \in D^0 \neq \emptyset$ , dann gilt:

- (1)  $f$  komplex differenzierbar in  $z_0 \Leftrightarrow u, v$  sind (total) differenzierbar in  $(x_0, y_0)$  und es gelten die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0)\end{aligned}$$

- (2) Wenn  $f$  differenzierbar in  $z_0 = x_0 + iy_0$ , dann ist

$$\begin{aligned}f'(z_0) &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \\&= v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)\end{aligned}$$

BEWEIS:

zur Erinnerung: In Definition 5.3.1/10 hatten wir festgelegt, dass eine Funktion  $u$  (total) differenzierbar in einem Punkt  $(x_0, y_0)$  heißt, wenn es  $a_1, a_2$  gibt, so dass

$$\frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) - (a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0))}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} 0$$

und  $a_1 = u_x(x_0, y_0)$ ,  $a_2 = u_y(x_0, y_0)$ .

Aus Satz 10.1.1/5 folgt:  $f$  ist genau dann in  $z_0$  differenzierbar, wenn es eine komplexe Zahl  $c \in \mathbb{C}$  gibt und

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0) - c(z - z_0)}{z - z_0} \right| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$$

Für  $c = a + ib$  ergibt sich so

$$\left| \frac{u(x, y) + iv(x, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0) - (a + ib)(x - x_0 + i(y - y_0))}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} \right| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} 0$$

Etwas umformuliert dargestellt:  $\exists a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) - (a(x - x_0) - b(y - y_0))}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} + i \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0) - (b(x - x_0) + a(y - y_0))}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} 0$$

Dies gilt wiederum, wenn  $u$  und  $v$  differenzierbar in  $(x_0, y_0)$  sind.

Außerdem liefert dies gleich die partielle Ableitungen

$$\begin{aligned} a &= u_x(x_0, y_0) & b &= v_x(x_0, y_0) \\ -b &= u_y(x_0, y_0) & a &= v_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Der Punkt (2) ergibt sich aus  $f'(z_0) = c = a + ib$  ■

**Definition 10.1.2/2**

- (1) Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  ( $D \subset \mathbb{C}$  und offen) heißt *holomorph* in  $z_0 \in D : \Leftrightarrow f$  ist komplex differenzierbar in einer Umgebung  $K_\delta(z_0) = \{z: |z - z_0| < \delta\}$ . *holomorph*
- (2) Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  ( $D \subset \mathbb{C}$  und offen) heißt *holomorph*  $\Leftrightarrow f$  ist holomorph in jedem Punkt  $z \in D$ . ( $\Leftrightarrow f$  ist komplex differenzierbar in jedem Punkt von  $D$ ) *holomorph*

**Folgerung 10.1.2/3**

- (1) Sei  $f$  differenzierbar in  $z_0 = x_0 + iy_0 \Rightarrow$  Es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in  $(x_0, y_0)$  (eine notwendige Bedingung für Differenzierbarkeit)
- (2) Seien  $u$  und  $v$  stetig differenzierbar in  $(x_0, y_0)$  und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen  $\Rightarrow f$  ist differenzierbar in  $z_0 = x_0 + iy_0$  (eine hinreichende Bedingung für Differenzierbarkeit)
- (3)  $f$  holomorph in  $G \subset \mathbb{C}$  und  $u, v \in C^2(G) \Rightarrow u$  und  $v$  sind harmonische Funktionen:  $\Delta u = \Delta v = 0$  auf  $G$  (eine notwendige Bedingung für Differenzierbarkeit)

BEWEIS:

nur von (3): Aus Satz 10.1.2/1 folgt, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten, falls  $f$  holomorph ist

$$\begin{aligned} u_x = v_y & \Rightarrow & u_{xx} = v_{yx} \\ u_y = -v_x & & u_{yy} = -v_{xy} \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Schwarz sind die Ableitungen gleich  $v_{xy} = v_{yx}$  und es ergibt sich  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ .

Analog folgt mit der Ableitung von  $u$  nach  $y$  und  $v$  nach  $x$ , dass  $\Delta v = 0$ . ■

**Bemerkung 10.1.2/4**

- (1)  $f(z) = \bar{z}$  ist nirgends differenzierbar  
 $f(z) = x - iy \Rightarrow u_x = 1 \neq v_y = -1$

## 10 Komplexe Funktionen

- (2)  $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$  ist differenzierbar in  $z = 0$ , aber sie ist nirgends holomorph  
Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}u_x = 2x = v_y = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \\u_y = 2y = -v_x = 0 &\Leftrightarrow y = 0\end{aligned}$$

- (3) Wenn  $u$  und  $v$  harmonische Funktionen sind, dann ist die Funktion  $u + iv$  i. A. nicht holomorph. Beispiel:  $u = x, v = -y$ , d. h.  $u + iv = x - iy = \bar{z}$  nirgends holomorph nach Bemerkung (1). Aber  $\Delta u = \Delta v = 0$  auf  $\mathbb{R}^2$ .

### Satz 10.1.2/5

Wir betrachten ein sternförmiges Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$ , d. h.  $G$  ist offen und es gibt einen Punkt  $z_0$ , so dass für jeden Punkt  $z \in G$  die Verbindungsgerade  $[z_0, z] \in G$ . Zusätzlich sei  $u(x, y)$  harmonisch auf  $G$ .

Dann existiert eine harmonische Funktion  $v(x, y)$  auf  $G$ , so dass  $f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$  harmonisch auf  $G$  ist. Man nennt  $v$  die *konjugierte harmonische Funktion* zu  $u$ .

*konjugierte  
harmonische  
Funktion*

BEWEIS:

Betrachten das Vektorfeld  $\begin{bmatrix} -u_y(x, y) \\ u_x(x, y) \end{bmatrix}$  auf  $G$ . Dies ist ein  $C^\infty$ -Vektorfeld, weil  $u$  harmonisch ist. Daraus folgt weiter, die Summe  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ , also  $(-u_y)_y = (u_x)_x$ , woraus wiederum nach Satz 8.1.2/14 folgt, dass  $\begin{bmatrix} -u_y \\ u_x \end{bmatrix}$  konservativ ist. Also existiert ein  $v$  mit

$$\text{grad } v = \begin{bmatrix} -u_y \\ u_x \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta v = \text{div grad } v = -u_{yx} + u_{xy} = 0 \text{ (nach Satz von Schwarz).}$$

Außerdem ist  $v_x = -u_y$  und  $v_y = u_x$ , d. h. die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen gelten und somit ist  $u + iv$  harmonisch. ■

### Satz 10.1.2/6 (Potenzreihen als harmonische Funktionen)

Es sei  $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  für  $|z - z_0| < R$ . Dabei ist  $R$  der *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

*Konvergenzradius*

Dann gilt:

- (1) Die Funktion  $f$  ist beliebig oft komplex differenzierbar. Insbesondere ist sie damit holomorph auf  $D = \{z: |z - z_0| < R\}$  und  $f^{(j)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1)\dots(k-j+1)(z - z_0)^{k-j}$ .

- (2) Für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt:  $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$

BEWEIS:

o. B. d. A. sei  $z_0 = 0$ .

$$g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} k a_k z^{k-1} \quad \text{absolut konvergent in } D \text{ (d. h. } \sqrt[k]{k} \rightarrow 1)$$

Wir wählen ein festes  $z \in D$  und beschränken unsere Betrachtungen auf ein  $K_\delta$  mit  $\overline{K_\delta(z)} \subseteq D$ . Weiterhin gibt es ein  $\rho < R$  (da  $D$  offen) mit  $|w| \leq \rho$  für  $w \in K_\delta(z)$ .

$$\Rightarrow \left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{w^k - z^k}{w - z} - k a_k z^{k-1} \right|$$

( $\frac{w^k - z^k}{w - z}$  ist der Differenzenquotient von  $z$  und wird für  $w \rightarrow z$  gegen die Ableitung  $z'$  konvergieren, da  $z$  harmonisch).

Es gilt:  $(w^k - z^k) = (w - z) \underbrace{(w^{k-1} + w^{k-2}z + \dots + wz^{k-2} + z^{k-1})}_{k\text{-Summanden}} \Rightarrow \frac{w^k - z^k}{w - z} \xrightarrow{w \rightarrow z} kz^{k-1}$

$$\begin{aligned} \left| \frac{w^k - z^k}{w - z} \right| &= |w^{k-1} + w^{k-2}z + \dots + wz^{k-2} + z^{k-1}| \\ &\leq k\rho^{k-1} \end{aligned} \quad \text{für } k \in K_\delta(z)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) \right| &\leq \sum_{k=1}^n |a_k| \left| \frac{w^k - z^k}{w - z} - kz^{k-1} \right| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \underbrace{\left| \frac{w^k - z^k}{w - z} - kz^{k-1} \right|}_{\leq 2k\rho^{k-1}} \\ &\leq \sum_{k=1}^n |a_k| \left| \frac{w^k - z^k}{w - z} - kz^{k-1} \right| + 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| k\rho^{k-1} \end{aligned}$$

für hinreichend großes  $n \geq n_0(\varepsilon)$  lässt sich der zweite Summand beliebig klein machen. Insbesondere auch kleiner als  $2/\varepsilon$ . Für den ersten Summanden, kann man den Betrag  $\left| \frac{w^k - z^k}{w - z} - kz^{k-1} \right|$  durch  $\varepsilon (\sum_{k=1}^n |a_k|)^{-1}$  abschätzen für  $|z - w| < \delta(\varepsilon)$ . Damit kann die gesamte Summe durch  $2\varepsilon$  abgeschätzt werden. ■

**Definition 10.1.2/7 (Komplexe trigonometrische Funktionen)**

Für eine komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  sind die trigonometrischen Funktionen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \cos z &:= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} & \sin z &:= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \cosh z &:= \frac{e^z + e^{-z}}{2} & \sinh z &:= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \end{aligned}$$

Da die Exponentialfunktion eine harmonische Funktion ist, sind die trigonometrischen Funktionen ebenfalls harmonisch.

**Folgerung 10.1.2/8**

Folgende Zusammenhänge bestehen zwischen den komplexen trigonometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned} \cosh iz &= \cos z & \sinh iz &= i \sin z \\ (\cos z)' &= -\sin z & (\sin z)' &= \cos z \\ (\cosh z)' &= \sinh z & (\sinh z)' &= \cosh z \\ \cosh z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} & \sinh z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

**10.2 Integration**

**10.2.1 Komplexe Kurvenintegrale**

Zu Beginn einige Wiederholungen:

**Bemerkung 10.2.1/1**

Kurven in  $\mathbb{C}$  (oder  $\mathbb{R}^2$ ) vergleiche mit Abschnitt 7.2 und [Abschnitt 8.1.2](#)

- $(\Gamma, g)$  glatte (Jordan-)Kurve mit  $g$  in Parameterdarstellung  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig differenzierbar (für Jordan-Kurve zusätzlich injektiv auf  $(a, b)$ ), mit komplexen Zahlen können wir  $g$  auch als  $g(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$  schreiben.

Zusätzlich verlangen wir, dass die Ableitung  $\dot{g}(t) = \dot{\alpha}(t) + i\dot{\beta}(t) \neq 0$  für  $t \in (a, b)$ .

- zulässige Parameterdarstellung:  $h: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt zulässig  $\Leftrightarrow h$  stetig differenzierbar und  $g(t) = h(\mu(t))$  mit  $\mu'(t) > 0$ .
- Als eine stückweise glatte Kurve bezeichnet man eine Kurve  $\Gamma$ , die sich aus endlich vielen glatten Teilstücken  $\Gamma_j$  zusammensetzt:

$$\Gamma = \sum_{j=1}^n \Gamma_j$$

**Definition 10.2.1/2**

$G \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$

- (1)  $\Gamma = (\Gamma, g)$  glatte Kurve (Parameterdarstellung  $g: [a, b] \rightarrow G$  stetig differenzierbar,  $\dot{g}(t) \neq 0$  auf  $(a, b)$ )

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \int_a^b \underbrace{f(g(t)) \cdot \dot{g}(t)}_{=: h(t)} dt = \int_a^b \Re h(t) dt + i \int_a^b \Im h(t) dt$$

$$L(\Gamma) := \int_a^b |\dot{g}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{\alpha}(t)^2 + \dot{\beta}(t)^2} dt \quad g(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$$

$h$  ist stetig  $\Rightarrow$  Riemannintegral existiert

$L$  heißt *Länge* von  $\Gamma$

*Länge*

(2)  $\Gamma = \sum_{j=1}^n \Gamma_j$  stückweise glatte Kurve in  $G$ :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} f(z) dz$$

$$L(\Gamma) := \sum_{j=1}^n L(\Gamma_j)$$

### Bemerkung 10.2.1/3

Definition 10.2.1/2 ist unabhängig von der Auswahl der zulässigen Parameterdarstellung.

(todo: Übungsaufgabe)

### Beispiel 10.2.1/4 (fundamentales Beispiel für komplexe Kurvenintegrale)

$\Gamma$  soll ein Kreis um  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit positivem Umlaufsinn sein. Parameterdarstellung der Kurve:  $g(t) = z = z_0 + Re^{it} \Rightarrow z - z_0 = Re^{it}$  mit  $t \in [0, 2\pi]$ .

$$\int_{\Gamma} (z - z_0)^n dz = \oint_{|z-z_0|=R} (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} R^n e^{int} \underbrace{Rie^{it}}_{=\dot{g}(t)} dt$$

$$= iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

### Bemerkung 10.2.1/5 (Zurückführung auf Kurvenintegrale 2. Art im $\mathbb{R}^2$ )

$z = x + iy = g(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ ,  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b (u(\alpha(t), \beta(t)) + iv(\alpha(t), \beta(t))) \cdot (\dot{\alpha}(t) + i\dot{\beta}(t)) dt$$

$$(10.1) \quad = \int_a^b (u(\alpha(t), \beta(t))\dot{\alpha}(t) - v(\alpha(t), \beta(t))\dot{\beta}(t))$$

$$+ i \int_a^b (v(\alpha(t), \beta(t))\dot{\alpha}(t) + u(\alpha(t), \beta(t))\dot{\beta}(t)) dt$$

$$(10.2) \quad = \int_{\Gamma} u dx - \int_{\Gamma} v dy + i \int_{\Gamma} v dx + i \int_{\Gamma} u dy$$

Wegunabhängigkeit  $\sim \begin{bmatrix} u \\ -v \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}$  Vektorfelder sind konservativ  $\sim$  falls  $G$  sternförmig  
(Satz 8.1.2/14):  $u_y = -v_x \wedge v_y = u_x \sim$  die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten.

**Satz 10.2.1/6 (Cauchy'scher Integralsatz für sternförmige Gebiete)**

Es gelten die Voraussetzungen:  $G \subset \mathbb{C}$  sei ein sternförmiges Gebiet,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph in  $G$ , die Ableitung  $f'$  sei stetig<sup>1</sup> in  $G$  und  $\Gamma$  sei eine geschlossene stückweise glatte Kurve in  $G$ . Dann ist

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

BEWEIS:

Wenn  $f = u + iv$  holomorph ist, dann hat [Satz 10.1.2/1](#) gezeigt, dass  $u$  und  $v$  differenzierbar (jedoch nicht stetig differenzierbar) sind und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen  $u_x = v_y, u_y = -v_x$  gelten. Außerdem ist  $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iv_y$ . Die Forderung nach Stetigkeit von  $f'$  liefert und auch, dass  $u_x, u_y, v_x$  und  $v_y$  stetig in  $G$  sind, d. h.  $u$  und  $v$  sind  $C^1(G)$ -Abbildungen.

Mit [Gleichung 10.2](#) und [Satz 8.1.2/14](#) ergibt sich so der Satz. ■

**Folgerung 10.2.1/7**

Unter den Voraussetzungen von [Satz 10.2.1/6](#) folgt die Wegunabhängigkeit der Integrale:

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz$$

**Satz 10.2.1/8**

Sei  $\Gamma \subset G$  eine stückweise glatte Kurve,  $G \subset \mathbb{C}$  offen,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann:

$$(10.3) \quad \int_{-\Gamma} f(z) dz = - \int_{\Gamma} f(z) dz$$

$$(10.4) \quad \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \Gamma} |f(z)| L(\Gamma)$$

BEWEIS:

Der Beweis zu [Gleichung 10.3](#) wird analog zu dem im  $\mathbb{R}^n$  geführt.

Für die [Gleichung 10.4](#) ist es ausreichend zu zeigen, dass für eine glatte Kurve  $\Gamma = (\Gamma, g)$

---

<sup>1</sup>Später zeigen wir, dass diese Bedingung nicht notwendig ist.



mit  $g: [a, b] \rightarrow G$  stetig differenzierbar gilt:

$$\begin{aligned}
 \left| \underbrace{\int_{\Gamma} f(z) dz}_{=Re^{i\varphi}} \right| &= \left| \int_a^b \underbrace{f(g(t))\dot{g}(t)}_{=:h(t)} dt \right| = R = \Re R = \Re(e^{-i\varphi} R e^{i\varphi}) \\
 &= \Re(e^{-i\varphi} \int_{\Gamma} f(z) dz) = \Re(e^{-i\varphi} \int_a^b h(t) dt) = \int_a^b \Re(e^{-i\varphi} h(t)) dt \\
 &\leq \int_a^b |\Re(e^{-i\varphi} h(t))| dt \leq \int_a^b |h(t)| dt = \int_a^b \underbrace{|f(g(t))|}_{\leq \sup_{z \in \Gamma} |f(z)|} \cdot |\dot{g}(t)| dt \\
 &\leq \sup_{z \in \Gamma} |f(z)| \underbrace{\int_a^b |\dot{g}(t)| dt}_{=L(\Gamma)} = \sup_{z \in \Gamma} |f(z)| L(\Gamma) \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

### 10.2.2 Stammfunktionen

#### Definition 10.2.2/1

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  offen und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Eine Funktion  $F: G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *Stammfunktion* von  $f$   $\Leftrightarrow F$  holomorph in  $G$  und  $F'(z) = f(z)$  für alle  $z \in G$ . *Stammfunktion*

#### Lemma 10.2.2/2

Sei  $G$  offen und  $F: G \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar in  $z_0 \in G$  und  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar in  $t_0 \in (a, b)$  mit  $z_0 = g(t_0)$ . Dann ist die zusammengesetzte Funktion  $F \circ g$  differenzierbar in  $t_0$  und es gilt die Kettenregel  $(F \circ g)'(t_0) = F'(\underbrace{g(t_0)}_{=z_0})\dot{g}(t_0)$ .

BEWEIS:

Da  $F$  in  $t_0$  differenzierbar gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und weiter analog zum reellen Fall ( $F$  als Realteil + Imaginärteil schreiben, Kettenregeln für reelle Funktionen anwenden und ausrechnen).  $\rightarrow$  Übung ■

#### Satz 10.2.2/3 (Hauptsatz der Integralrechnung)

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  offen und  $\Gamma \subset G$  eine stückweise glatte Kurve von  $z_1 \in G$  nach  $z_2 \in G$ ,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig,  $F$  Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

## 10 Komplexe Funktionen

BEWEIS:

o. B. d. A. ist  $\Gamma$  eine glatte Kurve, da man sonst für das Integral  $\int_{\Gamma} f(z) dz$  eine Teleskopsumme  $\sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} f_j(z) dz$  erhält, mit der man genauso argumentieren kann.

Dann:  $g: [a, b] \rightarrow G$  zulässige Parameterdarstellung,  $g(a) = z_1, g(b) = z_2$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(g(t)) \dot{g}(t) dt = \int_a^b F'(g(t)) \dot{g}(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(F(g(t))) dt && \text{nach Lemma 10.2.2/2} \end{aligned}$$

mit dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung ergibt sich

$$= F(g(b)) - F(g(a)) = F(z_2) - F(z_1) \quad \blacksquare$$

### Satz 10.2.2/4

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann sind äquivalent:

- (1)  $f$  besitzt eine Stammfunktion in  $\mathbb{C}$  ( $\exists F: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $F'(z) = f(z)$ )
- (2) für jede stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve  $\Gamma \subset G$  ist das Integral  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ .
- (3) Für je zwei stetige Polygonzüge in  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  in  $G$ , die zwei beliebige Punkte  $z_1 \in G$  und  $z_2 \in G$  verbunden sind, gilt:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma'} f(z) dz$$

BEWEIS:

vgl. Satz 8.1.2/10 und Folgerung 8.1.2/11: zunächst für Gebiete  $G$ , dann  $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ , wobei  $G_k$  Gebiete, die paarweise disjunkt sind.

o. B. d. A.  $G$  sei ein Gebiet. Es gilt (1)  $\Rightarrow$  (2) wegen Satz 10.2.2/3, (2)  $\Rightarrow$  (3) ist klar<sup>2</sup>.

zeigen: (3)  $\Rightarrow$  (1). Es sei  $z \in G, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall w \in K_{\delta}(z): |f(z) - f(w)| \leq \varepsilon$ , da  $f$  stetig.

---

<sup>2</sup>Wenn man  $-\Gamma'$  betrachtet, hat man zusammen mit  $\Gamma$  eine geschlossene Kurve.

$F(z) := \int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta$  unabhängig von der Auswahl von  $\Gamma$  nach Voraussetzung (3). Für ein  $w \in K_{\delta}(z)$  folgt also

$$\begin{aligned} F(w) - F(z) &= \int_{[z,w]} f(\zeta) d\zeta \\ \Rightarrow |F(w) - F(z) - f(z)(w - z)| &= \left| \int_{[z,w]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[z,w]} f(z) d\zeta \right| \\ &= \left| \int_{[z,w]} f(\zeta) - f(z) d\zeta \right| \leq \varepsilon |w - z| \\ \Rightarrow \lim_{w \rightarrow z} \frac{F(w) - F(z)}{w - z} &= f(z) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 10.2.3 Der Cauchy'sche Integralsatz

In [Satz 10.2.1/6](#) haben wir unter den Voraussetzungen (1)  $f$  holomorph in  $G$ , (2)  $f'$  stetig in  $G$  und (3)  $G$  sternförmig gezeigt, dass für alle geschlossenen Kurven  $\Gamma$  das Kurvenintegral null ist.

[Satz 10.2.2/4](#):  $\exists$  Stammfunktion und  $G \subset \mathbb{C}$  offen  $\Leftrightarrow$  für alle geschlossenen Kurven  $\Gamma$  das Kurvenintegral  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ .

Jetzt wollen wir: nur noch (1) und  $G$  einfach zusammenhängend  $\Rightarrow$  für alle geschlossenen Kurven  $\Gamma$  das Kurvenintegral  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ .

#### Lemma 10.2.3/1 (Satz von Goursat)

$G \subset \mathbb{C}$  offen,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph  $\Rightarrow$  Für jedes abgeschlossene Dreieck  $\Delta \subset G$  ist das Integral über den Rand

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$$

BEWEIS:

Wir legen in das abgeschlossene Dreieck ein weiteres hinein. Die Eckpunkte dieses Dreiecks liegen auf den Mittelpunkten der Seiten des Dreiecks.  $\Rightarrow \int_{\partial\Delta} f dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial\Delta^{(j)}} f dz$

Es gelten folgende Eigenschaften:  $\exists \Delta_1 \in \{\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(4)}\}$  mit:

- $|\int_{\partial\Delta} f(z) dz| \leq 4 |\int_{\partial\Delta_1} f(z) dz|$  (Beweis geht indirekt)
- $L(\partial\Delta_1) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta)$  (Umfang des Dreiecks)
- $d(\Delta_1) = \max_{z,w \in \Delta_1} |z - w| = \frac{1}{2} d\Delta$  (Durchmesser des Dreiecks)

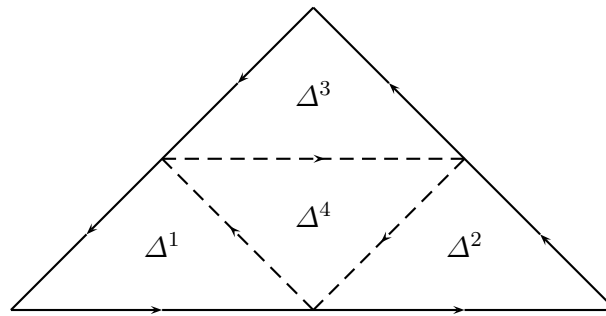


Abbildung 10.1: Konstruktion der vier Dreiecke

Iteration (gleiche Prozedur mit  $\Delta_1$  anstelle von  $\Delta, \dots$ ). Bekommen daraus eine Folge von Dreiecken  $(\Delta_j)_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) mit:

- (1)  $\Delta \supseteq \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$
- (2)  $|\int_{\partial\Delta} f dz| \leq 4^j |\int_{\partial\Delta_j} f dz|$
- (3)  $L(\partial\Delta_j) = 2^{-j} L(\partial\Delta)$
- (4)  $d(\Delta_j) = 2^{-j} d(\Delta)$

Auswahl einer Folge  $(z_j)_j$  mit  $z_j \in \Delta_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ).  $(z_j)_j$  ist eine Cauchyfolge, da  $z_k \in \Delta_j$  ( $k \geq j$ ) und  $d(\Delta_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ . Daraus folgt dann, dass der Limes der Folge existiert und in  $\Delta_j$  liegt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0 \in \Delta_j \quad (\forall j)$$

Es sei  $\varepsilon > 0$ . Die Funktion  $f$  ist holomorph in  $z_0 \Rightarrow$ :

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} \right| = |h(z)| \leq \varepsilon \quad \text{für } |z - z_0| \leq \delta$$

$\Rightarrow f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + h(z)(z - z_0)$  mit  $|h(z)| \leq \varepsilon$  Für  $j \geq j_0$  ist  $\Delta_j \subset K_\delta(z_0)$ . Dann können wir folgendermaßen argumentieren:

$$\int_{\partial\Delta_j} f(z) dz = f(z_0) \underbrace{\int_{\partial\Delta_j} dz}_{=0} + f'(z_0) \underbrace{\int_{\partial\Delta_j} (z - z_0) dz}_{=0} + \int_{\partial\Delta_j} h(z)(z - z_0)$$

Da die Stammfunktion zu 1 und  $(z - z_0)$  (Beispiel 10.2.1/4) existiert, ist das Integral über die geschlossene Kurve 0. Wir wenden hier das Ergebnis von Satz 10.2.2/4 an.

$$\left| \int_{\partial\Delta_j} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_j} \underbrace{h(z)}_{\leq \varepsilon} \underbrace{(z - z_0)}_{\leq \max_{z, w \in \Delta_j} (z-w) = 1/2^j d(\Delta)} dz \right| \leq \varepsilon 2^{-j} d(\Delta) 2^{-j} L(\partial\Delta) = L(\partial\Delta_j)$$

mit (2) folgt:

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq \varepsilon d(\Delta) L(\partial\Delta) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0 \quad \blacksquare$$

**Lemma 10.2.3/2 (Verschärfung des Satz' von Goursat)**

$G \subset \mathbb{C}$  offen,  $\Delta \subset G$  abgeschlossenes Dreieck,  $a \in G$ ,  $h: G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig in  $G$  und  $h$  holomorph in  $G \setminus \{a\} \Rightarrow$

$$\int_{\partial\Delta} h dz = 0$$

BEWEIS:

Es sei ein Dreieck gegeben durch  $\Delta = (z_1, z_2, z_3)$ . Wir müssen die verschiedene Fälle bzgl. der Lage von  $a$  betrachten:

1. *Fall:* Wenn  $a$  außerhalb des Dreiecks  $\Delta$  liegt ( $a \notin \Delta$ ), kann man eine offene Umgebung um das Dreieck  $\Delta$  finden, die nicht  $a$  enthält und wir können [Lemma 10.2.3/1](#) anwenden. Also  $\int_{\partial\Delta} h dz = 0$
2. *Fall:* Ist  $a$  ein Eckpunkt des Dreiecks (o. B. d. A.  $a = z_1$ ), können wir das Dreieck  $\Delta$  in drei Einzeldreiecke  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  zerlegen, so dass  $a$  nur im Dreieck  $\Delta_1$  liegt. Nach dem ersten Fall sind die Integrale über  $\Delta_2$  und  $\Delta_3$  Null. Es bleibt also  $\int_{\partial\Delta} f dz = \int_{\partial\Delta_1} h dz$ . Da  $h$  stetig ist, ist

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} h(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \Delta} |h(z)| L(\partial\Delta_1) \rightarrow 0$$

gegen Null, weil man das Dreieck beliebig klein machen kann.

3. *Fall:* Ist  $a$  ein Punkt auf dem Rand des Dreiecks (o. B. d. A.  $a \in [z_1, z_2]$ ), so kann man das Dreieck in zwei Dreiecke  $(z_1, a, z_3)$  und  $(a, z_2, z_3)$  zerlegen und mit Fall 2 sind die Integrale über beide Dreiecke Null.
4. *Fall:* Als letzter Fall könnte  $a$  noch ein innerer Punkt des Dreiecks sein. Dann können wir aber mit einer Strecke eines beliebigen Eckpunkts aus durch  $a$  das Dreieck in zwei Teildreiecke zerlegen und erhalten die gleiche Situation wie in Fall 3.  $\blacksquare$

**Bemerkung 10.2.3/3 (Polygonzüge)**

$z_0, z_1, \dots, z_n \in G \subset \mathbb{C}, \Gamma_j = [z_{j-1}, z_j]$

$$\Gamma = \sum_{j=1}^n \Gamma_j = [z_0, z_1, \dots, z_{j-1}, z_j, \dots, z_n]$$

*stetiger Polygonzug*  $\Gamma$  heißt *stetiger Polygonzug* (stückweise stetig differenzierbar)

*leerer Polygonzug*  $[z_j, z_j] \sim$  Punkt heißt *leerer Polygonzug*.

*zulässige Operation* zulässige Operationen für Polygonzüge in  $G$ :  $\Gamma = [z_0, \dots, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, \dots, z_n]$  und  $\Gamma^* = [z_0, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n]$  Die Überführung von  $\Gamma$  nach  $\Gamma^*$  bzw. von  $\Gamma^*$  nach  $\Gamma$  heißt *zulässige Operation* : $\Leftrightarrow$  das abgeschlossene Dreieck  $\Delta_j = (z_{j-1}, z_j, z_{j+1})$  liegt in  $G$

**Definition 10.2.3/4**

*einfach zusammenhängendes Gebiet* Wir bezeichnen  $G \subset \mathbb{C}$  als ein *einfach zusammenhängendes Gebiet* : $\Leftrightarrow$

- (1)  $G$  ist zusammenhängend (d. h. Gebiet) und
- (2) jeder geschlossener Polygonzug in  $G$  lässt sich durch endlich viele zulässige Operationen in einen leeren Polygonzug überführen.

**Beispiel 10.2.3/5**

Sei  $G$  konvexes Gebiet  $\Rightarrow G$  ist sternförmig  $\Rightarrow G$  ist einfach zusammenhängend.

**Bemerkung 10.2.3/6**

Sei  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  geschlossener Polygonzug, doppeltpunktfrei<sup>3</sup> (Jordanscher Polygonzug)  $\Rightarrow$  Das Komplement von  $\Gamma$  besteht aus zwei disjunkten Gebieten. Eines der Gebiete ist beschränkt („Innengebiet“) (und einfach zusammenhängend), das andere ist unbeschränkt („Außengebiet“).

*Jordanscher Kurvensatz*

Diese Aussage gilt auch für beliebige stetige Jordankurven (*Jordanscher Kurvensatz*).

Außerdem gilt für ein Gebiet  $G$ :  $G$  einfach zusammenhängend  $\Leftrightarrow$  Für jede geschlossene stetige Jordankurve in  $G$  gehört das Innengebiet zu  $G$ .

**Lemma 10.2.3/7**

Sei  $G$  einfach zusammenhängendes Gebiet,  $\Gamma \subset G$  geschlossener Polygonzug  $\Rightarrow \Gamma = \sum_{j=1}^n \pm \partial \Delta_j$  (endliche Summe), wobei  $\Delta_j \subset G$  abgeschlossenes Dreieck.

BEWEIS:

(Pseudobeweis) Eine Polygon lässt sich immer in Dreiecke zulegen. (Mit dem Prinzip von Inklusions und Exklusions lässt sich dann der Polygonzug durch  $\Gamma = \partial \Delta_1 + \partial \Delta_2 - \partial \Delta_3$  schreiben) ■

---

<sup>3</sup>enthält keine leeren Polygonzüge

**Lemma 10.2.3/8**

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  einfach zusammenhängendes Gebiet,  $a, z_0, z_1 \in G$ ,  $\Gamma_1, \Gamma_2$  seien Polygonzüge von  $z_0$  nach  $z_1$  und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und holomorph in  $G \setminus \{a\}$ . Dann ist

$$\int_{\Gamma_1} f dz = \int_{\Gamma_2} f dz$$

BEWEIS:

$\Gamma := \Gamma_1 - \Gamma_2$  ist dann eine geschlossene Kurve in  $G$ .

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f dz &= \text{Lemma 10.2.3/7} \sum \pm \int_{\partial \Delta_j} f dz = \text{Lemma 10.2.3/2} 0 \\ &\Rightarrow \int_{\Gamma_1} f dz = \int_{\Gamma_2} f dz \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Satz 10.2.3/9 (Cauchy'scher Integralsatz)**

Es sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt für jede geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve  $\Gamma \subset G$ :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

BEWEIS:

nach [Satz 10.2.2/4](#) ist es ausreichend zu zeigen, dass  $f$  eine Stammfunktion besitzt. Definieren:  $F(z) := \int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta$ , wobei  $\Gamma$  ein stetiger Polygonzug von  $z_0$  (fest) nach  $z \in G$ . [Lemma 10.2.3/8](#) liefert: Definition unabhängig von Auswahl des Polygonzugs  $\Gamma$ .  $F$  ist Stammfunktion (Siehe Schritt (3) $\Rightarrow$ (1) in [Satz 10.2.2/4](#))  $\blacksquare$

**Folgerung 10.2.3/10**

Die Aussage von [Satz 10.2.3/9](#) gilt auch für  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, holomorph in  $G \setminus \{a\}$  ( $a \in G$ ).

**10.2.4 Die Cauchy'sche Integralformel****Lemma 10.2.4/1**

$G \subset \mathbb{C}$  offen,  $z_0 \in G, r > 0, \delta > 0$ , so dass  $\overline{K_r(z_0)} = \{z: |z - z_0| \leq r\} \subset G$ . Es sei  $z \in K_r(z_0)$  und  $\overline{K_\delta(z)} \subset K_r(z_0)$ . Es sei  $h$  holomorph in  $G \setminus \{z\}$ .  $\Rightarrow$

$$\oint_{|\zeta - z_0| = r} h(\zeta) d\zeta = \oint_{|\zeta - z| = \delta} h(\zeta) d\zeta$$

Das Integral ist unabhängig vom Radius und vom Mittelpunkt des Kreises. Nur die Singularität von  $h$  muss in beiden Kreisen liegen. In späteren Semestern können wir sogar

## 10 Komplexe Funktionen

zeigen, dass dies nicht nur für Kreise, sondern für beliebige geschlossene Kurven, welche  $z$  umschliessen, gilt. Dabei ist es wichtig, dass  $z$  *nicht* auf der Kurve liegt. Weiterhin darf die Funktion  $h$  auch nicht holomorph auf ganz  $G$  sein, sonst wären beide Integrale gleich Null. *nicht*

BEWEIS:

$\Omega := K_{r+\varepsilon}(z_0) \setminus \gamma$  ist sternförmiges Gebiet,  $\Omega \subset G$ ,  $h$  ist holomorph in  $\Omega$ .  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$  ist eine geschlossene stückweise glatte Kurve in  $\Omega$ .  $\Rightarrow$  Satz 10.2.3/9

$$\int_{\Gamma_1} h d\zeta + \dots + \int_{\Gamma_4} h d\zeta = 0$$

analog zeigt man:

$$\int_{\Gamma_3} h d\zeta - \int_{\Gamma_4} h d\zeta + \int_{\Gamma_6} h d\zeta - \int_{\Gamma_2} h d\zeta = 0$$

Summe über beide:

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5 + \Gamma_6} h d\zeta = 0 \Leftrightarrow \int_{\Gamma_1 + \Gamma_5} h d\zeta = - \int_{\Gamma_3 + \Gamma_6} h d\zeta$$

Das Minus ist begründet in der Orientierung der Kurven. Das Innengebiet muss immer *links* von der Kurve liegen. **todo: Leider fehlen hier die wichtigen Skizzen.** ■

*links*

### Satz 10.2.4/2 (Die Cauchy'sche Integralformel)

$G \subset \mathbb{C}$  offen,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $z_0 \in G$ ,  $\overline{K_r(z_0)} \subset G$  ( $r > 0$ ). Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

für alle  $z \in K_r(z_0)$ . Dabei ist  $z$  die Singularität.

„Alle Funktionswerte im Kreis sind bestimmt durch Funktionswerte auf dem Rand des Kreises.“

BEWEIS:

Wir betrachten das sternförmige Gebiet  $\Omega := K_{r+\varepsilon}(z_0)$  (existiert, da  $G$  offen ist). Für  $z \in G$  ist

$$h(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \zeta \neq z \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases}$$



stetig in  $\Omega$  und holomorph auf  $\Omega \setminus \{z\}$ . Nach [Folgerung 10.2.3/10](#) gilt der Cauchy'sche Integralsatz für  $h$  und

$$\begin{aligned}
 0 &= \oint_{|\zeta-z_0|=r} h(\zeta) d\zeta = \oint_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \oint_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(z)}{\zeta-z} d\zeta \\
 &= \oint_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - f(z) \oint_{|\zeta-z_0|=r} \frac{1}{\zeta-z} d\zeta \\
 &= \oint_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - f(z) \oint_{|\zeta-z|=r} \frac{d\zeta}{\zeta-z} && \text{nach Lemma 10.2.4/1} \\
 &= \oint_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - f(z) 2\pi i && \text{nach Beispiel 10.2.1/4} \blacksquare
 \end{aligned}$$

### Beispiel 10.2.4/3

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i} dz = 2\pi i \sin(-i) = 2\pi i \frac{1}{2i} (e - e^{-1}) = \pi(e - \frac{1}{e})$$

Singularität bei  $-i$ .

### Bemerkung 10.2.4/4

Für  $z = z_0$  gilt die *Mittelwerteigenschaft*:

*Mittelwerteigenschaft*

$$\begin{aligned}
 f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} d\zeta, \quad \zeta - z_0 = re^{it}, d\zeta = ire^{it} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt \\
 \Rightarrow f(z_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt
 \end{aligned}$$

### Lemma 10.2.4/5

Es sei  $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$  und  $f$  stetig auf  $\partial K_r(z_0) = \{\zeta : |\zeta - z_0| = r\}$ ,  $H(z) = \oint_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$  für  $z$  mit  $|z - z_0| < r$

$$\Rightarrow H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \text{ wobei } a_k = \oint_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

absolut konvergent für  $|z - z_0| < r$  und gleichmäßig konvergent auf  $\{z : |z - z_0| \leq r_1 < r\}$

## 10 Komplexe Funktionen

BEWEIS:

Es sei  $|z - z_0| = r_1 < r$  und  $|\zeta - z_0| = r$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underbrace{\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{r_1}{r} < 1}_{\text{da geom. Reihe}} \\ \Rightarrow \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{\frac{\zeta - z + z_0 - z_0}{\zeta - z}} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \underbrace{\left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)}_{< 1}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k \end{aligned}$$

Da es eine geometrische Reihe ist, ist absolut und gleichmäßig konvergent auf  $\partial K_r(z_0)$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow H(z) &= \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{|\zeta - z_0| = r} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} f(\zeta) \right) d\zeta \\ \Rightarrow H(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left( \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right)}_{= a_k} (z - z_0)^k \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Satz 10.2.4/6

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  offen,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann:

- (1) Es sei  $0 < r < R \leq \infty$ ,  $z_0 \in G$ ,  $K_R(z_0) \subset G \Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  für alle  $z \in K_R(z_0)$ . Die Koeffizienten  $a_k$  sind eindeutig bestimmt und es gilt:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

- (2)  $f$  ist auf  $G$  beliebig oft differenzierbar (weil  $f$  für jeden Punkt in  $G$  als Potenzreihe darstellbar und diese Potenzreihe ist beliebig oft differenzierbar) und es gilt:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

wobei  $z_0 \in G$ ,  $\overline{K_r(z_0)} \subset G$  und  $z \in K_r(z_0)$  (*Cauchy-Integralformel für Ableitungen*)

BEWEIS:

1. Schritt (1)  $G_0 = K_R(z_0)$  [Satz 10.2.4/2](#)  $\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{für } z \in K_\rho(z_0), \rho < R$$

*Cauchy-  
Integralformel für  
Ableitungen*

Aus Lemma 10.2.4/5 folgt:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

wobei

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \stackrel{\text{Lemma 10.2.4/1}}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

für  $0 < r < R$

2. Schritt (2) Nach Satz 10.1.2/6 ist  $f$  beliebig oft differenzierbar in  $K_R(z_0)$  für beliebiges  $z_0 \in G$ .  $\Rightarrow f$  beliebig oft differenzierbar.

Es sei  $z_0 \in G$ ,  $\overline{K_r(z_0)} \subset G$  Aus (1) folgt (Entwicklung in  $z$ )

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \stackrel{\text{Lemma 10.2.4/1}}{=} \frac{k!}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \blacksquare$$

### Folgerung 10.2.4/7

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  eine offene Menge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1)  $f$  ist holomorph in  $G$
- (2)  $f$  besitzt eine lokale Stammfunktion (d. h. in jedem Punkt aus  $K_r(z_0) \subset G$ )
- (3)  $f$  lokal als Potenzreihe darstellbar (d. h. in jedem Punkt aus  $K_r(z_0) \subset G$ )
- (4)  $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  und  $u, v$  differenzierbar in  $G$  und es gelten die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen.

### Folgerung 10.2.4/8 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  offen und  $z_0 \in G$ .

- (1)  $f$  holomorph in  $G \setminus \{z_0\}$  und stetig in  $z_0 \Rightarrow f$  ist holomorph in  $z_0$
- (2)  $f$  holomorph in  $G \setminus \{z_0\}$  und beschränkt in  $K_\delta(z_0) \Rightarrow \exists$  eine holomorphe Funktion  $h: G \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $h(z) = f(z)$  für alle  $z \neq z_0$

BEWEIS:

Zum Beweis der ersten Behauptung konstruieren wir eine  $\delta$ -Kugel um den Punkt  $z_0$ :  $K_\delta(z_0) \subset G$ . Diese Kugel ist einfach zusammenhängend und existiert immer, da  $G$  offen ist. Somit folgt, dass  $f$  auf  $K_\delta(z_0)$  stetig und auf  $K_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$  holomorph ist. Nach Folgerung 10.2.3/10 ist das Integral über jede geschlossene Kurve gleich Null und dies ist genau dann der Fall, wenn  $f$  eine Stammfunktion in  $K_\delta(z_0)$  besitzt. Nach Folgerung 10.2.4/7 hat  $f$  auf  $G$  in jedem Punkt lokal eine Stammfunktion. Somit ist  $f$  holomorph auf  $G$ .

## 10 Komplexe Funktionen

$f$  holomorph in  $K_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ , beschränkt in  $K_\delta(z_0)$

$$\Rightarrow g(z) := \begin{cases} (z - z_0)f(z) & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow G$  stetig in  $z_0$ , holomorph in  $K_\delta(z_0) \setminus \{z_0\} \Rightarrow$  <sup>(1)</sup>  $g$  ist holomorph in  $K_\delta(z_0) \Rightarrow$

$$h(z) = \begin{cases} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ g'(z_0) & z = z_0 \end{cases} = \begin{cases} f(z) & z \neq z_0 \\ g'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

holomorph nach (1) ■

### Folgerung 10.2.4/9 (Satz von Morera)

$G \subset \mathbb{C}$  offen,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Für jedes abgeschlossene Dreieck  $\Delta \subset G$  gilt:

$$\oint_{\partial\Delta} f dz = 0$$

Dann ist  $f$  holomorph in  $G$ .

BEWEIS:

Es sei  $K_r(z_0) \subset G$ . Aus  $\oint_{\partial\Delta} f dz = 0$  für alle  $\Delta \subset K_r(z_0)$  folgt, dass die Aussage von [Lemma 10.2.3/8](#)  $\Rightarrow$  wie in [Satz 10.2.3/9](#) existiert eine Stammfunktion  $F$  auf  $K_r(z_0)$ , d. h.  $F' = f$ .  $F$  holomorph  $\Rightarrow f$  holomorph [Folgerung 10.2.4/7](#). ■

## 10.3 Singularitätentheorie

Eine Singularität bezeichnet in der Mathematik eine Stelle, an der ein mathematisches Objekt, z. B. eine holomorphe Funktion, ein ungewöhnliches Verhalten zeigt. An diesen Stellen kommt man mit den normalen Methoden nicht weiter. Singularitäten treten im Reellen sowie im Komplexen auf. Die erste Kategorisierung von Singularitäten findet man in der Funktionentheorie. Dort sind es immer isolierte Singularitäten. Im Mehrdimensionalen brauchen Singularitäten nicht mehr isoliert zu sein.

### 10.3.1 Laurentreihen

#### Lemma 10.3.1/1

*Kreisring*  $0 < r < R \leq \infty, z_0 \in \mathbb{C}, K(z_0, r, R) = K := \{z: r < |z - z_0| < R\}$  (*Kreisring*)  $g: K \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt für alle  $r_1, r_2$  mit  $r < r_1 < r_2 < R$

$$I_1 = \oint_{|z-z_0|=r_1} g(z) dz = \oint_{|z-z_0|=r_2} g(z) dz = I_2$$

BEWEIS:

analog zu [Lemma 10.2.4/1](#)

Wir schneiden den Kreisring  $K$  mit einem Strahl  $\delta$  aus  $z_0$  auf. Damit ergeben sich zwei zusammenhängende Gebiete  $I_1$  und  $-I_2$ , deren Summe nach dem Cauchy'schen Integralsatz Null sein muss. ■

**Lemma 10.3.1/2**

Sei  $0 < r < R \leq \infty, K := K(z_0, r, R) = \{z: r < |z - z_0| < R\}, f: K \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt für  $r < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = f_2(z) + f_1(z)$$

BEWEIS:

Wie vorausgesetzt, ist  $z$  fest und  $\zeta \in K$ . Dann ist die Funktion  $g(\zeta)$  wie folgt definiert:

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & \zeta \neq z \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases}$$

Damit ist  $g$  nach [Folgerung 10.2.4/7](#) holomorph in  $K$ . Aus dem [Lemma 10.3.1/1](#) folgt:

$$\begin{aligned} \oint_{|\zeta-z_0|=r_1} g(\zeta)d\zeta &= \oint_{|\zeta-z_0|=r_2} g(\zeta)d\zeta \\ \Rightarrow \oint_{|\zeta-z_0|=r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - f(z) \underbrace{\oint_{|\zeta-z_0|=r_1} \frac{d\zeta}{\zeta-z}}_{=0} \\ &= \oint_{|\zeta-z_0|=r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - f(z) \underbrace{\oint_{|\zeta-z_0|=r_2} \frac{d\zeta}{\zeta-z}}_{=\oint_{|\zeta-z|=\delta} \frac{d\zeta}{\zeta-z} = 2\pi i} \end{aligned}$$

**Satz 10.3.1/3 (Laurentreihensatz)**

Sei  $K = K(z_0, r, R)$  ein Kreisring,  $f$  holomorph auf  $K$ . Dann gilt:

- (1) Für alle  $z \in K$  ist die Reihe

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k}_{f_2(z)} + \underbrace{\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k(z - z_0)^k}_{f_1(z)}$$

absolut konvergent. Sie heißt auch *Laurentreihe*.

*Laurentreihe*

## 10 Komplexe Funktionen

(2) Die Koeffizienten  $(a_k)$  sind eindeutig bestimmt und es gilt:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, r < \rho < R: a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

(3) Der Hauptteil der Laurentreihe  $f_1$  konvergiert absolut und gleichmäßig auf  $\{z: |z - z_0| \geq r_1\}$  mit  $r_1 > r$  und ist holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \overline{K_r(z_0)}$ . Weiter ist  $f_2$  ebenfalls absolut konvergent und gleichmäßig auf  $\{z: |z - z_0| \leq r_2\}$  mit  $r_2 < R$  und ist holomorph auf  $K_R(z_0)$ .

BEWEIS:

1. Schritt: Für die Aussage in (1) wird das [Lemma 10.3.1/2](#) angewendet und es folgt,  $f(z) = f_2(z) + f_1(z)$ . Nun kann das [Lemma 10.2.4/5](#) angewendet werden und man hat:

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

2. Schritt: Wir betrachten nun  $f_1(z)$  mit  $|z - z_0| > r_1, |\zeta - z_0| = r_1 \Rightarrow \left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1$ . Es ist:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - \zeta} &= \frac{1}{z - z_0} \frac{z - z_0}{z - \zeta} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{\frac{z - \zeta}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}} \\ &\Rightarrow f_1(z) \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \oint_{|\zeta - z_0| = r_1} f(\zeta) (\zeta - z_0)^k d\zeta \right) \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-1}^{-\infty} \left( \oint_{|\zeta - z_0| = r_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^k \end{aligned}$$

Der Term  $(z - z_0)^k$  kann als Potenzreihe für  $w = \frac{1}{z - z_0}$  betrachtet werden. Damit ist diese absolut konvergent für  $|w| > \frac{1}{r_1} \Rightarrow |z - z_0| > r_1$ .

3. Schritt: Es ist zu zeigen, dass  $f_1$  holomorph in  $\{z: |z - z_0| > r\}$  ist. Wir betrachten die Funktion  $\Phi(z) := f_1(z_0 + \frac{1}{z}) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k \frac{1}{z^k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^k$ . Diese ist somit eine Potenzreihe und es folgt, dass  $\Phi$  holomorph für  $|z| < \frac{1}{r}$  ist. Weiter kann man folgern, dass gilt  $f_1(z) = f_1(z_0 + z - z_0) = \Phi(\frac{1}{z - z_0})$  und man sieht, dass  $f_1$  holomorph in  $|z - z_0| > r$  ist.

4. Schritt: Nun ist noch offen, dass die  $(a_k)$  eindeutig bestimmt sind. Wir nehmen an,  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} b_k(z - z_0)^k$  auf  $r < |z - z_0| < R$ . Sei  $r < \rho < R$  und es folgt:

$$\oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{l+1}} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \oint_{|z-z_0|=\rho} (z-z_0)^{k-l-1} dz = 2\pi i b_l \quad \blacksquare$$

**Bemerkung 10.3.1/4**

Die Funktion

$$f_1(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k(z - z_0)^k = a_{-1} \frac{1}{z - z_0} + a_{-2} \frac{1}{(z - z_0)^2} + \dots$$

heißt *Hauptteil* und beschreibt die Singularität von  $f$  an der Stelle  $z_0$ . Insbesondere gilt für  $a_{-1}$  *Hauptteil*

$$\oint_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$$

$a_{-1}$  heißt *Residuum*<sup>4</sup> von  $f$  in  $z_0$ .

*Residuum*

**Beispiel 10.3.1/5**

Gegeben sei eine Funktion  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ , die holomorph in  $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$  ist.

1. *Fall*: Für  $|z| < 1$  können wir die Funktion um  $z_0 = 0$  mithilfe der geometrischen Reihe als eine Potenzreihe darstellen:

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-z^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$$

2. *Fall*: Außerhalb des Einheitskreises ( $|z| > 1$ ) um  $z_0 = 0$  können wir durch gekonntes Umstellen und Anwendung der geometrischen Reihe, ebenfalls  $f$  als Potenzreihe darstellen:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{-2k} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} - \dots$$

Die Laurententwicklung wäre also nur der Hauptteil.

3. *Fall*:  $z_0 = i \wedge 0 < |z - i| < 2$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i(1+\frac{z-i}{2i})} \right) = \frac{1}{2i} \frac{1}{z-i} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{(z-i)^k}{2^k} \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Schreibweise:  $\text{Res}(f, z_0)$

**10.3.2 Der Residuensatz**

**Definition 10.3.2/1**

Residuum

Der Koeffizient  $a_{-1}$  in der Laurentreihenentwicklung von  $f$  heißt *Residuum* von  $f$  in  $z_0$ :  $\text{Res}(f, z_0) := a_{-1}$ , wobei  $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  ist.

**Folgerung 10.3.2/2**

Sei  $f$  holomorph in  $K(z_0, r, R) \Rightarrow \oint_{|z-z_0|=r} f(z)dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_0)$ .

**Beispiel 10.3.2/3**

$$\oint_{|z|=r} \frac{e^z}{z^2} = 2\pi i$$

da  $\text{Res}(\frac{e^z}{z^2}, 0) = 1$

Laurentreihe:

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2}(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \dots$$

**Beispiel 10.3.2/4**

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \text{Res}(\frac{1}{1+z^2}, i) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$$

da die Laurentreihe so aussieht:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \frac{1}{z-i} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{2^k} (z-i)^k$$

**Bemerkung 10.3.2/5**

Umlaufzahl

Ausdehnung auf beliebige geschlossene stückweise glatte Kuren  $\Gamma$  (*nicht* notwendig Jordankurve). dazu: *Umlaufzahl* (beschreibt wie oft eine Kurve um einen Punkt eine 360°-Drehung vollzieht)

Dazu wählen wir für  $\Gamma$  eine Parameterdarstellung als Polarkoordinaten mit  $z_0$  als Nullpunkt und einen beliebigen festen Strahl aus  $z_0$  als den Winkel null.

$$g(t) = z_0 + r(t)e^{i\varphi(t)}, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

Für eine geschlossene Kurve  $\Gamma$  gilt  $g(a) = g(b)$  und  $r(a) = r(b)$  und  $\varphi(a) = \varphi(b) + 2\pi n$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ .  $n$  nennt man die *Umlaufzahl*.

Umlaufzahl



Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} &= \int_a^b \frac{g'(t)}{g(t) - z_0} dt = \int_a^b \frac{r'(t)e^{i\varphi(t)} + ir(t)\varphi'(t)e^{i\varphi(t)}}{r(t)e^{i\varphi(t)}} dt \\ &= \int_a^b \frac{r'(t)}{r(t)} dt + i \int_a^b \varphi'(t) dt = \ln r(t) \Big|_a^b + i\varphi(t) \Big|_{t=a}^b = i(\varphi(b) - \varphi(a)) = (2\pi i)n \end{aligned}$$

Anmerkung:  $\ln r(t)$  ist null, da  $r(a) = r(b)$

Wir können also die Umlaufzahl wie folgt beschreiben

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

### Lemma 10.3.2/6

Für einen Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  und eine geschlossene stückweise glatte Kurve  $\Gamma$  in  $\mathbb{C}$ , wobei  $z_0 \notin \Gamma$ , ist die Umlaufzahl eine ganze Zahl

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} \in \mathbb{Z}$$

(ohne Beweis)

### Definition 10.3.2/7

$\Gamma$  und  $z_0$  wie in Lemma 10.3.2/6

$$n(\Gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

heißt *Umlaufzahl* von  $\Gamma$  bezüglich  $z_0$ .

*Umlaufzahl*

### Satz 10.3.2/8 (Residuensatz)

Sei  $G$  einfach zusammenhängendes Gebiet,  $\{z_1, z_2, \dots, z_N\} \subset G$ ,  $f$  holomorph in  $G \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ ,  $\Gamma$  geschlossene stückweise glatte Kurve in  $G$ , die  $\{z_1, \dots, z_N\}$  nicht enthält. Dann gilt:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N n(\Gamma, z_j) \operatorname{Res}(f, z_j)$$

### Folgerung 10.3.2/9

Das Integral über eine geschlossene Jordankurve  $\Gamma$  ist

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_j \in IG} \operatorname{Res}(f, z_j)$$

Das *Innengebiet*  $IG$  sind alle Punkte, für die die Umlaufzahl größer null ist oder bildlich dargestellt, ist es das Gebiet, das von der Kurve umschlossen wird.

*Innengebiet*

**Folgerung 10.3.2/10 (Allgemeine Cauchy-Integralformel)**

Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  mit einer geschlossenen stückweise glatten Kurve  $\Gamma \subset G$  und einer holomorphen Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  gilt für einen Punkt  $z \in G$ , der nicht von  $\Gamma$  durchlaufen wird:

$$n(\Gamma, z)f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

BEWEIS:

$$\begin{aligned} g(\zeta) &= \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} = \frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z)}{j!} (\zeta - z)^j \\ &= \frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}} (f(z) + f'(z)(\zeta - z) + \dots + \frac{f^{(k)}(z)}{k!} (\zeta - z)^k + \dots) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Res}(g, z) = \frac{f^{(k)}(z)}{k!}, \text{ Satz 10.3.2/8} \Rightarrow \int_{\Gamma} g(\zeta) d\zeta = 2\pi i n(\Gamma, z) \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \quad \blacksquare$$

**10.3.3 Singularitäten**

**Definition 10.3.3/1**

$f$  sei holomorph in  $K_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ . Es sei  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = f(z)$  die Laurentreihe von  $f$  in  $K_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ .

*hebbare Singularität*

(1)  $z_0$  heißt *hebbare Singularität*  $:\Leftrightarrow a_{-k} = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$

*Pol n-ter Ordnung*

(2)  $z_0$  heißt *Pol n-ter Ordnung* von  $f$   $:\Leftrightarrow a_{-n} \neq 0$  und  $a_{-k} = 0$  für alle  $k > n$

*wesentliche Singularität*

(3)  $z_0$  heißt *wesentliche Singularität*  $:\Leftrightarrow a_{-k} \neq 0$  für unendlich viele  $k \in \mathbb{N}$

**Beispiel 10.3.3/2**

Die Funktion  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  hat an der Stelle  $z_0 = 0$  eine Singularität. Da die Laurentreihenentwicklung für die Funktion keine  $z$  mit negativem Exponenten hat, ist  $z_0$  eine hebbare Singularität.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z^2} (z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - + \dots$$

Die Laurentreihenentwicklung für  $f(z) = \frac{\cos z}{z}$  liefert ein Glied mit negativem Exponenten. Die Singularität  $z_0 = 0$  ist ein Pol 2. Ordnung.

$$f(z) = \frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z^2} (1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2} + \frac{z^2}{4!} - \frac{z^4}{6!} + - \dots$$

Für  $e^{z^{-1}}$  ist die Singularität bei  $z_0 = 0$  eine wesentliche Singularität.

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

analog  $f(z) = \sin \frac{1}{z}$

**Bemerkung 10.3.3/3**

Aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz (Folgerung 10.2.4/8) folgt:  $z_0$  ist eine hebbare Singularität  $\Leftrightarrow f$  beschränkt in einer Umgebung von  $z_0$  und holomorph in  $U(z_0) \setminus \{z_0\}$  ist.

Außerdem klar:  $z_0$  Polstelle  $\Rightarrow \lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$ , da  $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n} (a_{-n} + a_{-n+1}(z - z_0) + \dots)$

**Satz 10.3.3/4 (Casorati-Weierstraß)**

$z_0$  ist eine wesentliche Singularität von  $f \Leftrightarrow$  für jedes  $w \in \mathbb{C}$  existiert eine Folge  $(z_n)_n$  mit der Eigenschaft, dass  $z_n \rightarrow z_0$  und  $f(z_n) \rightarrow w$  für  $n \rightarrow \infty$ .

## 10.4 Eigenschaften holomorpher Funktionen

### 10.4.1 Der Identitätssatz für holomorphe Funktionen

**Satz 10.4.1/1**

Es sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein beliebiges Gebiet und wir betrachten holomorphe Funktionen  $f, g: G \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) Es existiert eine Menge  $M \subset G$ , die in  $G$  einen Häufungspunkt besitzt, so dass  $f(z) = g(z)$  für alle  $z \in M$ .
- (2) Es existiert ein Punkt  $z_0 \in G$ , in dem alle Ableitungen von  $f$  und  $g$  übereinstimmen:  $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) \forall k \in \mathbb{N}_0$ .
- (3) Es ist  $f(z) = g(z) \forall z \in G$ .

BEWEIS:

1. Schritt (1)  $\Rightarrow$  (2) Es sei  $h(z) := f(z) - g(z) \Rightarrow h(z) = 0$  auf  $M$ ,  $\exists z_0 \in G$ ,  $z_0$  ist Häufungspunkt von  $M \Rightarrow h(z_0) = 0$ , da  $h$  stetig in  $z_0$ .

zeigen  $h^{(k)}(z_0) = 0 (\forall k \in \mathbb{N})$  Annahme: Sei  $m$  die kleinste natürliche Zahl mit  $h^{(m)}(z_0) \neq 0$  Potenzreihenentwicklung von  $h$  in  $z_0$  (Satz 10.2.4/6 bzw. Satz 10.1.2/6)  $\Rightarrow$

$$h(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \underbrace{\frac{h^{(k)}(z_0)}{k!}}_{=a_k} (z - z_0)^k = (z - z_0)^m \underbrace{(a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots)}_{=h_m(z)}$$

## 10 Komplexe Funktionen

$h_m(z)$  ist holomorph in  $K_r(z_0)$ , da es eine Potenzreihe ist.

$a_m \neq 0 \Rightarrow h_m(z_0) \neq 0 \Rightarrow \exists K_\delta(z_0)$  und  $h_m(z) \neq 0$  für alle  $z \in K_\delta(z_0)$ , da  $h_m$  stetig in  $z_0$

$\Rightarrow h \neq 0$  auf  $K_\delta(z_0) \setminus \{z_0\} \Rightarrow M \cap K_\delta(z_0) \setminus \{z_0\} = \emptyset \Rightarrow z_0$  kein Häufungspunkt.

2. Schritt (2) $\Rightarrow$ (3) Es sei  $z_0$  wie in (2).  $z \in G$  beliebig.  $\exists$  stetiger Polygonzug  $\Gamma \subset G$  von  $z_0$  nach  $z$  und  $\exists r > 0$ , so dass  $\forall \zeta \in \Gamma$  ist  $\overline{K_r(\zeta)} \subset G$

Aus der Potenzreihenentwicklung von  $f$  und  $g$  in  $z_0$  folgt:  $f = g$  auf  $\overline{K_r(z_0)}$ .  
*Anm.: Alle Ableitungen stimmen überein, dann stimmt die Potenzreihenentwicklung überein, dann stimmen die Funktionen überein*

wählen  $z_1 \in \Gamma$  mit  $|z_1 - z_0| = r \Rightarrow f^{(k)}(z_1) = g^{(k)}(z_1) \forall k \Rightarrow f = g$  auf  $\overline{K_r(z_1)}$ .  
Da der Polygonzug endlich ist, erreicht man nach endlich vielen Iterationen den Punkt  $z \Rightarrow f(z) = g(z)$ . ■

### Folgerung 10.4.1/2 (Fortsetzung aus dem Reellen)

$(a, b) \subset G \subset \mathbb{C}$ ,  $G$  Gebiet,  $f$  beliebig oft differenzierbar auf  $(a, b) \Rightarrow \exists$  höchstens eine in  $G$  holomorphe Funktion, die mit  $f$  auf  $(a, b)$  übereinstimmt.

### Folgerung 10.4.1/3

$f: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $f \neq 0$ ,  $z_0 \in G$ ,  $f(z_0) = 0 \Rightarrow \exists K_\delta(z_0) \subset G$  mit  $f(z) \neq 0$  für alle  $z$  aus  $K_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$  *Anm.: Nullstellen sind Isoliert, Nullstellen bilden keine Häufungspunkte*

$\exists m \in \mathbb{N}$ , so dass  $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$  mit  $g(z_0) \neq 0$

## 10.4.2 Ganze analytische Funktionen

### Definition 10.4.2/1

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *ganze analytische Funktion*  $:\Leftrightarrow f$  holomorph auf  $\mathbb{C}$ .

*ganze analytische  
Funktion*

### Satz 10.4.2/2 (Satz von Liouville)

Sei  $f$  eine ganze analytische Funktion.  $\exists c > 0, n \in \mathbb{N}_0$ , so dass  $\forall z \in \mathbb{C}: |f(z)| \leq c(1+|z|)^n$ .  
Dann ist  $f$  ein Polynom höchstens  $n$ -ten Grades.

BEWEIS:

Potenzreihenentwicklung bei 0  $\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \forall z \in \mathbb{C}$  mit  $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz$ ,  
wobei  $0 < r < \infty$  (nach Satz 10.2.4/6).

Nach Voraussetzung ist  $|z| > 1$  und es gilt  $|f(z)| \leq 2^n c |z|^n$ . Denn  $c(1 + |z|)^n \leq c(|z| + |z|)^n = c(2|z|)^n = c2^n |z|^n$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow^{r>1} |a_k| &\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{|z|=r} \left( \frac{f(z)}{z^{k+1}} \right) \int_{|z|=r} dz = \frac{1}{2\pi} 2^n c \frac{r^n}{r^{k+1}} \underbrace{2\pi r}_{=L(\Gamma)} \\ &= c_1 \frac{1}{r^{k-n}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad \forall k > n \\ &\Rightarrow a_k = 0 \text{ für } k > n \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Folgerung 10.4.2/3**

Wenn  $f$  eine ganze analytische Funktion und beschränkt ist, folgt, dass  $f$  konstant ist ( $n = 0$  in Satz 10.4.2/2).

**Satz 10.4.2/4 (Fundamentalsatz der Algebra)**

Ein Polynom  $n$ -ten Grades ( $n \geq 1$ ) besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

BEWEIS:

Der Beweis erfolgt indirekt. Annahme: Für alle  $z$  sei  $P(z) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{P(z)}$  ist holomorph und beschränkt (nach der obigen Folgerung).  $\Rightarrow$  Widerspruch zu  $n \geq 1$  ■

**10.4.3 Maximumprinzip**

**Satz 10.4.3/1 (Maximumprinzip)**

Es sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet

- (1)  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph in  $G$  und  $|f|$  habe lokales Maximum in  $G \Rightarrow f = \text{const.}$  in  $G$
- (2)  $f: \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, holomorph in  $G$  und  $G$  ein beschränktes Gebiet  $\Rightarrow |f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)| \quad \forall z \in \overline{G}$ , d. h.  $f$  nimmt Maximum auf dem Rand  $\partial G$  an.

**Satz 10.4.3/2 (Minimumprinzip)**

$G \subset \mathbb{C}$  Gebiet

- (1)  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $|f|$  habe lokales Minimum in  $z_0 \in G \Rightarrow f(z_0) = 0$  oder  $f = \text{konstant}$  in  $G$ .
- (2)  $f: \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und holomorph in  $G$ ,  $G$  beschränkt  $\Rightarrow f$  hat Nullstellen in  $G$  oder  $|f|$  nimmt Minimum auf dem Rand an.

### 10.4.4 Konforme Abbildungen

#### Definition 10.4.4/1

$U, V \subset \mathbb{C}$  offen.  $f: U \rightarrow V$  heißt *konform*  $:\Leftrightarrow f$  ist bijektiv und holomorph

*konform*

#### Bemerkung 10.4.4/2

Man kann zeigen:

- (1)  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $U$  offen  $\Rightarrow f(U) = \{w: f(z), z \in U\}$  offen
- (2)  $G \subset \mathbb{C}$  zusammenhängendes Gebiet,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph  $\Rightarrow f(G)$  ist ein Gebiet  
– Gebietstreue
- (3)  $f: U \rightarrow V$  konform  $\Rightarrow f'(z) \neq 0$  für alle  $z \in U$ ,  $f^{-1}: V \rightarrow U$  ist konform und  
 $(f^{-1})'(f(z)) = (f'(z))^{-1}$

Gebietstreue

Problem: Man finde alle  $U \subset \mathbb{C}$  offen, so dass  $\exists f: U \rightarrow K_1(0) = \{z: |z| < 1\}$  konform!

#### Satz 10.4.4/3 (Riemannscher Abbildungssatz)

Es sei  $G \subset \mathbb{C}$  eine nichtleere, offene Menge komplexer Zahlen. Dann sind äquivalent:

- (1) Es existiert eine konforme Abbildung von  $G$  auf  $K_1(0)$  oder  $G = \mathbb{C}$ .
- (2)  $G$  ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

#### Beispiel 10.4.4/4

Eine wichtige Rolle für Anwendungen spielen gebrochene lineare Transformationen

$$F(z) = \frac{i - z}{i + z} \Rightarrow F^{-1}(w) = i \frac{1 - w}{1 + w}$$

$$F: \{z: \Im z > 0\} \leftrightarrow K_1(0)$$

Ende

# Index

index , 9, 10, 12–16, 19, 24, 25, 27, 31, 33–  
41, 44, 45, 48, 52, 53, 55, 59, 67,  
71–73, 80–82, 88, 89, 91, 92, 95,  
97, 102, 104–106, 108, 109, 111–  
114, 116, 118

Dirichlet-Problem, 46

Divergenz, 36

Gradient, 36

Laplace-Operator, 36

Rotation, 36