Wavelets

Sickel

Semester: SS 2012

Vorwort

Dieses Dokument wurde als Skript für die auf der Titelseite genannte Vorlesung erstellt und wird jetzt im Rahmen des Projekts „Vorlesungsskripte der Fakultät für Mathematik und Informatik“ weiter betreut. Das Dokument wurde nach bestem Wissen und Gewissen angefertigt. Dennoch garantiert weder der auf der Titelseite genannte Dozent, die Personen, die an dem Dokument mitgewirkt haben, noch die Mitglieder des Projekts für dessen Fehlerfreiheit. Für etwaige Fehler und dessen Folgen wird von keiner der genannten Personen eine Haftung übernommen. Es steht jeder Person frei, dieses Dokument zu lesen, zu verändern oder auf anderen Medien verfügbar zu machen, solange ein Verweis auf die Internetadresse des Projekts `http://uni-skripte.lug-jena.de/` enthalten ist.

Diese Ausgabe trägt die Versionsnummer und ist vom 23. April 2012. Eine neue Ausgabe könnte auf der Webseite des Projekts verfügbar sein.

Jeder ist dazu aufgerufen, Verbesserungen, Erweiterungen und Fehlerkorrekturen für das Skript einzureichen bzw. zu melden oder diese selbst einzupflegen – einfach eine E-Mail an die Mailingliste `<uni-skripte@lug-jena.de>` senden. Weitere Informationen sind unter der oben genannten Internetadresse verfügbar.

Hiermit möchten wir allen Personen, die an diesem Skript mitgewirkt haben, vielmals danken:

- *Jens Kubieziel `<jens@kubieziel.de>` (2012)*

Inhaltsverzeichnis

Auflistung der Theoreme

Sätze

Definitionen und Festlegungen

1 Einführung

Die Wavelets entstammen aus der Signalanalyse. Man hat eine Funktion $f(t)$ mit $t \in [a,b]$. Bei der Übertragung von Signalen in Radio und TV kommt es auf Geschwindigkeit und Qualität an. Bei CDs und DVDs ist jedoch nur die Qualität wichtig.

Es existieren Orthonormalbasen in $L_2(\mathbb{R})$, denn es ist ein Hilbertraum. Es ist $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt$. Jedes $f \in L_2(\mathbb{R})$ lässt sich entwickeln in eine in L_2 konvergente Reihe. Also können wir das f schreiben als $f =_{L_2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ mit $a_n = \langle f, f_n\rangle$. Und wir wissen, dass $\|f|L_2(\mathbb{R})\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$. Weiter ist $\langle f_n, f_m\rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Alle Informationen über f sind in den Koeefizienten enthalten $(a_n)_n$ enthalten. Damit müssen wir nur noch abzählbar viele Daten verarbeiten.

Wir ersetzen nun $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)$ durch $\sum_{n\in A} a_n f_n$ mit $A \subseteq \mathbb{N}$ und $|A| < \infty$. Nun entsteht das Problem, welche Metrik man zur Messung des Fehlers verwendet. Die einfachste Variante ist die L_2-Metrik. Eine andere Möglichkeit ist die sup-Metrik.

$\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) f_n - \sum_{n\in A} a_n(f) f_n | L_2(\mathbb{R})\| = \|\sum_{n\notin A} a_n(f) f_n | L_2(\mathbb{R})\| = \sqrt{\sum_{n\notin A} |a_n(f)|^2}$. Die Summe wird klein, wenn große Koeffizienten entfernt werden. Daher ist die optimale Wahl von A in Abhängigkeit von f: $A(f) = \{ a_{n_1}, \dots, a_{n_N} \}$ mit $|a_{n_1}| \geq |a_{n_2}| \geq \cdots \geq |a_{n_N}| \geq |a_{n_j}|$ für $j \notin A$. Dabei ist A nicht eindeutig bestimmt.

Bezüglich der C-Norm ist es im Allgemeinen nicht richtig, dass $\sum_{n\in A(f)} a_n(f) f_n$ eine optimale Approximation darstellt.

Welche Eigenschaften von Orthonormalbasen sind in diesem Zusammenhang wünschenswert? Die trigonometrische Orthonormalbasis: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}$, usw. ist ein Orthonormalbasis in $L_2(-\pi, \pi)$. Die komplexe Variante ist $\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Betrachte $\Psi(x) = \frac{e^{ix}}{\sqrt{2\pi}}$ und $\psi_n(x) = \psi(nx)$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Dies führt zu dem Wunsch, die Elemente f_n der Orthonormalbasis sollen möglichst aus wenigen (einer) Grundfunktion berechenbar sein.

Man wünscht sich eine lokale Fehlerausbreitung. Am Beispiel des trigonometrischen Systems bedeutet dies: $f \in L_2(-\pi, \pi)$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos nt\,dt$ und $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin nt\,dt$. Die Fourierreihe ist $S[f](t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$. Nehmen wir nun an, dass wir bei der Berechnung von a_{n_0} einen Fehler machen: $a_{n_0} \cdot \cos n_0 t$ wird fehlerhaft auf $[-\pi, \pi]$ ohne die Nullstellen von $\cos n_0 t$ »breitgeschmiert«. Also wirkt sich der Fehler auf das Gesamtintervall aus.

Nun machen wir einen Fehler bei der Berechnung von f im Punkt x_0 oder in einem Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Dann wirkt sich das auf jeden Koeffizienten aus. Also wird f global fehlerbehaftet. Dies soll möglichst nicht passieren.

Die trigonometrischen Orthonormalbasen garantieren keine lokale Fehlerausbreitung.

Ein weiterer Wunsch besteht in einer gewissen Robustheit. Wir nehmen an, dass wir statt a_n nur $\tilde{a_n}$ mit einem gewissen Fehler berechnen können. Für $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ ist dann $\tilde{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a_n} f_n$. Weiter ist $\|f - \tilde{f}|L_2\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \tilde{a_n}^2}$. Beim trigonometrischen System gilt folgendes: Beliebig kleine Abweichungen in den Koeffizienten können zu beliebig großen Abweichungen in der Supremumsnorm führen. Gleiches gilt für die C_1-Metrik.

Das motiviert zu folgender Definition, die zentral für die Vorlesung ist.

Definition 1.1 (Wavelet)
Eine Funktion $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ heißt **Wavelet**, falls die Familie $\psi_{j,k} := 2^{1/2}\psi(2^j x - k)$ mit $j, k \in \mathbb{Z}$ eine Orthonormalbasis für den $L_2(\mathbb{R})$ ist.

Bemerkung 1.1

1. $\int_{-\infty}^{\infty} |2^{j/2}\psi(2^j x - k)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |2^{j/2}\psi(z)|^2 2^{-j} \, dz = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(z)|^2 \, dz = 1$
2. Man bezeichnet die $\psi_{j,k}$ als **Wavelet-Basis** des $L_2(\mathbb{R})$ mit dem **Generator** ψ.
3. Wunschliste: Per definitionem ist das eine Orthonormalbasis. Einfache Berechenbarkeit ist ebenso erledigt. Die lokale Fehlerausbreitung ist gleichbedeutend damit, dass der Träger von ψ kompakt ist. Die Robustheit hängt mit der Regularität des Generators zusammen.
4. In Kapitel 3wird ein konstruktives Verfahren zur Erzeugung von Wavelets vorgestellt. Link einbauen
   Dort wird auch die Flexibilität des Begriffs diskutiert.
   - Regularität von ψ (stetig, stetig differenzierbar,. . ., C^∞, analytisch)
   - Abklingverhalten im Unendlichen (kompakter Träger, exponentieller Abfall bei Unendlich, polynomialer Abfall bei Unendlich)
   - Symmetrien (gerade, ungerade, . . .)

Zuerst ist natürlich die Frage zu klären, ob es überhaupt Wavelets gibt. Im Jahr 1910 hat Alfred Haar seine Dissertation verteidigt. Dort betrachtete er die Funktion:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Er bewies, das dies ein Wavelet ist.

Um das Jahr 1984 gab es in Frankreich eine Gruppe Physiker, die mit den Mathematikern Meyer und Lemarie den Beweis antraten, dass es $\psi \in C^\infty$ gibt. Kurz danach hat die belgische Physikerin Daubechies beweisen, dass Wavelets mit kompaktem Träger existieren.

Literaturverzeichnis

[1] Math mode von Herbert Voss,
http://www.dante.de/CTAN//info/math/voss/mathmode/Mathmode.pdf

[2] Short Math Guide for LaTeX,
ftp://ftp.ams.org/pub/tex/doc/amsmath/short-math-guide.pdf

Index